Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 23

Numerische Analysis, insbesondere Approximationstheorie

13. bis 19. Nov. 1966

Leitung: Prof. Dr. Dr. h. c. L. Collatz, Hamburg
Prof. Dr. G. Meinardus, Clausthal-Zellerfeld

Wie schon im Thema zum Ausdruck kommt, war dieses Treffen nicht nur als Fortsetzung der Tagung über "Numerische Probleme in der Approximationstheorie", die im Juni 1965 unter derselben Leitung stattfand, zu betrachten. Ein Blick auf die Vortragsliste zeigt deutlich den erweiterten Themenkreis.

Durch den zunehmenden Gebrauch elektronischer Rechenanlagen und die daraus erwachsende Möglichkeit der Behandlung bisher nicht zugänglicher Probleme gewinnen Fragen der numerischen Analysis immer mehr an Bedeutung. Dabei nimmt die Approximationstheorie naturgemäß eine wichtige Stellung ein. Unter anderem ergeben sich neuartige Fragestellungen aus der Notwendigkeit der diskreten Darstellung aller Größen in der Maschine. Es zeigen sich Ansätze zur vollständigen Analyse der dabei auftretenden Fehler. In der Approximationstheorie stehen gegenüber den früher hauptsächlich betrachteten linearen Problemen nunmehr Annäherungen durch rationale Ausdrücke im Vordergrund sowohl der theoretischen als auch der numerischen Untersuchungen. Auf dem Gebiet der diskreten Verfahren zeigen sich erfolgversprechende Aspekte. Daneben besteht ein erhöhtes Interesse an der L_2-Approximation, zumal sie zur Gewinnung von Ausgangsnäherungen bei der Tschebyscheff-Approximation verwendet werden kann. Trotz weitreichender theoretischer Ergebnisse bleiben noch viele Fragen, z.B. die nach der Charakterisierung der L_2-Minimallösung, offen.

Im Zusammenhang mit Approximationsfragen befaßten sich mehrere Vorträge mit Differentialgleichungen. Hier wurden neben konstruktiven Verfahren vor allem Fehlerabschätzungen behandelt, wobei insbesondere Monotonieprinzipien zur Anwendung kamen. Einige Vorträge bezogen sich auf die Theorie der Differentialgleichungen.

Es war von vornherein für Diskussionen viel Zeit vorgesehen. Von dieser Möglichkeit wurde ausgiebig Gebrauch gemacht. Das trug sehr zur Klärung der Tragweite der vorgebrachten Ergebnisse bei. Die schöne Atmosphäre gab reichlich Gelegenheit zu persönlichen und wissenschaftlichen Kontakten. In diesem Zusammenhang ist die große Anzahl von Teilnehmern aus dem Ausland hervorzuheben.

Ein besonderer Dank gebührt der Leitung des Hauses und dem Hauspersonal für die liebevolle Betreuung und das immer bereitwillige Eingehen auf alle Wünsche.

Teilnehmer:

Albrecht, Prof.Dr.J., Hamburg
Blatter, Dr.J., Bonn
Bredendiek, E., Hamburg
Brosowski, Dr.B., München
Bukovics, Prof.Dr.E., Wien
Cheney, Prof.Dr.E.W., Austin/Lund
Collatz, Prof.Dr.L., Hamburg
Dejon, Dr.B., Zürich
Dirschmid, H., Wien
Elsner, Dr.L., Hamburg
Goldstein, Prof.Dr.A.A., Seattle/Hamburg
Gröbner, Prof. Dr.W., Innsbruck
Guderley, Prof.Dr.K.G., Dayton/Ohio
Henze, D., Bonn
Janßen, P., Münster
Joubert, G.B., Pretoria/Hamburg
Krabs, Dr.W., Hamburg
Lamprecht, G., Münster
Meinardus, Prof.Dr.G., Clausthal-Zellerfeld
Meinguet, Prof.Dr.J., Löwen
Merz, G., Clausthal-Zellerfeld
Nickel, Prof.Dr.K., Karlsruhe/Zürich
Nicolovius, Dr.R., Hamburg
Nitsche, Prof.Dr.J.C.C., Minneapolis/USA
Powell, Dr.M.J.D., Harwell/England

Gefördert durch
DFG Deutsche
Forschungsgemeinschaft

Reitberger, H., Innsbruck

Runck, Dr. P. O., Würzburg

Sikkema, Prof. Dr. P. C., Delft

Sippel, W., Clausthal-Zellerfeld

Sopka, Prof. Dr. J. J., z. Zt. Genf

Schäfke, Prof. Dr. F. W., Köln

Schneider, Dr. A., Köln

Schock, E., Bonn

Schröder, Prof. Dr. J., Köln

Schurer, Dr. F., Twente

Stoss, H. J., Köln

Töpfer, Dr. H. J., Berlin

Troch, Dr. I., Wien

Wanner, G., Innsbruck

Werner, Prof. Dr. H., Münster

Wetterling, Dr. W., Hamburg

Wulbert, Dr. D. E., Austin/Lund

Ziegler, M., Clausthal-Zellerfeld

Vortragsauszüge:

ALBRECHT, J.: Eine Bemerkung zum Verfahren der "successive over-relaxation"

Ebenso wie bei der Verwendung der finiten Gleichungen des gewöhnlichen Differenzenverfahrens ist auch bei der Verwendung der finiten Gleichungen des Mehrstellenverfahrens für die erste Randwertaufgabe mit $-\Delta u = 0$ in $0 \leq x,\ y \leq 1$ das Spektrum der Iterationsmatrix $(E - \omega T_L)^{-1}\{(1-\omega)E + \omega T_r\}$ des Verfahrens der S.O.R. unabhängig davon, ob die Gleichungen zeilenweise oder "schachbrettartig" durchlaufen werden.

Literatur: ZAMM 1966.

GOLDSTEIN, A. A.: On nonlinear Approximation

We discuss the problem of approximating a point in an inner product space F, say p, by A(x), where A is a map from a normed linear space E. The map A is assumed to be twice differentiable and satisfies properties such as the following:

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$\| A(x+k) - A(x) \| \geq \gamma \| k \|$, $\| A'(x) \| \leq B$, $\| A''(x) \| \leq C$ for all x in some convex subset S of E. The main result is that if z is a stationary point of $\| A(x) - p \|$ and if $\|A(x)-p\| \leq \gamma^2/C(1+B/\gamma)$ then $\|A(z)p\| < \|A(x)-p\|$ for all $x \in S$, $x \neq z$.

The paper is a joint work with E. W. Cheney.

SCHRÖDER, J.: Monotonie bei quasilinearen Differentialgleichungen

Es sei M ein (nichtlinearer) Operator, welcher eine Menge R in eine Menge S abbildet, sowie $X \subset R$ und $Y \subset S$. Es werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß: $Mv \in Y \Rightarrow v \in X$. Die Ergebnisse sind insbesondere auf den Fall anwendbar, daß R und S halbgeordnete Räume sind, und $X = \{u \in R: u \geq w\}$, $Y = \{U \in S: U \geq Mw\}$ mit festem $w \in R$. Hiermit werden frühere Resultate über diesen Gegenstand verallgemeinert. U.a. ist es nun möglich, auch kompliziertere Monotonieaussagen - wie etwa die von Redheffer bei quasilinearen elliptischen Differentialgleichungen - aus einem allgemeineren Satz herzuleiten.

HENZE, D.: Über die Charakterisierung von Minimallösungen bei nicht linearer Approximation

Seien X linearer normierter Raum, $V \subset X$ und $f \in X-V$, so daß $\rho_V(f) := \inf_{h \in V} \|f-h\| > 0$ gilt. Unter gewissen Voraussetzungen wird eine Abschätzung des Minimalabstandes $\rho_V(f)$ nach unten gegeben, aus der man bei geeigneter Spezialisierung ein hinreichendes Kriterium für Minimallösungen erhält. Seien A eine konvexe Teilmenge eines normierten Raumes Y und F eine Frechet-differenzierbare Abbildung einer offenen A enthaltenden Menge in X, so wird eine notwendige Bedingung dafür angegeben, daß ein Element von $F(A)$ Minimallösung für f bezüglich $F(A)$ ist. Durch speziellere Wahl von A läßt sich diese notwendige Bedingung verschärfen. Unter zusätzlichen Voraussetzungen über das Approximationsproblem erweisen sich die notwendigen Bedingungen für Minimallösungen auch als hinreichend.

ZIEGLER, M.: Über eine Umkehrung der EW-Aufgabe bei 2 linearen Differentialgleichungen und Anwendungen

Für den Differentialoperator $ly = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y' + Q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty$,

$y = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}$, $Q(x) = \begin{bmatrix} r(x) & q(x) \\ q(x) & -r(x) \end{bmatrix}$ mit $y_1(0):y_2(0) = \gamma_1:\gamma_2$, $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$,

$q(x)$, $r(x)$, γ_1, γ_2 komplexwertig, ("kanonische Form" nach Levitan/ Gasymov 1966) wird in Analogie zur Theorie von Marčenko (1960) für Differentialgleichungen 2. Ordnung der Entwicklungssatz in der Form der Parsevalgleichung $\langle f, g \rangle \underset{def}{=} \int_0^T (f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x))dx = (R, Vf \cdot Vg)$ dargestellt, wobei $f = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$ und $g = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{bmatrix}$ je aus $L^2[0, T] \times L^2[0, T]$, $T > 0$, sind, Vf und Vg die verallgemeinerten Fouriertransformierten bedeuten und R ein lineares stetiges Funktional über dem Raum der ganzen Funktionen endlichen Grades in $L^1(-\infty, +\infty)$ ist. Die Theorie enthält notwendige und hinreichende Bedingungen für solche R und gestattet die Ermittlung der zugehörigen Differentialgleichung. Die Spezialisierung auf reguläre EW-Probleme über $[0, T]$ mit einer zweiten Randbedingung $y_1(T): y_2(T) = \delta_1:\delta_2$, $\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0$, wird näher diskutiert. Anwendungen aus der theoretischen Elektrotechnik (Charakterisierung des Eingangswiderstands einer inhomogenen Leitung) werden aufgezeigt.

SCHÄFKE, F. W. und A. SCHNEIDER: S-hermitesche Rand-Eigenwertprobleme

In Fortführung der in zwei Arbeiten (Math. Ann. 162 (1965), 165 (1966)) entwickelten Theorie werden weitere Resultate mitgeteilt.

1) Struktur im Normalfall.
Sämtliche Rand-Eigenwertprobleme im Normalfall lassen sich explizit aufzählen. Dabei ergeben sich einfache Relationen zwischen den Abbildungen F, G, S.

2) Entwicklungssätze.
Der Begriff der starken Definitheit, definiert durch $[Gf] \leq \gamma \|f\|$ $(f \in R)$, hat zentrale Bedeutung für den Problemkreis der Entwicklungssätze. Ketten hinreichender Bedingungen erweisen die wichtigsten Problemklassen als stark-definit. Für die stark-definiten Probleme ergeben sich in

einfacher Weise allgemeine Sätze über die Entwickelbarkeit in absolut gleichmäßig konvergente Reihen nach (vektoriellen) Eigenfunktionen. Ergänzende und verschärfende Aussagen ergeben sich für linksdefinite kanonische Probleme.

KRABS, W.: Über ein Kriterium von Kolmogoroff bei der Approximation von Funktionen

Bei linearer Tschebyscheff-Approximation hat Kolmogoroff ein Kriterium für Minimallösungen angegeben, das von Meinardus und Schwedt auf gewisse Typen von nicht-linearen Approximationen ausgedehnt worden ist, zu denen auch die verallgemeinerte rationale Approximation gehört. Daß die (verallgemeinerte) Kolmogoroff-Bedingung hinreichend ist, folgt aus einer sehr allgemeinen hinreichenden Bedingung, mit deren Hilfe man untere Schranken für die Minimalabweichung gewinnen kann.

Im Falle der verallgemeinerten rationalen Approximation wird diese hinreichende Bedingung für untere Schranken durch eine äquivalente (*) ersetzt, die numerisch einfacher zu handhaben ist und einen kurzen Zugang vom Kolmogoroff-Kriterium zu einem Charakterisierungssatz von Cheney und Loeb für verallgemeinert rationale Minimallösungen gestattet.

Ferner zeigt sich, daß im klassischen rationalen Fall (Approximation durch Quotienten von Polynomen) die obengenannte allgemeine hinreichende Bedingung für untere Schranken der Minimalabweichung äquivalent ist einer von Achieser angegebenen Verallgemeinerung einer Bedingung von de la Vallée-Poussin bei Polynomapproximation.

Durch eine Modifikation der obengenannten Bedingung (*) ist es möglich, die Minimalabweichung derart zu charakterisieren, daß man über diese Charakterisierung zu einer notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Lösbarkeit des verallgemeinert rationalen Approximationsproblems gelangt, die ja im allgemeinen nicht gesichert ist.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

GRÖBNER, W.: Approximationen durch Umordnung von Lie-Reihen

Die Lie-Reihen sind wegen ihrer gewöhnlich langsamen Konvergenz nicht unmittelbar für die numerische Auswertung geeignet, aber es gibt Methoden, welche die Konvergenz bedeutend verbessern können. Eine solche Methode ist die in meinem Buch (Lie-Reihen und ihre Anwendungen, S. 89 ff.) beschriebene Störungsrechnung. Andere Möglichkeiten sollen hier untersucht werden; sie beruhen auf passenden Umordnungen der Lie-Reihen. Für die Koeffizienten der umgeordneten Reihen gelten Rekursionsformeln, mit deren Hilfe man sie bequem bestimmen kann. Ein ähnliches Verfahren kann auch mit Erfolg bei Differentialgleichungen angewendet werden, die von einem Parameter abhängen.

NICKEL, K.: Anwendungen einer Fehlerschrankenarithmetik

Definition der Fehlerschrankenarithmetik (FSA). Begründung: Logische Notwendigkeit und numerische Sauberkeit. Beispiele. Lösung bisher ungelöster Probleme mit einer FSA:

Berechnung von $\max\limits_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$, $\int_0^1 x(t)dt$, usw.,

wenn $x \in C$ numerisch (d.h. mit + -x: in endlich vielen Schritten) berechenbar und sonst über x(t) nichts weiter bekannt ist !!!

MERZ, G.: PADÉsche Näherungsbrüche und Iterationsverfahren höherer Ordnung

Ausgehend von lokalen rationalen Approximationen vom Padéschen Typ wird eine Klasse von Iterationsverfahren höherer Ordnung konstruiert und deren Eigenschaften, insbesondere Größe der asymptotischen Fehler und der Einzugsgebiete, an mehreren Beispielen untersucht. Dabei spielt als lokale Konvergenzbedingung die sog. (m, n)-Normalität von f(x) eine Rolle, die sich im Nichtverschwinden einer HANKELschen Determinante ausdrückt. Als Spezialfälle ergeben sich für k = 0 die Verfahren von EHRMANN und für m = 1, $n \geq 0$ diejenigen von J. KÖNIG. Der Vergleich verschiedener Verfahren derselben Ordnung zeigt, daß diese vom numerischen Standpunkt aus nicht als gleichwertig anzusehen sind. Die be-

kannte Erscheinung, daß Approximationen in der Nähe der Hauptdiagonale der PADÉtafel besonders gute Ergebnisse liefern, ist auch hier zu beobachten. Ferner ergibt sich ein Hinweis darauf, wie durch Beachtung funktionentheoretischer Eigenschaften von f(x) die Auswahl der jeweils günstigsten Verfahren erleichtert wird.

WETTERLING, W.: Lösungsschranken bei elliptischen Differentialgleichungen

Seien B_i (i = 1, ..., N) und B abgeschlossene und beschränkte Mengen im R^n, wobei $B = \cup B_i$ ist. In B_i sei jeweils eine stetige Funktion u_i definiert. Es wird untersucht, wie sich Randmaximumeigenschaften der Funktionen u_i bezüglich der Teilbereiche B_i auf den Gesamtbereich B übertragen. Die hierfür geltenden Sätze können zur Aufstellung von Lösungsschranken bei Randwertaufgaben elliptischer Differentialgleichungen benutzt werden. Im Falle linearer Probleme ist hierzu eine Aufgabe der linearen Tschebyscheff-Approximation zu lösen. Eine weitere Anwendung ist ein früher beschriebenes Verfahren zur Bestimmung von Lösungsschranken beim Differenzenverfahren für die Potentialgleichung, das ohne die Kenntnis von Schranken für die Ableitungen der Lösungsfunktion auskommt.

WERNER, H.: Diskretisierung bei Tschebyscheff-Approximation mit verallgemeinerten rationalen Funktionen

Die Behandlung der T-Approximationstheorie wird heute meist axiomatisiert. Man betrachtet verallgemeinerte rationale Funktionen, d.h. Quotienten von Elementen p und q, wobei p und q endlichdimensionalen Teilräumen des C[B] entnommen werden und allerdings Nichtverschwinden von q in B vorausgesetzt wird.

Unter geeigneten Voraussetzungen wird die Lösbarkeit des kontinuierlichen Approximationsproblems bewiesen.

Außerdem wird die von Cheney und Loeb vor kurzem gegebene Normalitätsdefinition übernommen. Unter Voraussetzung dieser Normalität wird die Lösbarkeit des T-Approximationsproblems auf einem Raster (dis-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

krete Approximation) mit einer im ganzen Bereich B stetigen Lösung gezeigt, wenn nur die Maschenweite des Rasters nicht zu groß ist. Außerdem folgt unter Voraussetzung der Normalität die Konvergenz der diskreten gegen die kontinuierliche Approximierende, wenn die Maschenweite gegen Null strebt.

Daß Normalität notwendig ist, lehrt ein Gegenbeispiel.

SIKKEMA, P.C.: Über verallgemeinerte Bernsteinpolynome

Es sei B_n^m ($n = 1, 2, \ldots$; $m = 1, 2, \ldots$) die m-te Potenz des Bernsteinoperators B_n und f eine auf $[0, 1]$ stetige Funktion, so wird

$$\lim_{m\to\infty} B_n^m f \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

bestimmt.

Eine Verallgemeinerung des Bernsteinoperators wird eingeführt und auch für diesen eine Limesrelation hergeleitet.

Für $n = 2$ wird eine Abschätzung für $f - B_2^m f$ gegeben.

CHENEY, E.W.: Rational Approximation in L^2

The theory of approximating continuous functions by rational functions in the least-squares sense is quite different from the Čebyšhev theory. Existence remains true but unicity fails. Best approximations in the L^2 sense cannot have positive "defect", as they can in the Čebyšhev case.

For numerical purposes, the following theorem is important: A best approximation p/q from the class of rational functions R_m^n must interpolate to the function being approximated in at least $n+m+1$ points. The work reported on was done jointly with Professor A.A. Goldstein.

NICOLOVIUS, R.: Extrapolation bei monoton zerlegbaren Operatoren

Der in der ZAMM 45 (1965), S. T 65- T 67 angegebenen Verallgemeinerung einer Methode von J. Albrecht für monotone Operatoren werden zwei weitere Methoden an die Seite gestellt. Diese gehen von den glei-

chen Grundüberlegungen aus, sind jedoch so geartet, daß die ältere Methode nicht als Spezialfall enthalten ist. Beide Verfahren gehen von der bei L. Collatz, Funktionalanalysis und Numerische Mathematik, Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg/New York (1964), S.277 beschriebenen Grunditeration aus. Ein Verfahren besitzt den Vorzug relativ einfacher Handhabung, die jedoch durch Voraussetzungen über die bei der Iteration auftretenden Differenzen erkauft wird, während bei dem anderen Verfahren der Verzicht auf die genannten Bedingungen zu erhöhtem Aufwand führt. Beispiele belegen die Brauchbarkeit und zeigen ein ähnliches Verhalten, wie die oben zitierte ältere Methode.

SCHURER, F.: On linear positive operators of the jackson type

We consider a sequence of linear positive operators of the form

$$L_{n,p}(f,x) = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}nt}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^{2p}dt}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{1}{2}nt}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^{2p}dt$$

$p = 2, 3, \ldots,$ p fixed; $f(x) \in C_{2\pi}$; $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$.

Some topics:

1) calculations of the integral $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}nt}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^{2p}dt$

2) $L_{n,p}(f,x) \to f(x) \in C_{2\pi}$ when $n \to \infty$;

3) an estimate of $\|L_{n,p}(f) - f\|$ on $|-\pi,\pi|$;

4) asymptotic approximation.

In short, it will be an extract of the report "On linear positive operators of the Jackson type" by F. Schurer and F.W. Steutel, appeared as Mathematical Communications no. 1 of the Technological University, Twente (The Netherlands).

MEINGUET, J.: Optimal approximation and error bounds in normal spaces

From kernel representations of linear functionals (such as the Peano-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Sard remainder of linear rules of approximation), it is easy to derive estimates by applying the Hölder inequalities (Sard's proposal) or, more generally, by resorting to the Schwarz's inequality for a suitable pair of conjugate normed spaces (Davis' proposal). This approach is however not optimal since it uses only the nonlinear constraint and not at all the original data which must be interpreted as linear constraints. The theory of optimal error bounds in this sense, and more generally of optimal approximation, has been developed in 1959 by Golomb and Weinberger in the Hilbert space context. Our purpose is similar, but strictly in the semi-normed space context, which may be more interesting in practice since Chebychev semi-norms (for instance) are often more suited to the needs than Hilbert semi-norms. This extension is not all trivial for back of the classical geometric interpretation which leads directly to the hyper-circle inequality. The results are of course very different too and the optimal bounds may even be non linear. The theory is based on duality theorems and its applications on the characterizations of extreme linear functionals.

BLATTER, J.: Zur Stetigkeit von Mengen-wertigen Approximations-abbildungen

Ist X ein metrischer Raum mit der Metrik d, A eine proximale Teilmenge von X, so ist die Abbildung $P_A : X \to 2^X$ definiert durch $P_A(x) = \{y \in A \mid d(x,y) = \inf_{z \in A} d(x,z)\}$. $2^X = \{M \subset X \mid M$ nicht-leer, abgeschlossen$\}$.

Auf 2^X können Topologien τ_1, τ_2 so definiert werden, daß die τ_1-Stetigkeit (τ_2-Stetigkeit) einer Abbildung $f: X \to 2^X$ äquivalent zur Oberhalb-Halbstetigkeit (Unterhalb-Halbstetigkeit) von f ist. Es wird gezeigt, daß P_A oberhalb-halbstetig (OHS) ist, wenn A approximativ kompakt ist, und daß P_A nicht einmal für den Fall, daß X ein normierter linearer Raum ist und A ein endlich-dimensionaler linearer Teilraum von X, unterhalb-halbstetig (UHS) ist. Es wird ferner gezeigt, daß für jeden endlich-dimensionalen linearen Teilraum A von $X = C([0,1],R)$ gilt: "P_A UHS $\Longleftrightarrow$ A HAAR'sch", womit eine Charakterisierung der HAAR'schen linearen Teilräume von $C([0,1],R)$ gegeben ist. Es wird schließ-

lich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß in einem normierten linearen Raum X P_A UHS ist für jeden endlich-dimensionalen linearen Teilraum A von X, und es wird mit Hilfe dieser Bedingung ein Konstruktionsprinzip für Räume beliebiger Dimension mit dieser Eigenschaft gegeben.

POWELL, M.J.D.: On least squares spline approximations

We present properties of the spline of degree n having N knots that best approximates a prescribed function f(x), in the sense that the least squares norm of the error function is minimized. The speciality of this paper is that the knot positions are adjustable, so we do not have a linear problem. The theory is directed towards calculating the best approximation, and we obtain a useful necessary condition for optimal knots positions, suggesting an iterative algorithm; however, we identify a number of difficulties that would be inherent in a general computational procedure. Because of the importance of "optimal" quadrature formulae, a section is devoted to functions f(x), that have a monotonic n-th derivative, for stronger theorems hold under this condition.

SOPKA, J.J.: On abstract numerical Integrations

ABSTRACT: Let X be a space of functions, say $X \subset C(K)$, K locally compact Hausdorff, let $I \in X^*$ be an integral on X and let $M^* \subset X^*$ be a given subspace of "simple" functionals, then it is desired to obtain an $\bar{I} \in M_n^*$ for given n, $\bar{I} \in M_n^* \subset M^*$; M_n^* being a suitable n dimensional subspace determined so that $I - \bar{I}$ annihilates a given finite dimensional subspace $X_1 \subset X$. In this general context, the abstract analysis of numerical integration is developed and certain specific applications are made.

BROSOWSKI, B.: Rationale Tschebyscheff-Approximation differenzierbarer Funktionen

Es werden Approximationen im Sinne von Tschebyscheff an s-mal stetig

differenzierbare Funktionen, $s \geq 1$, durch verallgemeinerte rationale Funktionen untersucht, die ebenfalls s-mal stetig differenzierbar sind. Für diese Approximationen wird ein Kriterium abgeleitet, das notwendig und hinreichend dafür ist, daß die in geeigneter Weise erklärte Dimension der Menge aller Minimallösungen an eine s-mal stetig differenzierbare Funktion eine gegebene Zahl k nicht übersteigt.

L. Elsner

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft