Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 21

Zur Didaktik des mathematischen Gymnasialunterrichts

vom 23. bis 28.Okt.66

Die diesjährige Didaktik-Tagung hatte die Anwendungen der Mathematik zum Gegenstand. Ihr Ziel war es aufzuzeigen, wie die Mathematik außerhalb der Naturwissenschaften auch in andere Bereiche der Gesellschaft, wie z.B. die Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, eindringt. An diesen Problemen darf die Schule nicht vorübergehen, zumal hierdurch eine wirkliche Bereicherung und größere Lebendigkeit des Unterrichts möglich ist. Außerdem wurde auch über andere aktuelle didaktische Probleme des mathematischen Gymnasialunterrichts referiert und diskutiert.

Teilnehmer:

Augustin, G., Freiburg
Barner, M., Freiburg
Botsch, O., Heidelberg
Böddecker, R., Castrop-Rauxel
Denk, F., Fürth
Deylitz, W., Berlin
Dzewas, J., Ahrensburg
Eggs, H., Freiburg
Faber, K., Mainz
Fischer, W.L., Fürth
Fladt, K., Calw
Flohr, F., Freiburg
Gall, H., Düsseldorf
Germer, H., Berlin
Griesel, H., Letmathe
Hering, U., Donaueschingen
Holland, G., Göttingen
Hürten, K.-H., Köln
Jeger, M., Luzern
Kieffer, L., Luxemburg
Kirsch, A., Bovenden
Knabe, P., Düsseldorf
Kösler, Fr., Rheine
Kraft, A., Bad Hersfeld
Kunle, H., Karlsruhe
Lange, G., Mülheim/R.
Lesky, P., Gerlingen
Liermann, H., Berlin
Letzner, E., Berlin
Lindner, H., Hamburg
Maaß, D., Karlsruhe
Ostermann, F., Köln
Pickert, G., Gießen
Proksch, R., Hannover
Raith, Fr., Freiburg
Röhrl, E., Magstadt
Rueff, M., Zürich
Rüegg, A., St.Gallen
Ruopp, P., Schwäb.Gmünd
Schmidt, J., Berlin

Steiner, H.G., Münster
Thöni, W., Ebmatingen
Wäsche, H., Lübeck
Weiss, A., Zürich

Vortragsauszüge: (in zeitlicher Reihenfolge)

OSTERMANN, F.: Die Handrechenmaschine als Unterrichtsmittel

Es wurde gezeigt, wie man zur Entwicklung des numerischen Verständnisses Handrechenmaschinen nutzbringend im Unterricht heranziehen könnte. Die Bedienungsanleitung der Rechenmaschine wurde dabei in einer Symbolik niedergelegt, die es erlaubt, "Flußdiagramme" aufzustellen. Die Mitteilungen beruhten auf Unterrichtserfahrungen vornehmlich in einer Untersekunda. Als Rechenbeispiel diente die näherungsweise Bestimmung von Quadratwurzeln nach dem NEWTONschen Iterationsverfahren.

HÜRTEN, K.-H.: Begründung der Affin-Geometrie auf Vierecksätze

Die ebene affine Geometrie wird im allgemeinen durch folgende Axiome begründet:

1) Durch zwei Punkte ist genau eine Gerade bestimmt.
2) Es gibt ein echtes Dreieck.
3) Parallelenaxiom.
4) Satz von PAPPOS-PASCAL.

An die Stelle des Satzes von PAPPOS-PASCAL kann ein Vierecksaxiom gesetzt werden:

4') ABCD und A'B'C'D' seien echte Vierecke. Ferner sei $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$ sowie $DA \parallel D'A'$, $AC \parallel B'D'$. Dann gilt $BD \parallel A'C'$.

Es wurde gezeigt, daß die Axiome 4 und 4' äquivalent sind. Weiterhin gibt es einen analogen Vierecksatz, der dem Satz von DESARGUES äquivalent ist.

Die didaktische Bedeutung von Axiom 4' liegt in dem Umstand, daß alle Beweise der HILBERTschen Streckenrechnung wesentlich einfacher geführt werden können als mit dem Gebrauch der Schließungssätze.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

RAITH, F.: Abbildungsübungen im Rechenunterricht der 10-12jährigen

Die gegenwärtige Diskussion über den Mathematikunterricht ist voll von Vorschlägen mit neuen Stoffen. Sie tragen leider häufig den Vermerk: "Nur für begabte Klassen oder Arbeitsgemeinschaften!" Indessen laufen auf vielen traditionellen Stoffgebieten die alten Gewohnheiten weiter, selbst in sonst sehr modernistischen Schulbüchern. So wird z.B. der sogenannte "Dreisatz" weiter in der hergebrachten verwirrenden Form dargestellt, dazu noch vermengt mit dem sogenannten "umgekehrten Dreisatz". Hier wurde nun über langjährige Erfahrungen berichtet, wie man den direkten Dreisatz als lineare Abbildung zwischen eindimensionalen Vektorräumen auffassen kann und wie sich alle einschlägigen Rechnungen aufgrund dieser Auffassung sinnvoller und übersichtlicher durchführen lassen. Ferner wurden Beispiele anderer Abbildungen von Zahlenmengen auf sich erwähnt, wie sie seit je in der Unterstufe vorkommen.

SCHMIDT, J.: Der Vektorraum der Parallelverschiebungen

Es wurde über einen Unterrichtsversuch in einer Unterprima berichtet, der das Ziel hatte, den Begriff des Vektorraumes an einem Modell zu erarbeiten. Es sei V die Menge aller Parallelverschiebungen in der euklidischen Ebene E. Die Komposition von Parallelverschiebungen definiert eine Verknüpfung in V, die genau die Eigenschaften der Addition von Zahlen hat, d.h. V wird durch diese Definition eine abelsche Gruppe. Eine Verknüpfung von Elementen aus V mit reellen Zahlen wird ebenfalls als Komposition von Abbildungen definiert. Es sei $f \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sei

$$(\lambda \circ f)(P) = (\lambda_P \circ f)(P) \qquad (P \in E),$$

wobei λ_P die zentrische Streckung mit dem Fixpunkt P und dem Streckungsfaktor λ ist. Die hierdurch definierte Abbildung $\lambda \circ f$ ist eine Parallelverschiebung. Die weiteren Vektorraum-Eigenschaften lassen sich leicht zeigen.

STEINER, H.G.: Anwendungen der Ordnungstheorie in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften (I)

Nach der ordnungstheoretischen Präzisierung verschiedener Situationen in den genannten Anwendungsgebieten wurde das Problem gestellt, einem n-Tupel von Rangordnungen (vorgelegt von n Individuen, z.B. Experten oder Personen eines Repräsentativquerschnittes) für die Objekte einer bestimmten Menge, z.B. Warenprodukte, eine Konsensus-Rangordnung zuzuordnen.

Im ersten Teil des Referats wurde zunächst der zugrundegelegte Begriff der Rangordnung mathematisch präzisiert und gezeigt, daß sich hierin eine Fülle von Material für den Unterricht anbietet. Eine Rangordnung Rg(M) in einer endlichen Menge M ist bestimmt durch eine Äquivalenzrelation "$\sim$" sowie eine Ordnungsrelation "$<$" (Präferenz),die miteinander in folgender Weise verträglich sind:

1) $a < b$ und $b \sim c \Longrightarrow a < c$

2) $a < b$ oder $b < a$ oder $a \sim b$

$(a, b, c \in M)$,

d.h. die Äquivalenzklassen bezüglich "$\sim$" lassen sich linear ordnen.

FISCHER, W.L.: Anwendungen der BOOLE-Ringe

Nach der Klärung des Zusammenhangs zwischen BOOLEscher Algebra und der Struktur der BOOLE-Ringe wurde als Anwendungsbeispiel eine Klassifikationsmethode für eine endliche Menge von Objekten mit bestimmten Merkmalen mit Hilfe von BOOLE-Distanzen vorgestellt. Sind die Merkmale jedes dieser Objekte bekannt, so läßt sich eine Belegungsmatrix aufstellen mit deren Hilfe sich der Verwandtschaftsgrad der Objekte messen läßt. Es sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ die Menge der Objekte und $\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ die Menge der betrachteten Merkmale, ferner

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a_i \text{ das Merkmal } \mu_k \text{ besitzt} \\ 0, & \text{falls } a_i \text{ das Merkmal } \mu_k \text{ nicht besitzt.} \end{cases}$$

Nun sei

$$d_{ij} = \sum_{K=1}^{m} \alpha_{ik} \oplus \alpha_{jk} \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$ wobei "$\oplus$" die Addition in einem BOOLE-Ring mit 2 Elementen ist. Die natürliche Zahl

d_{ij} definiert eine Metrik in A und charakterisiert somit die Verwandtschaft der Objekte.

PICKERT, G.: Mathematische Analyse des Messens

Vergleichen der zu messenden Objekte entspricht einer Klasseneinteilung der Menge der Objekte, bei der die Menge G der Klassen durch eine Relation "<" linear geordnet ist. In G wird eine assoziative, kommutative Verknüpfung "+" angenommen mit $a < b \Longleftrightarrow \bigvee_c a + c = b$ $(a, b, c \in G)$. Rekursiv definiert man für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen umkehrbaren Endomorphismus $x \mapsto nx$ von G. Dieser ist bei der Teilbarkeitsforderung $nG = G$ ein Automorphismus von G, der mit n, dessen Umkehrung mit n^{-1} bezeichnet wird. In der Automorphismengruppe von G bilden die $m\ n^{-1}$ eine kommutative Untergruppe (Bruchrechnen!).

Setzt man nur $2G = G$, dafür aber das Archimedische Axiom für $(G, +, <)$ voraus, so ergibt sich zu jedem $e \in G$ als Maßeinheit eine umkehrbare Abbildung μ_e auf eine Maßzahlenmenge M (bestehend aus Folgen $(r_n)_{n=0,1,\ldots}$ mit $r_o \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $r_1, r_2, \ldots \in \{0, 1\}$ und ohne "Einerende"). Wird M als von e unabhängig vorausgesetzt, so bilden die den $r \in M$ eineindeutig zugeordneten Abbildungen $x \mapsto \mu_x^{-1}(r)$ die Automorphismengruppe von $(G, +)$, und diese ist kommutativ. Fordert man, M solle alle Folgen der obenerwähnten Art enthalten, so ergibt sich auf diese Weise der Positivbereich des Körpers der reellen Zahlen.

Es wurde vorgeschlagen, im Unterricht die rationalen bzw. die reellen Zahlen in dieser Weise anhand einer Mathematisierung des Messens einzuführen, auf eine "arithmetische Konstruktion" dieser Zahlen (Klassen von Paaren bzw. DEDEKINDsche Schnitte o. ä.) jedoch zu verzichten.

HÜRTEN, K.H.: Der Vektorraum der PASCAL-Dreiecke

Zunächst wurde der Begriff "PASCAL-Dreieck" verallgemeinert: Statt mit "1" beginnt man mit einer endlichen Folge von Zahlen. Für diese PASCAL-Dreiecke wird eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen erklärt (elementweise, wie bei Matrizen). Hieraus ergeben sich

nun durch Anwendung der Sätze für Vektorräume Regeln für Binomialkoeffizienten. In gleicher Weise können Sätze über arithmetische Folgen und Reihen höherer Ordnung gewonnen werden. Die Darstellung der Folgen durch Polynome ist eine Frage der Basistransformation. Als Nebenergebnisse findet man einige Identitäten für das Zahlenrechnen. Schließlich kann eine Verallgemeinerung des WILSONschen Satzes der Zahlentheorie sehr anschaulich gezeigt werden. Mit unendlichen PASCAL-Dreiecken lassen sich auch einige nicht-arithmetische Folgen behandeln.

LETZNER, E.: Die Betonung des Abbildungsgedankens in der Analysis

Da eine affine Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$ zugleich ähnliche Abbildung ist, kann der Differenzenquotient als (orientierter) Maßstab (vgl. Landkarte: $\frac{\text{Bildstrecke}}{\text{Originalstrecke}}$) gedeutet werden. Die Untersuchung des Maßstabes von Umkehrung und Komposition affiner Abbildungen im $\mathbb{R}^1$ sowie der Linearität des Maßstabes führt zu anschaulichen Ergebnissen und stellt eine Vorbereitung auf den Ableitungsbegriff dar (Mittelstufe). Bei einer beliebigen stetigen Abbildung aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ gibt der Differenzenquotient den mittleren Maßstab an, Differenzierbarkeit wird gedeutet als Existenz eines punktalen Maßstabes. Der Mittelwertsatz sagt aus, daß der mittlere Maßstab eines Intervalls im Inneren punktal realisiert wird; er gibt die Möglichkeit, den mittleren Maßstab durch f' abzuschätzen. Das wird an zwei Beispielen deutlich:

1) Abschätzung der Güte der Approximation von $f(x)$ durch $l_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$,
2) Kettenregel (Beweis unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Ableitungen beider Abbildungen).

LANGE, G.: Die Integralrechnung als Einstieg in die Infinitesimalrechnung

Der Vortragende setzte sich dafür ein, Begriffe und Methoden bei der Lösung eines Problems zu entwickeln, sie aber nicht schon vorher systematisch bereitzustellen. Dies wurde am Beispiel des natürlichen

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Logarithmus - ausgehend von $\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1)$ - erläutert. Die Frage nach der Eindeutigkeit einer Lösung f(x) der Funktionalgleichung $f(x^r) = rf(x)$ (r rational) mit f(1) = 0 und f(e) = 1 Bedingung der Stetigkeit, die Frage nach der Existenz von e mit f(e) = 1 auf den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. Die Darstellung von Funktionen als Integralfunktionen erleichtert den Zugang zum Grenzwert von Funktionen und zur Umgebungs-Definition der Stetigkeit, da man hier die Umgebungen leicht mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung angeben kann. Geht man zunächst von monotonen Funktionen aus, so läßt sich die Intervallschachtelung leicht handhaben, ja man kommt sogar zunächst mit der Konvergenz monotoner, beschränkter Folgen aus. Nach der Erarbeitung des Zwischenwertsatzes verschafft man sich eine Übersicht über mögliche stetige Funktionen und kommt zu einem erweiterten, abstrakten Funktionsbegriff.

KIEFFER, L.: Ausbildung der Mathematiklehrer in Luxemburg

In Luxemburg (300 000 Einwohner) unterrichten an 5 höheren Jungen- und 5 höheren Mädchenschulen 60 Mathematiklehrer. Es gibt aber im Lande keine Universität; man kann nur 2 Semester Propädeutik studieren. In der Volksschule (6 Jahre) und in der höheren Schule (7 Jahre) ist der Unterricht zweisprachig. Mathematik wird auf französisch unterrichtet. Nach dem Propädeutikstudium besuchen die Mathematikstudenten eine Universität ihrer Wahl (6-7 Semester), legen die Prüfungen aber in Luxemburg ab. Es schließen sich zwei Jahre Referendarzeit in einem Studienseminar an. Am Schluß steht eine Prüfung, die aus 3 Lehrproben, Aufgabenverbesserungen, einer wissenschaftlichen und einer pädagogischen Arbeit besteht. Nachwuchsmengel kennt man erst in neuerer Zeit.

DENK, F.: Die mathematische Aufgabe in moderner Sicht

Es besteht die Gefahr, daß die "Modernisierung" der Schulmathematik bloß im Begrifflichen stecken bleibt, ja daß sich sogar die Fähigkeit zurückbildet, Aufgaben und Probleme zu bewältigen. Das Aufgabenma-

terial in den Schulbüchern ist erstarrt, es wird von Schulbuch zu Schulbuch immer wieder abgeschrieben. Es fehlen Aufgaben nach neuen Gesichtspunkten:

1) Aufgaben im Sinne der KLEINschen Reformideen sind nur in geringem Umfang vorhanden. Aufgaben zum selbständigen Studium mathematischer Zusammenhänge, Aufgaben unter Verwendung moderner Begriffe (BOURBAKI) fehlen fast ganz.
2) Die "Praxis" wird im Mathematikunterricht unterschätzt. Das Gefühl für die Größenordnungen in Natur, Gesellschaft und Wirtschaft wird nicht gepflegt. Der Umgang mit Formeln und Tafeln (nach den bisherigen Methoden) erzieht oft mehr zum langweiligen statt zum lebendigen und flinken Rechnen.

Der Vortragende gab zahlreiche Anregungen und Beispiele zur Abhilfe.

KRAFT, A.: Warum müssen und inwieweit können auch im mathematischen Unterricht der Berufsschul-Aufbauzüge moderne Begriffe und Betrachtungsweisen benutzt werden?

Der Schüler der Berufsschul-Aufbauzüge, Lehrlinge mit Volksschulbildung, sollen in 3 1/2 Jahren mit wöchentlich 3 bis 4 Unterrichtsstunden an Abenden und Samstagvormittagen die "Ingenieurschulreife" erwerben. Der Referent berichtete darüber, wie er vom Mengenbegriff ausgehend den Körper der rationalen Zahlen aufbauen und - unter sparsamer Verwendung der Mengensymbolik - den Funktionsbegriff und die Gleichungslehre aus moderner Sicht behandeln konnte.

FABER, K.: Die Typen der Streifenornamente

Einleitend wurde kurz berichtet, wie die Fragestellung bei der Behandlung von symmetrischen Figuren, die auf allen Altersstufen im Unterricht vorkommt, von Stufe zu Stufe auf höheres Niveau gehoben werden kann. Nicht auf die Aufstellung der Gruppen von Deckabbildungen gegebener Figuren kommt es an, sondern auf die Untersuchung der Existenz und das Erarbeiten von Figuren mit vorgegebenen Symmetrien (z.B.

Klassifikation der Vierecke in Tertia). Um zu den Typen von Streifenornamenten zu kommen, wurden nacheinander angegeben: Die Menge der Deckabbildungen eines leeren Streifens, die Gruppe der Translationen jedes Streifenornamentes und die möglichen Klassen von Drehungen, Querspiegelungen und Gleitspiegelungen. Es lassen sich Produkte dieser Klassen bilden. Zu jeder Gruppe von Deckabbildungen eines Streifenornaments gehört eine Gruppe dieser Klassen. Da die beiden Klassen von Gleitspiegelungen in einem Ornament nicht zugleich auftreten können, kann es nur 2 Typen von Streifenornamenten mit je 4 Symmetrieklassen und 5 Typen mit deren Untergruppen geben. Der Schüler soll lernen, mit Klassen umzugehen. Es ist nicht notwendig, explizit die Begriffe Nebenklasse, Normalteiler, Faktorgruppe und Homomorphismus einzuführen.

STEINER, H.G.: Anwendungen der Ordnungstheorie in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften (II)

Im zweiten Teil des Referats wurde eine Lösung des im ersten Teil vorgelegten Problems der Konsensus-Rangordnung gegeben. Die Lösung erfolgt durch die Einführung einer (natürlichen) Metrik in der Menge der Rangordnungen auf der gegebenen Menge der Objekte. Die Methoden sind elementar. Die didaktischen und methodologischen Gesichtspunkte sind folgende: Entwickeln der Mathematik von Situationen aus, Konstruktion mathematischer Modelle der Wirklichkeit, begriffliche Methoden und konkrete Anwendungen.

GRIESEL, H.: Algebra und Analysis der Größensysteme der Physik

Angeregt durch einen grundlegenden Aufsatz von FLEISCHMANN (Erlangen) über die mathematische Struktur der physikalischen Größensysteme ist in der letzten Zeit in den Zeitschriften der Didaktik der Mathematik sehr viel über dieses Thema publiziert worden. In diesem Vortrag wurde eine axiomatische Grundlegung der Theorie der physikalischen Größensysteme gegeben, die vollständig einheiteninvariant ist. Es wurde gezeigt, daß nicht alle Größensysteme kohärente Einhei-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

ten besitzen. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz kohärenter Einheiten sind die Anordnungsfähigkeit, die Existenz einer Maßzahlfunktion und die Nichtexistenz einer Größe, deren Quadrat gleich -1 ist. Es wurde weiterhin angedeutet, wie die Analysis der Größensysteme entwickelt werden kann. Der Vortrag rechtfertigte das naive Rechnen mit physikalischen Größen.

LINDNER, H.: Empirische Untersuchungen mit einem Lernprogramm

Der Vortragende hat am Deutschen Institut für internationale pädagogische Forschung in Frankfurt/Main eine Untersuchung mit den Lerneinheiten 87 bis 191 des Programms "Mengenalgebra" durchgeführt. Ziel dieser Untersuchung war es, folgende Fragen zu klären:

1) Welchen Umfang muß eine Stichprobe haben, damit die ermittelten Parameter ein bestimmtes Toleranzintervall nicht überschreiten; wie ist die Stichprobe aufzubauen; welche statistischen Verfahren sind für die Auswertung zweckmäßig?
2) Wie "arbeiten" Programme? (Einsicht in Lernvorgänge)
3) Welcher Lernerfolg und welche Behaltensleistung ist bei dem untersuchten Programm festzustellen?

In diesem Vortrag wurden die wichtigsten statistischen Ergebnisse mitgeteilt und eine Interpretation dieser Ergebnisse versucht.

H. Liermann, Berlin

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft