Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 2

Partielle Differentialgleichungen

26.Febr. - 4.März 67

Die vierte Tagung über partielle Differentialgleichungen im Oberwolfacher Institut - wieder unter der Leitung von W. Haack (Berlin) und G. Hellwig (Aachen) - war nach Zahl der Teilnehmer (43 ohne Begleitpersonen) die bisher größte, auch die Zahl der Vorträge wurde bisher nicht überschritten (28). Trotzdem waren Organisation und Betreuung durch das Institut vorbildlich.

Teilnehmer:

Avakumović, V.G., Marburg
Becker, H., Karlsruhe
Bruhn, G., Berlin
Cimmino, G., Bologna
Courant, R., New York
Fife, P.C., z.Zt.Karlsruhe
Frehse, J., Frankfurt
Giesecke, B., Göttingen
Grigorieff, R.D., Frankfurt
Guber, S., Erlangen
Haack, W., Berlin
Habetha, K., Berlin
Heinz, E., Göttingen
Hellwig, G., Aachen
Hildebrandt, S., Mainz
Hölder, E., Mainz
Hopf, E., Bloomington
Hornich, H., Wien
Jäger, W., Göttingen
Jansen, K.-H., Aachen
Kreyszig, E., Graz
Kupradze, W.D., Tbilissi
Lange, H., Berlin
Leis, R., Bonn
Lenhard, M., Karlsruhe
Meister, E., Berlin
Morawetz, C.S., New York
Nickel, K., Zürich-Rüschlikon
Nitsche, J., Freiburg
Nitsche, J.C.C., Minneapolis
Reichert, M., Frankfurt
Rieder, G., Aachen
Schneider, M., Berlin
Staude, U., Mainz
Stummel, F., Frankfurt
Tautz, G., Freiburg
Velte, W., Würzburg
Walter, J., Aachen
Walter, W., Karlsruhe
Wendland, W., Berlin
Werner, P., Stuttgart
Witte, J., Aachen
Wittich, H., Karlsruhe

Vortragsauszüge:

AVAKUMOVIČ, V.G.: Über die Spektralfunktion elliptischer Differentialoperatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

V sei eine N-dimensionale, zusammenhängende, orientierbare und kompakte Mannigfaltigkeit der Klasse C^p mit $p = N + 2$ bzw. $p = N + 3$ für $N \equiv 0$ (2) bzw. $N \equiv 1$ (2). Der Rand von V bestehe aus einer endlichen Anzahl von glatten Flächenstücken oder V sei geschlossen. - λ_n bzw. $\Phi_n(x)$ seien die Eigenwerte bzw. -funktionen des Differentialoperators $L = \Delta + e(x)$. Dabei ist Δ der elliptische Beltramioperator. - Es werden die zum Beweis der folgenden Abschätzung notwendigen Vorbereitungssätze erläutert, und es wird auf verschiedene Anwendungen hingewiesen. Diese Abschätzung lautet:

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \left| \sum_{\lambda_n \leq \lambda} \Phi_n^2(x) - C_N \lambda^{N/2} \right| \lambda^{-\frac{N-1}{2}} \leq M_x .$$

Dabei ist $C_N = (2\sqrt{\pi})^{-N} / \Gamma(\frac{N}{2} + 1)$ und M_x ist von f(V), dem Rauminhalt von V, unabhängig.

BECKER, H.: Zur Wärmeleitung in Zweikomponentensystemen

Die Behandlung von Wärmeleitungsproblemen für einen Wärmeleiter, der sich in einem Wärmebad endlicher Wärmekapazität befindet, führt auf Randwertaufgaben mit integraler Nebenbedingung. Für Probleme dieser Art bei einer Klasse von nichtlinearen parabolischen Differentialgleichungen werden Aussagen über die Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Randbedingungen und der "rechten Seite" erzielt und Fehlerabschätzungen für Näherungslösungen angegeben. Wesentliches Hilfsmittel sind dabei Methoden der Theorie der Differentialungleichungen.

COURANT, R.: Existenzbeweise bei elliptischen Problemen

Es wird eine "humane" Darstellung der Lösung des Dirichletproblems für lineare elliptische, nichtsymmetrische Differentialgleichungen der

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Ordnung 2p mit ziemlich beliebigen Koeffizienten gegeben, wie sie durch die Entwicklungen der letzten Jahrzehnte ermöglicht wurde. Dabei ist in einem ersten Schritt die Existenz einer schwachen Lösung in einem geeigneten Hilbertraum zu zeigen, im zweiten Schritt die Regularität dieser schwachen Lösung, im dritten Schritt wird die Annahme der Randwerte untersucht.

FREHSE, J.: Über elliptische Differential- und Differenzengleichungen vom Typ der Minimalflächengleichung

Nach den Methoden von F.E. Browder läßt sich das verallgemeinerte Dirichletproblem der Minimalflächengleichung und verwandter Gleichungen $\sum_{i=1}^{n} D_i(D_i zF(\sum_{j=1}^{n} (D_j z)^2)) = 0$ bzw. seine Differenzenapproximation auf die Bahandlung der Gleichung (1) $Tu = 0$ bzw. (2) $T_h u_h = 0$ zurückführen, wobei T bzw. T_h Abbildungen eines Teilraumes V des Sobolevschen Funktionenraumes $W^{1,1}(G)$ bzw. eines Raumes V_h von Gitterfunktionen über einem Punktgitter der Maschenweite h in die dualen Räume V^* bzw. V_h^* sind:

$$(Tu, v) = \int_G \sum_{i=1}^{n} D_i zF(\sum_{j=1}^{n} (D_j z)^2) D_i v\, dx, \qquad z = u + w, \qquad u, v \in V$$

bzw.

$$(T_h u_h, v_h) = h^n \sum_{x \in G_n} \sum_{i=1}^{n} D_i^h z_h F(\sum_{j=1}^{n} (D_j^h z_h)^2) D_i^h v_h, \quad z_h = u_h + w_h,$$

$u_h, v_h \in V_h$; w ist eine die Randbedingungen erfüllende Funktion.

Es wird gezeigt: (2) hat genau eine, (1) höchstens eine Lösung. Setzt man die Lösungen u_h von (2) durch Treppenfunktionen $J_h u_h$ auf $L^1(G)$ fort, so erhält man je nach Voraussetzung über die Lösung u von (1) die Konvergenz der $J_h u_h$ und $J_h D_i^h u$ gegen u bzw. $D_i u$ dem Maße nach in $L^1_{loc}(G)$ oder in $L^1(G)$ für $h \to 0$. Eine Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit ist möglich. Unter der Voraussetzung der schwachen Kompaktheit der $J_h D_i^h u$ erhält man die Existenz einer Lösung von (1) und die Konvergenz der Differenzenapproximation in $L^1(G)$.

GRIGORIEFF, R.D.: Über die Koerzitivität linearer elliptischer Differenzenoperatoren unter allgemeinen Randbedingungen

Für lineare elliptische Differentialoperatoren beliebiger Ordnung lassen sich unter Randbedingungen, die den Operator überdecken, nach M. Schechter Koerzitivitätsungleichungen beweisen. Analoge Ungleichungen gelten unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Randbedingungen zentral überdecken, in einer gewissen Klasse von Gebieten auch für elliptische Differenzenoperatoren. Steht δ_j, $j = 1,\dots,n$, für die zentralen Differenzenquotienten und ist $A = \sum\limits_{|\mu|\leq m} a_\mu(x)\delta^\mu$ ein elliptischer Differenzenoperator, der von den Randoperatoren $B_t = \sum\limits_{|\mu|\leq r_t} b_{t\mu}(x)\delta^\mu$, $0 \leq r_t < m$, $t = 1,\dots,q$, zentral überdeckt wird, so gilt eine Koerzitivitätsungleichung der Gestalt

$$\|u\|_m \leq K(\|Au\|_0 + \|u\|_0 + \sum_{t=1}^{q} [B_t u]_{m-r_t-1})$$

mit K unabhängig von der Schrittweite h, wobei die innere Norm $\|\cdot\|_j$ und die Randnorm $[\cdot]_j$ dem kontinuierlichen Fall entsprechend gebildet sind. Mit den Normen $\|\cdot\|_j$ läßt sich auch eine Ehrlingsche Ungleichung $\|u\|_j \leq \epsilon \|u\|_k + K(\epsilon)\|u\|_k$, $\epsilon > 0$, $0 \leq j < k$, $k = 1,2,\dots$, beweisen. Für $h \to 0$ erhält man Ergebnisse von M. Schechter.

GUBER, S.: Bemerkungen über eine gewisse Klasse parabolischer Differentialgleichungen

Zugrundegelegt sei ein auf einer offenen Teilmenge X des $\mathbb{R}^{n+1}$ definierter parabolischer Differentialoperator

$$L = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x,t) D_i D_k + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) D_i + c(x,t) - D_t ,$$

dessen Koeffizienten folgenden Bedingungen genügen:

1) $a_{ik} = a_{ki}$;
2) a_{ik}, $D_j(a_{ik})$, b_i und c sind lokal Hölderstetig;
3) es existiert ein reelles $\gamma > 0$ derart, daß für die charakteristische Form von L gilt: $\gamma \leq \sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x,t)\xi_i\xi_k$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und alle $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| = 1$;
4) die Funktion c ist nach oben beschränkt.

Man kann zeigen, daß die Gestalt der L-Absorptionsmengen nicht von der speziellen Gestalt der Koeffizienten abhängt. Unter Verwendung eines Resultates von Mokobodzki gewinnt man eine allgemeinere Form der Harnackschen Ungleichung für die nicht-negativen klassischen Lösungen von $Lu = 0$ in X.

HAACK, W.: Aufstellung von Integralrelationen für hyperbolische Differentialgleichungen in mehr als zwei Variablen

Eine Differentialgleichung vom hyperbolischen Typus

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}(A^{ik}\Phi_k) + B^i\Phi_i + C = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

läßt sich mit geeigneten Pfaffschen Formen $\omega^1 = dx^1$, $\omega^i = \mu^i_k dx^k$ $(i > 1)$ und Pfaffschen Ableitungen $d\Phi = \Phi_{\underline{i}}\,\omega^i$ als System schreiben:

$$\begin{aligned} u_{\underline{1}} &= v_{\underline{2}} + w_{\underline{3}} + L_1(u, v, w) \\ v_{\underline{1}} &= u_{\underline{2}} \qquad\quad\; + L_2(u, v, w) \\ w_{\underline{1}} &= u_{\underline{3}} \qquad\quad\; + L_3(u, v, w) \end{aligned}$$

Dabei ist $u = \Phi_{\underline{1}}$, $v = \Phi_{\underline{2}}$, $w = \Phi_{\underline{3}}$. Auf jeder charakteristischen Fläche $F(x^i) = \text{const.}$ gilt die Integralformel

$$\int_\Gamma Q\{(f_{\underline{3}}u - w)\omega^2 - (f_{\underline{2}}u - v)\omega^3\} = \int_\Gamma L(u, v, w)[\omega^2, \omega^3],$$

wenn auf F $\omega^1 = f_{\underline{2}}\omega^2 + f_{\underline{3}}\omega^3$ gesetzt wird.

HABETHA, K.: Werteverteilung von Lösungen partieller Differentialgleichungen

Für lokal quasikonforme Funktionen $\omega(z)$, die zweimal Hölderstetig differenzierbar sind, läßt sich eine Werteverteilungstheorie analog der von R. Nevanlinna entwickeln. Dabei ermöglicht die Berücksichtigung der engen Verbindung zu Lösungen der elliptischen Systeme $w_{\bar{z}} = Aw + B\bar{w}$ eine gegenüber bisherigen Darstellungen befriedigendere Theorie. Abschwächungen der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen sind möglich.

HEINZ, E.: A-priori-Abschätzungen für isometrische Einbettungen zweidimensionaler Riemannscher Mannigfaltigkeiten in dreidimensionale Riemannsche Räume

Es seien $V = (V, ds^2)$ und $\tilde{V} = (\tilde{V}, d\tilde{s}^2)$ orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $n = 3$ bzw. $n = 2$, und $\varphi : \tilde{V} \to V$ sei eine isometrische Einbettung der Klasse C^2. Ferner sei $\tilde{K}$ die Gaußsche Krümmung von $d\tilde{s}^2$ und K^* die Riemannsche Krümmung von V in Richtung der Tangentialebene von φ. Wenn überall $K = \tilde{K} - K^* \geq c > 0$ gilt, so lassen sich Ungleichungen für die zweite Fundamentalform Ω_φ von φ angeben, die für den Fall kompakter Mannigfaltigkeiten $\tilde{V}$ in a-priori-Abschätzungen von Ω_φ durch ds^2, $d\tilde{s}^2$ und c übergehen. Die Sätze stellen Verallgemeinerungen von Resultaten des Vortragenden (Math. Ztschr. 74, 129-157 (1960)) sowie von Pogorelov (Adv. Math. 1, 191-264 (1964)) dar.

HILDEBRANDT, S.: Über das Plateausche Problem

Es wurde das Randverhalten von Minimalflächen, die in parametrischer Form $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u,v)$ gegeben sind, auf einer "freien" Randfläche S untersucht. Bezeichne C den Teil des Parameterbereichs B in der u,v-Ebene, der durch $\mathfrak{y}$ im "verallgemeinerten" Sinn auf S abgebildet wird. Dann gilt der SATZ:

1) Wenn S von der Klasse C^{2+s}, $s \geq 0$, und Γ ein differenzierbarer Bogen mit Endpunkten auf S ist, so gibt es eine von Γ und S berandete Minimalfläche, die dem Dirichletintegral ein absolutes Minimum erteilt und in der Differenzierbarkeitsklasse $C^s(B+C)$ liegt.
2) Wenn $\mathfrak{y}$ eine von einer Fläche $S \in C^{s+2}$ berandete Minimalfläche ist, die dem Dirichletintegral ein schwach isoliertes Minimum erteilt, so liegt $\mathfrak{y}$ in $C^s(B+C)$.

Der Beweis erfolgt durch Aufstellung von a-priori-Schranken und durch Approximationssätze.

HOPF, E.: Bemerkungen über schwache Lösungen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung

Gegenstand des Vortrages sind lokal Lipschitzsche Lösungen (lL-Lösungen) einer Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung $z_t + f(z_x) = 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, und insbesondere die Lösung der Anfangswertaufgabe: z gegeben für $t = 0$, gesucht für $t > 0$. Eine lL-Lösung existiert für alle $t > 0$ unter jeder der beiden folgenden Voraussetzungen:

a) $z(x,0)$ Lipschitzsch, $f(u)$ konvex, $f(u)/|u| \to \infty$: für $u \to \infty$;

b) $z(x,0)$ konvex und Lipschitzsch, $f(u)$ stetig im R^1.

Diese Lösung wird durch explizite Formeln dargestellt. Sie enthält die für genügend kleine t existierende klassische, glatte Lösung $z(x,t)$. Die Methode, mit der die Lösung konstruiert wird, ist eine Ausdehnung der klassischen Jacobischen Methode, nach der die Lösung aus bekannten Lösungen (vollständiges Integral) durch Enveloppenbildung gewonnen wird.

HORNICH, H.: Über partielle Differentialgleichungen von hoher Ordnung

Es werden Sätze vorgetragen, die sich auf die Nichtdarstellbarkeit von Funktionen als Lösungen von partiellen linearen Differentialgleichungen von hoher Ordnung mit beschränkten Koeffizienten beziehen.

JÄGER, W.: Das Dirichletsche Außenraumproblem für die Schwingungsgleichung

Das Dirichletsche Problem für die reduzierte Schwingungsgleichung

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \rho(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} + k^2 + p(x)\right) u(x) = g(x) \qquad (\mathrm{Re}\ k > 0)$$

und unbeschränkte Gebiete im $\mathbb{R}^n$ ist im allgemeinen nicht eindeutig lösbar. Unter speziellen Voraussetzungen an das asymptotische Verhalten der Funktionen ρ und p im Unendlichen läßt sich Eindeutigkeit beweisen, falls zusätzlich eine Ausstrahlungsbedingung gestellt wird. Für diesen Beweis sind Abschätzungen von Integralmittelwerten für Lösungen der homogenen Gleichung anzugeben. Bei Gebieten, deren Rand beschränkt ist und aus im Sinne der Potentialtheorie regulären Punkten

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

besteht, wird die Existenz von Ausstrahlungslösungen gezeigt. Dazu wird das Randwertproblem übergeführt in die Aufgabe, eine Gleichung vom Fredholmschen Typ in einem geeigneten Banachraum zu lösen.

JAENICKE, J.: Lösung der ersten Randwertaufgabe einer Differentialgleichung vom hyperbolischen Typus

AmBeispiel der Wellengleichung $u_{xx} - u_{yy} = 0$ und einem Zweieckgebiet zwischen $x = a$ und $x = b$, dessen untere Begrenzung die x-Achse und dessen obere Begrenzung eine nirgends charakteristische Kurve ist, wird ein Lösungsverfahren für die erste Randwertaufgabe linearer partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus dargestellt. Aus der d'Alembertschen Lösungsformel des Anfangswertproblems auf der x-Achse wird eine Differenzengleichung für $u_y(x, 0)$ hergeleitet. Mit dieser kommt man zu einer Darstellung von $u_y(x, 0)$ als unendliche Reihe. Durch Integration folgt $u(x, y)$. Bei genügender Differenzierbarkeit der gegebenen Funktionen kann man zeigen, daß u Lösung der Wellengleichung ist und die auf G vorgegebenen Randwerte außer in (z.B.) dem Eckpunkt $(a, 0)$ überall annimmt. Diese Lösung ist in $\bar{G}-(a, 0)$ stetig und hat in $(a, 0)$ höchstens eine beschränkte Unstetigkeit. Die ersten Ableitungen sind in $\bar{G}- (a, 0)$ stetig. Ihre Beschränktheit konnte in einer Umgebung der kritischen Ecke nicht nachgewiesen werden. (Von W. HAACK als kurzes Referat vorgetragen).

KUPRADZE, W.: Some new existence theorems in elasticity

Proofs of the existence theorems of the fundamental boundary value problems of the classical theory are brought to completion. Proofs of the existence theorems of the boundary value problems for piecewise non-homogeneous bodies are given, also existence theorems for the mixed problems. Extension to dynamical problems is possible. The numerical solutions are treated.

LANGE, H.: Die Behandlung eines hyperbolischen Systems mittels einer Integralrelation von W. Haack

Jede lineare hyperbolische Differentialgleichung 2. Ordnung in drei Variablen kann, wenn die gesuchte Funktion nicht auftritt, unter Verwendung Pfaffscher Ableitungen auf ein System 1. Ordnung zurückgeführt werden. Einem Cauchyschen Anfangswertproblem für dieses System läßt sich ein System Volterrascher Integralgleichungen 2. Art zuordnen. Letzteres verknüpft die Werte der gesuchten Funktionen in der Spitze eines charakteristischen Konoids mit denen auf der Mantelfläche und den gegebenen Anfangswerten auf der Schnittkurve der Konoidfläche mit der Anfangsebene. Die Kerne dieser Integralgleichungen sind stark singulär. Existiert eine eindeutige, differenzierbare und im Sinne Hadamards fortsetzbare Lösung des Integralgleichungssystems, dann löst dieses auch das Anfangswertproblem. Unter geeigneten Voraussetzungen kann das Integralgleichungssystem zur numerischen Behandlung herangezogen werden. Der ganze Problemkreis wird, soweit das ohne Verlust an Allgemeinheit möglich ist, am Beispiel der Wellengleichung demonstriert.

MORAWETZ, C.S.: Energy identities for the reduced wave operator

Two energy identities for the reduced wave operator make it possible to estimate a function u satisfying $(\Delta + \lambda^2) u = f$ outside a body B on which u is prescribed provided u satisfies a radiation condition and the body is star-shaped. The solution u is bounded in terms of λ, $\int r^2 f^2 dx$, the maximum value of u on B, and the L^2-integral of the prescribed tangential derivatives.

NICKEL, K.: Abschätzungen für die Eigenwerte von speziellen elliptischen Differentialoperatoren

Es sei G ein beschränktes Gebiet im R^n mit dem Rand Γ und $Du := \sum_{i=1}^{n} (q_i u_{x_i})_{x_i}$. Man betrachtet $Du(x) + \lambda p(x) u(x) = 0$ in G mit $u = 0$ auf Γ, wobei $p(x) > 0$, $q_i(x) > 0$ unter der Normierung

(*) $\int_G u^2(x) p(x) dx / \int_G p(x) dx = 1$. Dann gilt der

SATZ: λ^*, $u^*(x)$ sei ein Näherungs-Eigenpaar, so daß

$$|Du^*(x) + \lambda^* p(x) u^*(x)| \leq \delta \text{ in } G \text{ und } |u^*(x)| \leq \epsilon \text{ auf } \Gamma, \ \lambda^* > 0,$$

sowie der Normierungsbedingung (*). Die Funktion $s(x)$ löse das Ungleichungsproblem $Ds(x) \leq -1$ in G und $s(x) \geq 0$ auf Γ. Man setzt $\sigma := \max_{x \in \bar{G}} |s(x)|$ und $\rho := \epsilon + \sigma\delta$. Wenn $\rho < 1$, dann gibt es einen Eigenwert λ so, daß $\dfrac{|\lambda - \lambda^*|}{|\lambda^*|} \leq \dfrac{\sqrt{2}\,\rho + \rho^2}{1 - \rho^2}$.

Der Beweis beruht auf der Ungleichung von Krylov-Bogoliubov, dem Maximumprinzip und der Theorie der Differentialungleichungen. Für $\delta = 0$ wurde der Satz von Fox, Henrici und Moler bewiesen und erscheint demnächst im SIAM J. of Num. Analysis; ebenfalls die obenstehende Verallgemeinerung. Man kann damit numerische Abschätzungen liefern, die z.B. bei der L-förmigen Membran die besten bisherigen Ergebnisse weit übertreffen. Ebenfalls ergibt sich z.B. ein Abhängigkeitssatz für die Eigenwerte, wenn das Gebiet G abgeändert wird, als Pendant zu Courants Monotoniesatz.

NITSCHE, J.A.: Über die Konvergenzgeschwindigkeit beim Ritzschen Verfahren

Die Lösung x_n nach dem Ritzschen Verfahren der Gleichung $Ax = f$ hängt linear von f ab: $x_n = R_n f$. Es wird die Normkonvergenz R_n gegen A^{-1} bei symmetrischen, positiv definiten Operatoren mit vollstetiger Inverser untersucht. Zunächst erweist sich das Ritz-Verfahren als "stärker" als die Methode des minimalen Fehlerquadrates. Ist A ein elliptischer Differentialoperator 2. Ordnung und sind die Ansatzfunktionen Eigenfunktionen eines ebensolchen, so herrscht quasi-optimale Konvergenz.

NITSCHE, J.C.C.: Zur Frage von Minimalflächenblöcken

Γ sei eine gegebene, gewissen Regularitätsbedingungen genügende Jordankurve im Raum. $\mathfrak{H}$ sei die Menge der in P (= Einheitskreis) harmonischen Vektoren $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v) \in C^2(P) \cap C^0(\bar{P})$, welche die Kreislinie ∂P

topologisch auf Γ abbilden. Durch die Abstandsdefinition $\|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}\| = \mathrm{Max}_{\bar{P}} |\mathfrak{x}(u,v) - \mathfrak{y}(u,v)|$ wird $\mathfrak{H}$ ein metrischer Raum. $\mathfrak{H}_\infty$ und $\mathfrak{H}_M$ seien die Teilräume derjenigen Vektoren aus $\mathfrak{H}$, deren Dirichletsches Integral $D[\mathfrak{x}] < \infty$ bzw. $< M$ ist. Jede von Γ berandete Lösung des Plateauschen Problems ist ein "kritischer Punkt" des Dirichletschen Integrals. Unter einem Block (Shiffman, Courant) oder einer kritischen Menge (Morse, Tompkins) von Minimalflächen versteht man ein maximales Kontinuum von Minimalflächen definierenden Vektoren aus $\mathfrak{H}$, deren Dirichletsches Integral ein und denselben endlichen Wert hat. Ob Blöcke von Minimalflächen immer aus isolierten Elementen bestehen oder ob es echte Blöcke gibt, ist seit langem eine offene Frage. Beispiele sind nicht bekannt. Im Vortrag wird über die ziemlich langwierigen Rechnungen berichtet, denen zufolge in einem konkreten Beispiel die von einer speziellen Kurve berandete Minimalfläche isoliert liegt.

REICHERT, M.: Über hyperbolische Anfangswertaufgaben

Für hyperbolische Differentialgleichungen der Form $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ wird die erste und zweite Anfangswertaufgabe betrachtet. Zunächst werden dafür in einem geeigneten Banachraum äquivalente Operatorengleichungen mit einem vollstetigen Operator definiert. Das erfordert für die Funktion f die Gültigkeit einer verallgemeinerten Lipschitzbedingung in den letzten beiden Variablen. Mit Hilfe der topologischen Indextheorie folgt dann aus der Existenz zweier Lösungen eines Anfangswertproblems die Existenz kontinuierlich vieler Lösungen.

SCHNEIDER, M.: Anfangswertprobleme bei linearen partiellen Differentialgleichungssystemen erster Ordnung vom gemischten Typ

In $B_o = \{(x,y) \mid x > 0\}$ wird das lineare System

$$(*) \quad \begin{aligned} a^1 u_x + a^2 u_y + b^1 v_x + b^2 v_y + cu + dv + e &= 0 \\ \bar{a}^1 u_x + \bar{a}^2 u_y + \bar{b}^1 v_x + \bar{b}^2 v_y + \bar{c}u + \bar{d}v + \bar{e} &= 0 \end{aligned}$$

betrachtet. Es wird vorausgesetzt, daß $x = 0$ parabolische Kurve von (*) ist und das System hyperbolisch für $x > 0$ ist. Die parabolische Kurve $x = 0$ wird als Anfangskurve k eines Cauchyproblems gewählt. Hierbei kann k Träger der charakteristischen Spitzen, aber auch Einhüllende der Charakteristiken sein. Es wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen Lösungen von (*) existieren und diese die Anfangsvorgaben annehmen.

STUMMEL, F.: Abstrakte elliptische Operatoren

Die Struktur Sobolevscher Funktionenräume und elliptischer Differentialoperatoren läßt sich bis zu einem gewissen Grade abstrakt fassen. Ausgehend von einem prähilbertschen Raum und einem System von Operatoren kann man abstrakte Sobolevsche Räume und Räume von linearen stetigen Funktionalen auf solchen Räumen konstruieren, zusammen mit passenden Normen, Skalarprodukten, Ungleichungen usw. Für diese Räume wird eine Klasse von elliptischen bzw. stark elliptischen Operatoren bzw. Bilinearformen definiert, für die dann Existenz und Eigenschaften von Lösungen eines zugehörigen abstrakten Dirichletproblems gezeigt werden können. Diese Theorie hat mannigfache Anwendungen im Gebiet der partiellen Differential- bzw. Differenzenoperatoren.

WALTER, J.: Zur Symmetrie elliptischer Differentialoperatoren

Sei G ein Gebiet des $\mathbb{R}^n$, $f(x)$ eine reelle Funktion mit $f(x) \to \infty$ $(x \to \partial G)$ und $|\operatorname{grad} f| > 0$ in der Nähe von ∂G, $((a_{jk}(x)))$ eine positiv definite, symmetrische Matrix, $a_{jk}(x) \in C^1(G)$, $b_j(x) \in C^1(G)$, $q(x) \in C^0(G)$,

$$\rho(\lambda) = \operatorname{Max}_{f(x)=\lambda} \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} f_{x_j} f_{x_k}}\,, \qquad D_j = i\frac{\partial}{\partial x_j} + b_j\,,$$

$$Au = \sum_{j,k=1}^{n} D_j a_{jk} D_k u + qu \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \{u \mid u \in C^2(G) \cap L_2(G),\ Au \in L_2(G)\}\,.$$

Dann ist A in $\mathfrak{A}$ symmetrisch

1) für $\int^{\infty} dt/\rho(t) = \infty$, falls $q(x) \geq -a\left(\int_{\text{const.}}^{f(x)} dt/\rho(t)\right)^2 - b \qquad (a > 0,\ b > 0)$;

2) für $\int^{\infty} dt/\rho(t) < \infty$, falls $q(x) \geq \left(\frac{\sigma}{2}\int_{f(x)}^{\infty} dt/\rho(t)\right)^2$, $\qquad (0 < \sigma < 2)$.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

WALTER, W.: Neue Ergebnisse bei Volterra-Integralgleichungen in mehreren Variablen

Es wird ein Gleichungstyp betrachtet, welcher verschiedene Anfangswertprobleme aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen enthält, etwa die klassischen Probleme für die hyperbolische Differentialgleichung $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$. Die Ergebnisse liegen in drei Richtungen:
1. werden die bisher bekannten Existenzsätze verallgemeinert;
2. wird ein Satz bewiesen über den Existenzbereich der Lösungen, wenn der Kern der Integralgleichungen unbeschränkt und deshalb ein Existenzsatz nur im Kleinen gültig ist. Dieser Satz stellt das mehrdimensionale Analogon zu dem bei gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannten Sachverhalt dar, daß sich, wie man kurz sagt, jede Lösung bis zum Rand fortsetzen läßt. Hier ergeben sich gegenüber dem eindimensionalen Fall neue Gesichtspunkte und Schwierigkeiten;
3. wird an einem Beispiel gezeigt, daß schon im einfachsten zweidimensionalen Fall, bei der oben genannten hyperbolischen Differentialgleichung, Maximal- und Minimalintegral im allgemeinen nicht existieren. Dieses Beispiel beweist auch, daß in dieser Frage von verschiedenen Autoren falsche Ergebnisse publiziert worden sind.

WENDLAND, W.: Eine Bemerkung zu Greenschen Funktionen

G im $\mathbb{R}^2$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit stetig gekrümmtem Rand $\dot{G}$ und $\Phi(z)$, $z = x + iy$, die Abbildungsfunktion einer konformen Abbildung von G auf das Innere des Einheitskreises, $\Phi/\dot{G} = e^{i\vartheta(s)}$. Die Greensche Funktion erster Art ist dann bekanntlich

$$G^I(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\Phi(z) - \Phi(\zeta)}{1-\Phi(z)\overline{\Phi(\zeta)}} \right| , \quad z \neq \zeta .$$

Ebenso elementare Darstellungen sind für die Greenschen Funktionen zweiter Art möglich:

a) Die zur Randnorm $\sigma(s) \geq 0$, $S = \oint_{\dot{G}} \sigma \, ds > 0$ gehörende Greensche Funktion

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$G^{II}(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left|(\Phi(z)-\Phi(\zeta))(1-\Phi(z)\overline{\Phi(\zeta)})\right| +$$

$$+\frac{1}{\pi s}\oint_{\dot G}\sigma(s)\ln\left|(e^{i\vartheta(s)}-\Phi(z))(e^{i\vartheta(s)}-\Phi(\zeta))\right| ds -$$

$$-\frac{1}{\pi s^2}\oint_{\dot G}\oint_{\dot G}\sigma(s)\sigma(\hat s)\ln\left|e^{i\vartheta(s)}-e^{i\vartheta(\hat s)}\right| ds d\hat s$$

hat die Eigenschaften $\Delta G^{II} = 0$, $z \neq \zeta$, $d_n G^{II}/\dot G = -\sigma(s)ds/S$, $\oint_{\dot G}\sigma G^{II} ds = 0$.

b) Zur Flächennorm $\tau^2(x,y) \geq 0$, $\iint_G \tau^2 dsdy = T > 0$ gehört mit

$$\hat G_H^{II} = \frac{1}{4\pi}\{|\Phi(z)|^2 + |\Phi(\zeta)|^2\} - \frac{3}{8\pi} - \frac{1}{2\pi}\ln\left|(\Phi(z)-\Phi(\zeta)).(1-\Phi(z)\overline{\Phi(\zeta)})\right|\}$$

die Greensche Funktion

$$G_H^{II} = \hat G_H^{II} - \frac{1}{T}\iint_G \tau^2(\hat x,\hat y)\{\hat G_H^{II}(\hat z, z) + \hat G_H^{II}(\hat z,\zeta)\, d\hat x d\hat y +$$

$$+ T^{-2}\iint_G\{\iint_G \tau^2(\hat x,\hat y)\tau^2(x,y)\, G_H^{II}(\hat z, z)\, d\hat x d\hat y\}\, dxdy$$

mit den Eigenschaften $\Delta G_H^{II} = \frac{1}{T}\tau^2(x,y)$, $z \neq \zeta$, $d_n G_H^{II}/\dot G = 0$,

$\iint_G \tau^2 G_H^{II} dxdy = 0$.

WERNER, P.: Zur mathematischen Theorie elektromagnetischer Wellenfelder

In der Theorie der Außenraumprobleme für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung (skalarer Fall) und für die Maxwellschen Gleichungen (vektorieller Fall) haben sich in den letzten fünf Jahren Methoden durchgesetzt, die es auch für reelle Frequenzen ω erlauben, die Randwertprobleme auf eindeutig lösbare Fredholmsche Integralgleichungen zurückzuführen. Hieraus ergaben sich zahlreiche Abhängigkeitsaussagen für die Lösungen. Zum Beispiel konnte gezeigt werden, daß die Lösung des skalaren Problems eine meromorphe Funktion der Frequenz ω ist, deren sämtliche Polstellen in der Halbebene Im $\omega < 0$ liegen. Ein analoges Ergebnis gilt im vektoriellen Fall; hier jedoch führt die Diskussion des funktionentheoretischen Verhaltens der Lösung für $\omega = 0$ zu zusätzlichen Schwierigkeiten, die durch den Strukturwechsel in der mathematischen Problemstellung bei dem Übergang zu den entsprechenden Randwertaufgaben der Elektrostatik und der Magnetostatik auftreten. Wie in der

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Theorie der harmonischen Vektorfelder erweisen sich topologische Größen, z.B. das Geschlecht der reflektierenden Flächen, als wesentlich. Das Hauptanliegen des Vortrags ist die Diskussion des Grenzübergangs $\omega \to 0$ für Flächen mit beliebigem topologischen Geschlecht.

WITTE, J.: Über die Regularität der Eigenfunktionen und Eigenpakete eines singulären elliptischen Differentialoperators

Es wird das Bestehen der Integralrelation

$$\int_{\mathfrak{G}} \psi(x,\lambda) D_\lambda \Phi(x)\, dx = \int_{\mathfrak{G}} \{\eta(x,\lambda)\Phi(x) + \sum_{j=1}^{n} \eta_j(x,\lambda)\Phi_{x_j}\}\, dx$$

für alle $\Phi \in C_0^\infty(G)$ gefordert, wobei

$$D_\lambda \Phi \equiv \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\Phi_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j \Phi_{x_j} + a(x,\lambda)\Phi$$

ein elliptischer Differentialoperator mit singulärem Potential $a(x,\lambda)$ (z.B. Coulombpotential, Stummelpotential) ist. Es werden Regularitätsaussagen über $\psi(x,\lambda)$ gemacht. Diese Ergebnisse werden dann auf die Eigenfunktionen und Eigenpakete der Abschließung eines wesentlich selbstadjungierten elliptischen Differentialoperators angewandt.

K. Habetha (Berlin)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft