Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Arbeitsgemeinschaft über globale analytische Geometrie

16. bis 22. Oktober 66

Diese Tagung war eine Fortsetzung der Arbeitsgemeinschaft über lokale analytische Geometrie vom April 1966. Sie wurde von M. Kneser (Göttingen) geleitet.

Teilnehmer:

Behr, H., Göttingen
Berger, R., Berlin
Böge, S., Heidelberg
Brandis, A., Tübingen
Dress, A., Berlin
Fischer, W., Göttingen
Gottschling, E., Berlin
Hoechsmann, K., Tübingen
Knebusch, M., Hamburg
Kneser, M., Göttingen
Legrady, K., Hamburg
v. Waldenfels, W., Saarbrücken

Erstes Ziel war der Beweis der Gültigkeit folgender Aussagen für Steinsche Räume:

THEOREM A: Sei X ein komplexer Raum und F eine kohärente analytische Garbe über X. Dann erzeugen die globalen Schnitte in F jeden Halm F_p über dem lokalen Ring in $p \in X$.

THEOREM B: Sei X ein komplexer Raum, F eine kohärente analytische Garbe über X. Es ist $H^q(X,F) = 0$ für $q \geq 1$.

Dazu wurden Manuskripte von Grauert-Remmert sowie ein Bericht von H. Cartan: Faisceaux analytiques cohérents (in CIME 1963: Funzioni e varietà complesse, Rom (Cremonese)) benutzt. Da diese beiden Vorlagen nicht "kohärent" waren, entstand eine Schwierigkeit: Cartans Vorgehen ruht wesentlich auf der Gültigkeit von Theorem A und B für offene Quader im $\mathbb{C}^n$ und auf deren Abschluß kohärenten Garben, während Grauert-Remmert diese Sätze für kompakte Quader beweisen. Die Schwierigkeit konnte aber durch geschickte Formulierung der Approximationssätze im Vortrag von A. Dress überwunden werden. - Unter "komplexer Raum" ist hier immer "reduzierter komplexer Raum" zu verstehen.

Vortragsauszüge:

BÖGE, S.: Heftungslemmata

Es seien a, a', b, b', d, d' $\in$ R mit $a < d < d' < a'$, $b < b'$ sowie $Q' = \{ z_1 = x_1 + iy_1 : a < x_1 < d', b < y_1 < b' \} \subset C$, $Q'' = \{ z_1 : d < x_1 < a', b < y_1 < b' \} \subset C$, es sei schließlich B eine nicht leere offene Menge im C^{n-1}. Zu jeder in $(Q' \cap Q'') \times B$ holomorphen q-reihigen quadratischen Matrix A, welche hinreichend nahe bei der Einheitsmatrix liegt, gibt es eine in $Q' \times B$ holomorphe Matrix A' und eine in $Q'' \times B$ holomorphe Matrix A'', so daß A' und A'' beide nahe bei der Einheitsmatrix liegen, invertierbar sind und in $(Q' \cap Q'') \times B$ die Gleichung $A = A' \cdot (A'')^{-1}$ erfüllen. - Der Beweis beruht auf einem additiven Heftungslemma für holomorphe Funktionen; er wurde nach dem Manuskript von Grauert-Remmert durchgeführt.

FISCHER, W.: Cohomologietheorie

Es wurden die in den folgenden Vorträgen benötigten Sätze über Cohomologie mit Koeffizienten in einer Garbe abelscher Gruppen (definiert mittels welker Auflösungen) bereitgestellt. In einem hinter Vortrag 8 eingeschobenen Teil dieses Referats wurden (analytische) Bilder und Urbilder analytischer Garben eingeführt.

KNESER, M.: Theorem A und B für kompakte Quader

Die Gültigkeit der Theoreme A und B für Mengen der Gestalt

$$Q = \{ (z_1, \dots, z_n) : a_\nu \leq \operatorname{Re} z_\nu \leq a'_\nu , \ b_\nu \leq \operatorname{Im} z_\nu \leq b'_\nu , \ \nu = 1, \dots, n \} \subset C$$

wurde durch Induktion nach $\dim Q$ bewiesen.

DRESS, A.: Approximationssätze

Zunächst wurde gezeigt, daß die Halme einer kohärenten analytischen Garbe in kanonischer Weise mit einer Hausdorff-Topologie versehen werden können. Dann wurde folgender Satz bewiesen:

Es sei $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ mit $U_i \subset W_i \subset U_{i+1}$, $U_i \subset\subset U_{i+1}$, U_i offen. Wenn die $\Gamma(U_i, O)$ eine mit der Ringstruktur verträgliche Fréchet-Topo-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

logie tragen, für die (a) die Restriktionen $\Gamma(U_{i+1}, O) \to \Gamma(U_i, O)$ stetig sind und dichtes Bild haben, (b) für jedes $p \in U_i$ die natürliche Abbildung $\Gamma(U_i, O) \to O_p$ stetig ist, dann folgt aus der Gültigkeit der Theoreme A und B für alle W_i ihre Gültigkeit für X.

Ist X Mannigfaltigkeit, so ist bekanntlich die Topologie der kompakten Konvergenz eine Fréchet-Topologie auf den Schnittflächenmoduln - insbesondere folgen sofort Theorem A und B für offene Quader.

Es läßt sich unter Benutzung von Theorem B für offene Quader weiter zeigen: Ist X abzählbar im Unendlichen, so gibt es für jede kohärente analytische Garbe F auf X genau eine Fréchet-Topologie auf $\Gamma(X, F)$, so daß alle Abbildungen $\Gamma(X, F) \to F_p$ stetig sind.

KNEBUSCH, M.: Theorem A und B für Steinsche Räume

Ein komplexer Raum heißt Steinsch, wenn er holomorph-konvex und im Unendlichen abzählbar ist, und wenn die globalen holomorphen Funktionen die Punkte trennen sowie überall lokale Realisationen (als analytische Menge in einem Gebiet des C^n) liefern. - Ein Steinscher Raum läßt sich ausschöpfen durch relativ kompakte Bereiche U, die sich durch globale Funktionen biholomorph auf analytische Teilmengen offener Quader in Zahlenräumen abbilden lassen. Daraus folgt mit den Ergebnissen des obigen Vortrags die Gültigkeit der Theoreme A und B für Steinsche Räume.

Umgekehrt ist ein Raum, für den Theorem A und B richtig sind, Steinsch.

LEGRADY, K.: Anwendungen der Theoreme A und B

Es wurden Beispiele Steinscher Räume angegeben und Folgerungen aus den Theoremen A und B abgeleitet, insbesondere wurde die Lösbarkeit von Cousin-I- und Mittag-Leffler-Problemen sowie die Struktur der Divisoren(klassen)gruppe auf Steinschen Räumen untersucht.

HOECHSMANN, K.: Endlichkeitssatz der Cohomologie

Ist X ein kompakter komplexer Raum und F eine kohärente analytische Garbe auf X, so sind die Cohomologiegruppen $H^q(X, F)$ endlich-dimensionale C-Vektorräume. - Der Beweis beruht auf Theorem B, einem Satz von Leray und einem Satz von L. Schwartz.

BRANDIS, A.: Endlichkeitssatz für vollstetige Abbildungen

Sind E und F Fréchet-Räume, $u, v: E \to F$ Homomorphismen, ist u surjektiv und v vollstetig, so ist der Cokern von $u+v$ endlich-dimensional. - Dieser Satz wurde im vorangehenden Vortrag benutzt.

BEHR, H.: Kohärenz von Bildgarben

Es wurde der Beweis des folgenden Teilergebnisses aus Grauert-Remmert: Bilder und Urbilder analytischer Garben. (Ann. of Math. 68, (1958) 393-443) vorgetragen: Ist X ein beliebiger komplexer Raum, P^1 die Zahlenkugel, F eine kohärente analytische Garbe über $X \times P^1$, so sind die analytischen Bildgarben $\tau_m(F)$ bezüglich der Projektion $\tau: X \times P^1 \to X$ kohärent.

W. Fischer

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft