Tagungsbericht

Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

12. bis 18. März 67

Nach knapp einem Jahr fand unter der Leitung von Herrn Professor Dr. H. WITTING, Münster, in Oberwolfach wieder eine Tagung über Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie statt. Die Zahl der Teilnehmer (43, darunter 4 ausländische Gäste) war dieses Mal der Kapazität des Hauses angepaßt und ermöglichte so einen besonders intensiven fachlichen Kontakt auch außerhalb der Vorträge. Die Verminderung der Teilnehmerzahl um ca. ein Drittel gegenüber dem Vorjahr wurde ermöglicht einerseits durch den verhältnismäßig kurzen zeitlichen Abstand zur letzten Tagung, andererseits durch zwei im Verlaufe dieses Sommers stattfindende Spezialtagungen. Dieser letztere Umstand bewirkte auch eine leichte Verschiebung des Schwerpunktes der diesjährigen Tagung in Richtung auf statistische Fragestellungen. In besonders lebhafter Erinnerung wird den Teilnehmern der Vortrag von Dr. Z.D. KOUTSKY, Prag, über den "Einfluß der Musik auf Menschen als statistisches Problem", bleiben, nicht nur deshalb, weil in verblüffender Weise die Anwendungsmöglichkeit statistischer Methoden auf Fragen des Musikerlebnisses aufgezeigt wurde, sondern auch wegen der musikalischen Einführung des Vortragenden durch eine Gesangsdarbietung des Sitzungsleiters.

Teilnehmer:

Bandelow, Ch., Dipl.-Math., Bochum
Bierlein, D., Prof.Dr., Karlsruhe
Bock, H., Dipl.-Math., Freiburg
Böge, W., Dr., Heidelberg
Borges, R., Prof.Dr., Gießen
Corsten, L.C.A., Prof., Wageningen, Holland
Dieter, U., Dr., Karlsruhe
Dietz, K., Dr., Freiburg
Dinges, H., Prof.Dr., Frankfurt
Eberl, W., Dipl.-Math., Düsseldorf

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Eifrig, B., Dipl.-Math., Heidelberg

Fieger, W., Dr., Karlsruhe

Gebhardt, F., Dr., Darmstadt

Georgiou, P., Dr., z.Zt. Erlangen

Hanš, O., Prof.Dr., Prag

Hansen, W., Dr., Erlangen

Heinhold, J., Prof.Dr., München

Hering, F., Dr., Bonn

Heyer, H., Dr., Erlangen

Hultsch, Bonn

Kellerer, H.G., Prof.Dr., Bochum

Klinger, G., Prof.Dr., Düsseldorf

Kinder, H.-P., Dipl.-Math., Münster

Koutsky, Z.D., Dr., Prag

Krengel, U., Dr., Erlangen

Krickeberg, K., Prof.Dr., Heidelberg

Kurotschka, V., Dr., Freiburg

Mammitzsch, V., Dr., München

Morgenstern, D., Prof.Dr., Freiburg

Nölle, G., Dr., Münster

Neuhaus, G., Münster

Opitz, Karlsruhe

Postelnicu, T., Dr., Bukarest

Reetz, D., Bonn

Schmitz, N., Dr., Karlsruhe

Schneeberger, H., Dr., München

Störmer, H., Dr., München

Uhlmann, W., Prof.Dr., Würzburg

v.Waldenfels, W., Dr., Saarbrücken

Walter, E., Prof.Dr., Freiburg

Walk, H., Dr., Stuttgart

Witting, H., Prof.Dr., Münster

Vortragsauszüge:

HEYER, H.: Erschöpftheit und Invarianz beim Vergleich von Experimenten

In Anlehnung an LECAM (AMS 1964) wird das Experiment $\mathfrak{X}$ definiert als Tripel $(X, E, (P_i)_{i \in I})$, wobei X eine beliebige Menge, E ein Banachverband von reellen beschränkten Funktionen auf X mit $1 \in E$ und $(P_i)_{i \in I}$ eine Familie von reellen positiven Linearformen auf E mit $P_i(1) = 1 \quad \forall i \in I$ bedeutet. $\mathfrak{X}$ heißt klassisch, wenn E die Menge der reellen beschränkten bezüglich einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ meßbaren Funktionen auf X ist. Ein klassisches Experiment $\mathfrak{X}$ heißt topologisch, wenn X lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis ist. Seien $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y} = (Y, F, (Q_i)_{i \in I})$ beliebige Experimente mit gleicher Indexmenge I und zugehörigen Verlust- bzw. Risikofunktionen V bzw. R. $\mathfrak{X}$ heißt informativer als $\mathfrak{Y}$ (kurz: $\mathfrak{X} \supset \mathfrak{Y}$), wenn für jede Entscheidungsmenge A (kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^I$) und jede Entscheidungsfunktion g von $\mathfrak{Y}$ eine Entscheidungsfunktion f von $\mathfrak{X}$ existiert mit $R_f \leq R_g$. Sind $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ klassische Experimente mit den zugehörigen σ-Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so heißt $\mathfrak{X}$ erschöpfend für $\mathfrak{Y}$ (kurz $\mathfrak{X} > \mathfrak{Y}$), wenn es einen Markoff-Kern T von $(X, \mathfrak{A})$ nach $(Y, \mathfrak{B})$ gibt mit $TP_i = Q_i \quad \forall i \in I$.

Für klassisches $\mathfrak{X}$ und topologisches $\mathfrak{Y}$ werden Bedingungen für die Äquivalenz der beiden Aussagen $\mathfrak{X} \supset \mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{X} > \mathfrak{Y}$ angegeben. Ferner werden zwei weitere, unter gewissen Voraussetzungen zu $\mathfrak{X} \supset \mathfrak{Y}$ äquivalente Aussagen formuliert.

UHLMANN, W.: Kosten-optimale Stichprobenpläne

Eine Partie von Waren wird genau dann angenommen, wenn die Anzahl der schlechten Stücke in einer Stichprobe vom Umfang n kleiner oder gleich der Annahmezahl c ist. Die Güte des Prüfplanes (n, C) wird anhand der Regretfunktion, d.h. des durchschnittlichen vermeidbaren Verlustes veurteilt. In der normierten Form schreibt sich die Regretfunktion als

$$R_{n,c}(p) = \begin{cases} (p_o - p)(1 - L_{n,c}(p)) + \gamma n & \text{für } o \leq p \leq p_o \\ (p - p_o) L_{n,c}(p) + \gamma n & \text{für } p_o \leq p \leq 1 \end{cases}$$

Dabei bedeuten p der (unbekannte) Ausschußanteil, p_o die Trennqualität ($o < p_o < 1$), $L_{n,c}(p)$ die Operationscharakteristik und $\gamma > o$ die relativen Stichprobenkosten. Näherungslösungen für die Minimax Lösung (n^*, c^*), die Max $R_{n,c}(p)$ zum Minimum macht, stammen von MORIGUTI, URA und van der WAERDEN. Im Vortrag wurde die Gestalt von $R_{n,c}(p)$ diskutiert und im Anschluß daran eine Reihe von Sätzen angegeben, die es ermöglichen, einen kosten-optimalen Prüfplan im Sinne einer exakten Minimax Lösung (n^*, c^*) zu berechnen. Diese Sätze werden demnächst in der Metrika veröffentlicht.

SCHMITZ, N.: Likelihoodquotienten-Sequenztests bei homogenen Markoff-Ketten

Es zeigt sich, daß der Likelihoodquotienten-Sequenztest von A. WALD auch bei Hypothesen über homogene Markoff-Ketten ein brauchbares Testverfahren darstellt, das gegenüber Tests mit festem Stichprobenumfang (im Durchschnitt) erhebliche Einsparungen an Versuchen bewirkt, das aber nicht mehr solche Optimalitätseigenschaften wie bei unabhängigen Versuchswiederholungen besitzt. Aus der Untersuchung von Bayes-Tests bei Hypothesen über homogene Markoff-Ketten ergibt sich, daß man dabei einen beliebigen Test durch einen mindestens gleichguten Sequenztest ersetzen kann, bei dem man an den Abbruchgrenzen noch den jeweiligen Zustand des Systems berücksichtigt.

SCHNEEBERGER, H.: Über eine Verallgemeinerung der Formel von NEYMAN und TSCHUPROW

Das Problem der optimalen Aufteilung eines Stichprobenumfanges n auf vorgegebene Schichten eines eindimensionalen Merkmals (von NEYMAN und TSCHUPROW) läßt sich als nichtlineares Programm formulieren. In dieser Form läßt es sich sofort auf das Problem der optimalen Aufteilung in k Variablen verallgemeinern. Als Zielfunktion wurde hierbei die Determinante der Kovarianzmatrix gewählt. Es wurde die Frage untersucht, unter welchen Bedingungen die Lösung dieses nichtlinearen Programmes eindeutig ist. Nimmt man an, daß die Merkmalswerte in jeder Schicht unkorreliert sind, so ergibt sich als hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung

$$n < \frac{3}{4} \operatorname{Min} \{ N_{ij} \} \quad \text{im Fall von 2 Merkmalen}$$

$$n < \frac{2}{3} \operatorname{Min} \{ N_{ijk} \} \quad \text{im Fall von 3 Merkmalen}$$

für $k \to \infty$

$$n < \frac{1}{2} \operatorname{Min} \{ N_{ij\ldots} \},$$

wobei N_{ij} die Anzahl der Einheiten in der (ij)-ten Schicht der Gesamtheit sind, (entspr. N_{ijk}; $N_{ij}\ldots$).

MORGENSTERN, D.: Zum Hauptsatz der Block-Kodierung

Für die Fehlerwahrscheinlichkeiten beim Alternativproblem unabhängiger Größen $X_1, \ldots, X_n$ mit derselben Verteilung $p_1(i) = P(X_\nu = i) = \frac{1}{a}$ bei $\mathfrak{H}_1$ bzw. $p_2(i) = P(X_\nu = i) = p_i$ bei $\mathfrak{H}_2$ $(i = 1, \ldots, a)$ ergibt sich aus den CHERNOFF (KULLBACK-LEIBLER)-Sätzen, die besagen, daß bei $\alpha_2 := P_1(\mathfrak{H}_2)$ gilt $\alpha_1^{(n)} := P_2(\mathfrak{H}_1) \sim \exp(-n J_{21})$ mit

$$J_{21} := \sum_{i=1}^{a} p_2(i) \log \frac{p_2(i)}{p_1(i)} = -H + \log a,$$

die Anzahl N_n der Wörter der Länge n (bis auf solche der Gesamtwahrscheinlichkeit $< \epsilon$) zu $N_n \sim \exp(nH)$.

Verallgemeinerungsmöglichkeiten durch Verschärfung (zentraler Grenzwertsatz statt Gesetz der großen Zahlen bei Cherhoffschen Sätzen), evtl. Markoff-Ketten.

MAMMITZSCH, V.: Zur Theorie der k-stufigen Tests

Gegeben seien die beschränkten Maße p_i $(i = 1, \ldots, n)$ auf dem σ-Körper $\mathfrak{F}$ über Ω, sowie die σ-Körper $\mathfrak{F}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_k \subset \mathfrak{F}$ und die Schadensbereiche $S_t(\omega) \subset R^n$ für alle $\omega \in \Omega$ und $t = 1, \ldots, k$. Dann wird ein k-stufiger Test definiert durch eine Zerlegung $\Omega = F_1 \cup \ldots \cup F_k$, $F_t \in \mathfrak{F}_t$, F_t disjunkt, und Abbildungen $F_t \ni \omega \to s_t(\omega) \in S_t(\omega)$ $(t = 1, \ldots, k)$, wobei die $s_t(\omega)$ auf F_t $\mathfrak{F}_f$-meßbar seien. Die Menge R aller Risikovektoren $r = \sum_t \int_{F_t} s_t \circ d\vec{p}$ heiße Risikobereich. Unter einer zusätzlichen Meßbarkeits- und Integrabilitätsbedingung bezüglich der Stützfunktionen der $S_t(\omega)$ gilt:

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

(1) Sind alle S_t eckenabgeschlossen, so ist R eckenabgeschlossen.

(2) Sind alle S_t konvex, so ist im Fall $k = 1$ R konvex;
im Fall $k > 1$ R nicht notwendig konvex.

(3) Sind alle S_t abgeschlossen, so ist R abgeschlossen.

(4) Sind alle S_t offen, so ist R nicht notwendig offen.

BORGES, R.: <u>Mehrstufige Stichprobenverfahren</u>

In der Versuchsplanung tritt das Problem auf, daß prinzipiell endlich viele zufällige Größen y_i mit $i = 1, \dots, b$ gemessen werden können, aber festzulegen ist, ob und wieviele davon in der ersten, zweiten bis k-ten Stufe eines Experimentes gemessen werden sollen. Dies Problem ist in folgendem Modell enthalten, das ein Modell von RICHTER (1963) (siehe auch den Vortrag von Mammitzsch) verallgemeinert. Es seien $\mathfrak{F}_i$ mit $i = 1, \dots, a$ (im obigen Beispiel je nach Auffassung $a = b+1$ oder $a = 2^b$) σ-Körper mit $\mathfrak{F}_o = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{F}$ für alle i. Wir setzen $I_k := \{0\} + \bigcup_{\ell=1}^{k} \{(1, i_1, \dots, i_l) : \mathfrak{F}_o \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{F}_{i_\ell}\}$. Ferner sei N_k die Menge aller Funktionen $\nu : \Omega \to N_k$ mit folgenden Eigenschaften: $\nu(\omega) = 0$ für ein ω impliziert $\nu | \Omega = 0$. Ist $\nu(\omega) = (\lambda(\omega), \nu_1(\omega), \dots, \nu_{\lambda(\omega)}(\omega)) \neq 0$ so ist $\nu_1 | \Omega$ konstant und $\nu_i | \{\omega : \lambda(\omega) \geq i\}$ eine $\mathfrak{F}_{\nu_{i-1}}$-meßbare Funktion. (Im obigen Beispiel gibt also ν an, welche und wieviele zufällige Größen den σ-Körpern $\mathfrak{F}_{\nu_1}(\omega), \dots, \mathfrak{F}_{\nu_{\lambda(\omega)}}(\omega)$ gemessen werden.) Ist $P | \mathfrak{F}$ eine Wahrscheinlichkeit und $g | I_k \times \Omega$ eine q-dimensionale reelle integrable Funktion mit der Eigenschaft, daß $g(1, i_1, \dots, i_l, \omega)$ $\mathfrak{F}_{i_\ell}$-meßbar ist für alle l, so gibt es ein $\mu \in N_k$ mit

$$\int g(\mu(\omega), \omega)\, P(d\omega) \leq \int g(\nu(\omega), \omega)\, P(d\omega) \quad \text{für alle } \nu \in N_k .$$

KUROTSCHKA, V.: <u>Optimale Versuchspläne bei zweifach klassifizierten Modellen</u>

Für ein zweifach klassifiziertes Modell der Form

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + Z_{ijk} \quad \left(\begin{matrix} i = 1, \dots, N \\ j = 1, \dots, M \end{matrix} \quad k = 1, \dots, n_{ij} \right)$$

lassen sich Systeme $\{n_{ij}\}$ bei Vorgabe von Beobachtungsbeschränkungen $\{n_{i.}\}$ und $\{n_{.j}\}$ oder nur eines der beiden oder nur durch Vorgabe von $n := n_{..}$ als Versuchspläne definieren.

Für solche Versuchspläne lassen sich praktisch sinnvolle Optimalitätskriterien formulieren (D-Optimalität und UMP-Eigenschaften). Es zeigt sich, daß alle betrachteten Optimalitätskriterien untereinander äquivalent sind und nur von Versuchsplänen

$$\{n_{ij} = \frac{n_{i.} \, n_{.j}}{n}\}, \{n_{ij} = \frac{n_{i.}}{M}\}, \{n_{ij} = \frac{n_{.j}}{N}\} \text{ bzw. } \{n_{ij} = \frac{n}{N.M}\}$$

erfüllt werden.

Diese zu den jeweils vorgegebenen Beobachtungsbeschränkungen eindeutig bestimmten "optimalen" Versuchspläne gestatten bekanntlich eine besonders einfache Durchführung der Varianzanalyse.

KOUTSKY, Z.: Einfluß der Musik auf Menschen als statistisches Problem

Da diese Arbeit als soziologischen und psychologischen Hintergrund die Arbeiten des amerikanischen Philosophen Charles MOVIS hat, wurden zuerst einige Begriffe der allgemeinen Zeichentheorie (z.B. der Begriff des ikonischen Zeichens) erklärt. Der Mensch ist von früher Kindheit ein Mitglied verschiedener kleiner Gruppen und ist von diesen abhängig. Er bildet gewisse Zusammenhänge zu dieser Gruppe (und umgekehrt), die als zwischenmenschliche Tendenzen bezeichnet werden können (z.B. Dominanz, Assertivität, Agressivität, Affilianz usw.). Die Hypothese: Ein wichtiger Teil des musikalischen Erlebnisses ist eine fiktive Bewegung in einem interpersonellen Felde - die Teilnahme eines Individuums am Geschehen in einer generalisierten Gruppe. Zum Überprüfen dieser Hypothese mit statistischen Methoden kann man diese ein wenig genauer formulieren. Musik bezeichnet interpersonelle Tendenzen, die durch unabhängige Richter identifiziert werden und zwar mit einer besseren Übereinstimmung als es dem Zufall entspricht. Wir bezeichnen mit ξ_{ijk} die Beurteilung der k-ten Tendenz des j-ten Stückes durch den i-ten Richter. Mittels einiger Versuche mit verschiedenenen Menschen (die Anzahl der Menschen betrug in zwei Fällen drei, in dem dritten 55, und ihnen wurden 17-24 Stücke - klassische Musik - Beethoven, Paganini, Dvorák, Haydn - vorgespielt) haben wir Daten gesammelt, die durch statistische Tests geprüft worden sind. Man kann u.a. beweisen: statistisch signifikante Korrelation zwischen einzelnen Richtern, statistisch signifikante Abweichung der Verteilungsfunktion von

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$\max_{i_1, i_2} |\xi_{i_1 jk} - \xi_{i_2 jk}|$ von der theoretischen Verteilungsfunktion, so daß die Übereinstimmung größer ist, als es dem Zufall entspricht.

GEBHARDT, F.: Ähnlichkeit von Faktormatrizen

Die Ähnlichkeit zwischen zwei Faktormatrizen A und B (n Zeilen, k Spalten, $k < n$) ist definiert als die maximale formale Korrelation zwischen den Elementen A und BL (L orthogonal):

$$Q = \max_L \operatorname{tr}(A'BL) \cdot [\operatorname{tr}(A'A) \cdot \operatorname{tr}(B'B)]^{-1/2}.$$

Um herauszufinden, wie groß Q rein durch Zufall wird, werden Matrizen A und B mit unabhängigen, normalverteilten Elementen betrachtet; man erhält $E(Q) \geq k/2n$ und $E(Q) \leq k\sqrt{nk}/(nk - 1/2) \approx \sqrt{k/n}$.

Aus Monte Carlo-Experimenten findet man im Bereich $4 \leq k \leq 15$, $5 \leq n/k \leq 10$: $E(Q) \approx 0,84 \sqrt{(k-0,4)/n}$, $\operatorname{var}(Q) \approx 0,35/nk$. Für die Größe des Ähnlichkeitskoeffizienten aus Stichproben-Faktormatrizen bei identischen Populations-Faktormatrizen werden Beispiele gegeben.

DIETZ, K.: Einige spezielle Wettbewerbsprozesse

Es werden zwei Beispiele von zwei dimensionalen Geburts- und Todesprozessen behandelt, die durch ihre Übergangsintensitäten $q_{(m,n)(r,s)}$ wie folgt definiert sind:

1. $q_{(m,n)(m+1,n)} = \alpha mn$, $q_{(m,n)(m,n+1)} = \beta n$, $q_{(m,n)(m,n)} = -(\alpha mn + \beta n)$

2. $q_{(m,n)(m+1,n)} = \alpha mn$, $q_{(m,n)(m-1,n)} = \beta m$, $q_{(m,n)(m,n-1)} = \gamma n$,

   $q_{(m,n)(m,n)} = -(\alpha mn + \beta m + \gamma n)$.

Für das 1. Beispiel wird eine explizite Lösung der Vorwärtsgleichungen hergeleitet und deren Eindeutigkeit bewiesen. Der Erwartungswert der ersten Komponente ist größer als die Lösung des deterministischen Analogons und wird für endliche Zeit unendlich.

Für das 2. Beispiel wird gezeigt, daß Absorption im Zustand $(0,0)$ mit Wahrscheinlichkeit 1 erfolgt. Trotzdem kann für spezielle Parameterwerte der Erwartungswert der ersten Komponente gegen Unendlich streben, während die entsprechende deterministische Lösung immer gegen Null strebt.

Gefördert durch
DFG Deutsche
Forschungsgemeinschaft

STÖRMER, H.: Zur Überlagerung alternierender Erneuerungsprozesse

Es seien N alternierende Erneuerungsprozesse (Teilsysteme) $z_n(t)$ $(n = 1, \ldots, N)$ mit den Zuständen 1 (funktionsfähig) und 0 (nicht funktionsfähig) gegeben. Es sei $z_n(0) = 1$ für $n = 1, \ldots, N$. Die Dauern der Zustände 1 (Lebensdauern) genügen den Verteilungsfunktionen $F^{(n)}(x) = 1 - e^{-\lambda_n x}$, $n = 1, \ldots, N$ $(F^{(n)}(x) = 0$ für $x < 0)$. Die Dauern der Zustände 0 (Reparaturzeiten) genügen den Verteilungsfunktionen $G^{(n)}(x)$, $n = 1, \ldots, N$. Es sei $\Pi(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{n=1}^{N} z_n$ und $\Phi(z_1, \ldots, z_N)$ eine in den Booleschen Variablen $z_1, \ldots, z_n$ monoton nicht abnehmende Boolesche Funktion mit $\Phi(1, \ldots, 1) = 1$ und $\Phi(0, \ldots, 0) = 0$. Der Zustand des Gesamtsystems wird dann durch den Prozeß $\Phi(t) = \Phi(z_1(t), \ldots, z_N(t))$ beschrieben. Als Lebensdauer T des Systems definieren wir $T := \min\{t;\ \Phi(t) = 0\}$ und als reparaturfreie Gesamtzeit T' $T' := \int_0^T \Pi(t)dt$. Dann gilt:

1. $P\{T \leq x\} = \sum_{n=1}^{\infty} E^{(k)}(x) * Q^{*(k-1)}(x) * P(x)$;

2. $P\{T' \leq x\} = 1 - e^{-\lambda Px}$

mit $\lambda = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n E^{(k)}(x) = 1 - e^{-\lambda x}(1 + \lambda x \ldots \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!})$.

Die Funktion $P(x)$ ist zu deuten als Wahrscheinlichkeit, daß das Gesamtsystem nach Ausfall eines Teilsystems innerhalb der Zeit x ausfällt, ohne daß vorher der Zustand $\Pi(t) = 1$ eintritt. Die Größe P ist definiert durch $P = \lim_{x \to \infty} P(x)$. Die Funktion $Q(x)$ ist zu deuten als Wahrscheinlichkeit, daß nach Ausfall eines Teilsystems innerhalb der Zeit x der Zustand $\Pi(t) = 1$ eintritt, ohne daß vorher der Zustand $\Phi(t) = 0$ eintritt.

NÖLLE, G.: Produktmeßbarkeit von Dichten und verwandte Fragen

Gegeben seien meßbare Räume $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{T}, \vartheta)$ sowie Abbildungen $\varphi: \mathfrak{B} \times \mathfrak{T} \to \mathbb{R}_1$ und $\mu: \mathfrak{B} \times \mathfrak{T} \to \mathbb{R}_1$ mit den Eigenschaften

$\varphi(B, .)$ und $\mu(B, .)$ sind ϑ-meßbare Funktionen für jedes $B \in \mathfrak{B}$

$\varphi(., t)$ ist eine endliche, σ-additive Mengenfunktion für jedes $t \in \mathfrak{T}$

$\mu(., t)$ ist ein endliches Maß für jedes $t \in \mathfrak{T}$.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

Unter der Annahme $\varphi(\,.\,,t) \ll \mu(\,.\,,t)$ existieren dann Dichten $\frac{d\varphi(.,t)}{d\mu(.,t)}$. Ist $\mathfrak{B}$ separabel, so existiert eine $\mathfrak{B} \times \vartheta$-meßbare Funktion $f\,|\,\mathfrak{X}\times\mathfrak{T}$ mit $f(.,t) = \frac{d\varphi(.,t)}{d\mu(.,t)}\,[\mu(.,t)]$ für alle $t \in \mathfrak{T}$ (Beweis mit Hilfe von Martingalsätzen). Beispiele zeigen, daß diese Aussage ohne die Voraussetzung "$\mathfrak{B}$ separabel" nicht gilt.

Als Folgerung erhält man den Satz: Ist $\mathfrak{B}$ separabel, $\mathfrak{T}$ ein topologischer Raum und ϑ dessen Borelkörper, und ist $\{Y(.,t) : t \in \mathfrak{T}\}$ ein stochastisch stetiger Zufallsprozeß über $(\mathfrak{X},\mathfrak{B},\mu)$, so existiert eine $\mathfrak{B} \times \vartheta$-meßbare Standardmodifikation von $Y(.,t)$. Mit Hilfe von Sätzen von Helms (1958) und Krickeberg-Pauc (1963) kann man zeigen, daß diese Aussage auch für inseparables $\mathfrak{B}$ gilt, falls $\mathfrak{T}$ ein σ-kompakter topologischer Raum oder ein Lindelöf-Raum ist.

WALDENFELS, W.v.: Fouriertransformation straffer Maße

Von dem angeschnittenen Problem wurde nur ein kleiner Sektor bewiesen. Sei X ein lokalkompakter, im Unendlichen abzählbarer Raum, sei $\mathfrak{C}_*(X,\mathbb{R})$ die Menge aller reellwertigen stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, sei $\mathfrak{M}(X)$ der Raum der Radonmaße versehen mit der schwachen Topologie über $\mathfrak{C}_*(X,\mathbb{R})$, sei $\mathfrak{M}_+(X)$ der darin enthaltene Kegel der Maße ≥ 0. Die Fouriertransformierte eines straffen Maßes P auf $\mathfrak{M}(X)$ ist die Funktion

$$\varphi \in \mathfrak{C}_*(X,\mathbb{R}) \to \langle P(\mu),\ \exp i\,\langle\mu,\varphi\rangle\rangle;$$

sie ist stetig, beschränkt und bestimmt P eindeutig. Für straffe, positive Maße auf $\mathfrak{M}^+(X)$ gelten die Sätze von BOCHNER und LEVY:

Sei $\varphi \in \mathfrak{C}_*(X,\mathbb{C})$, $\operatorname{Im}\varphi \geq 0 \to F(\varphi) \in \mathbb{C}$ eine Funktion mit den Eigenschaften

(i) $\varphi \in \mathfrak{C}_*(X,\mathbb{R}) \to F(\varphi)$ ist positiv definit

(ii) $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda \geq 0 \to F(\lambda\varphi)$ ist für jedes positive $\varphi \in \mathfrak{C}_*(X,\mathbb{R})$ stetig und im Inneren der oberen Halbebene holomorph und beschränkt.

Dann ist F Fouriertransformierte eines positiven, straffen Maßes P auf $\mathfrak{M}_+(X)$ und $F(\varphi) = \langle P(\mu),\ \exp i\,\langle\mu,\varphi\rangle\rangle$.

Sei P_α eine Familie straffer Maße auf $\mathfrak{M}_+(X)$ und sei $\lambda \in \mathbb{R} \to P_\alpha(\lambda\varphi)$, gleichgradig stetig im Nullpunkt für festes $\varphi \geq 0$. Dann ist die Familie P_α gleichmäßig straff.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

WALK, H.: Randverhalten zufälliger Potenzreihen

Es werden zufällige Potenzreihen mit i.a. unabhängigen Koeffizienten a_n behandelt. Auf Grund von Zusammenhängen zwischen symmetrisierten zufälligen Potenzreihen und am Median zentrierten zufälligen Potenzreihen ergibt sich die Äquivalenz der wesentlichen Konvergenz von Σa_n mit der fast sicheren Konvergenz von $\sum_n |a_n - \mu a_n|^2$. Der Bereich der wesentlichen Konvergenz von $\sum_n a_n z^n$ erweist sich somit als eine offene oder abgeschlossene Kreisscheibe. Für die Sektoren ihres f.s. Konvergenzkreises zeigen zufällige Potenzreihen mit ursprungssymmetrisch verteilten Koeffizienten in vielem f.s. ein gleichartiges Randverhalten. Mit diesen Feststellungen erhält man für verschiedene reguläre oder singuläre Verhaltensweisen notwendige und hinreichende Bedingungen im Zusammenhang mit der wesentlichen Konvergenz und wesentlichen Divergenz.

BIERLEIN, D.: Komposition von Spielen

(P, Q, a) wird als eine gemischte Erweiterung des 2 Personen-Nullsummenspiels (X, Y, a) bezeichnet, wenn $P \supset X$, $Q \supset Y$ und eine Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Für abzählbares X werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Definitheit von (P, Q, a) angegeben. Ausgehend von der Klasse $\mathfrak{T}_o$ der Spiele in definiter Randomisierung (P, Q, a) wird durch "Komposition" stufenweise eine Hierarchie von Klassen $\mathfrak{T}_k$ von Spielen aufgebaut, die minimal indefinit sind in dem Sinn, daß durch eine weitergehende Randomisierung der Strategiesysteme das Indefinitheitsintervall nicht mehr verkleinert werden kann. Bereits $\mathfrak{T}_1$ umfaßt die diskreten gemischten Erweiterungen sämtlicher Spiele mit abzählbarem X und Y und darüber hinaus eine durch ein geometrisches Kriterium in $\mathbb{R}^\omega$ charakterisierte Klasse von Spielen mit abzählbarem X und beliebigem Y. Andererseits lassen sich einfache Beispiele von minimal indefiniten "Überholspielen" angeben, die außerhalb $\cup \mathfrak{T}_k$ bleiben. Dadurch wird die Bildung einer zweiten Kompositionsfolge $\mathfrak{S}_k : k \in \mathbb{N}$ von Klassen minimal indefiniter Spiele nahegelegt, bei der man mit der Klasse der "fast-definit" komponierbaren Spiele als $\mathfrak{S}_1$ startet. $\mathfrak{S}_1$ ist identisch mit der Klasse der Überholspiele mit dem Indefinitheitsintervall als Überholintervall, die sich

verhältnismäßig leicht auf Grund eines suggestiven Kriteriums erkennen lassen. Über den Zusammenhang zwischen den beiden Folgen ergibt sich sofort $\mathfrak{T}_k \subset \mathfrak{S}_k$ $\forall k$, jedoch gilt nicht $\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{S}_1$, wie ein Beispiel zeigt.

KRENGEL, U.: Über Markoff-Schiebungen und das ergodentheoretische Isomorphie-Problem

Während nicht bekannt ist, ob zwei ergodische Transformationen (maßtreu) in normierten Maßräumen existieren, die nicht isomorph sind, obwohl sie spektral isomorph sind und die gleiche Entropie haben, kann man kontinuierlich viele ergodische konservative Transformationen in unendlichen Maßräumen angeben, die nicht-isomorph sind, obwohl sie nicht nur bzgl. ihres Spektrums sondern auch in ihrer Entropie, dem ergodischen Index und α-Typ übereinstimmen. Für dissipative Transformationen und Strömungen läßt sich das Isomorphieproblem nun vollständig lösen. Für Transformationen in normierten Maßräumen kann man mit unseren Methoden nur zeigen, daß unter den Markoff-Schiebungen zu zweipunktigem Zustandsraum noch kontinuierlich viele mit gleicher Entropie (u. Spektrum) existieren, die nicht stetig isomorph sind.

HANS, O.: Some remarks on correlation

Let X and Z be two real-valued random variables with finite variances and let us denote by $\mathfrak{T}$ the set of all random transformations of $\Omega \times R$ into R so that Z and $T(.,X(.))$ are conditionally independent given X. Let us denote by $T_o \in \mathfrak{T}_o \subset \mathfrak{T}$ such a random transformation that $e(T_o) \leq e(T)$ for all $T \in \mathfrak{T}_o$, where $e(T) = \mathfrak{E}[Z - T(.,X(.))]^2$.

If $\mathfrak{T}_o = \mathfrak{T} \cap \{T: T(.,X(.))$ independent of $Y\}$ then $T_o = \mathfrak{E}(Z)$ and $e(T_o) = \mathfrak{D}(Z)$.
If $\mathfrak{T}_o = \mathfrak{T} \cap \{T: T$ is linear in $X\}$ then

$$T_o = [\mathfrak{E}(XZ) - \mathfrak{E}(X) \cdot \mathfrak{E}(Z)] \cdot [\mathfrak{D}(X)]^{-1} \cdot [X - \mathfrak{E}(X)] + \mathfrak{E}(Z) = \mathfrak{L}^X(Z)$$

and $$e(T_o) = \mathfrak{D}(Z) - [\mathfrak{E}(XZ) - \mathfrak{E}(X) \cdot \mathfrak{E}(X)]^2 \cdot [\mathfrak{D}(X)]^{-1}.$$

If $\mathfrak{T}_o = \mathfrak{T}$ then $T_o = \mathfrak{E}^X(Z)$ and $e(T_o) = \mathfrak{D}(Z) - \mathfrak{D}[\mathfrak{E}^X(Z)]$.

Thus, with respect to X, it es possible to split the variance of Z into three parts

$$\mathfrak{D}(Z) = \mathfrak{D}[Z - \mathfrak{E}^X(Z)] + \mathfrak{D}[\mathfrak{E}^X(Z) - \mathfrak{L}^X(Z)] + \mathfrak{D}[\mathfrak{L}^X(Z)]$$

which can be called unavoidable, properly non-linear, and linear, respectively. The correlation ratio $\eta_{Z/X}$ of Z on X fulfils the relation

$$\frac{\mathfrak{D}(\mathfrak{E}^X(Z))}{\mathfrak{D}(Z)} = \eta^2_{Z/X} .$$

In the lecture some trivial properties of the correlation ratio, and the method of computing the sample correlation ratio in the case of monotone regression, have been given.

FIEGER, W.: Einige Bemerkungen über die Nullniveaukreuzungspunkte eines Gaußschen Prozesses

Ist x(t) ein über dem Zeitintervall [o, 1] erklärter reeller stationärer Gaußscher Prozeß mit Ex(t) = o und var x(t) = 1, so existiert der Erwartungswert der Anzahl der Nullniveaukreuzungspunkte von x(t) genau dann, wenn für das zu x(t) gehörende Spektralmaß dF $\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 dF < \infty$ gilt. Ausgehend von dieser Beziehung kann man zeigen, daß der Erwartungswert der Anzahl der lokalen Minimal- und Maximalpunkte von x(t) genau dann existiert, wenn $\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^4 dF < \infty$ gilt.

Ist x(t) ein nicht notwendig stationärer Gaußscher Prozeß mit der Kovarianzfunktion $r(t_1, t_2)$, Ex(t) = o und var x(t) = 1, und ist $\gamma(t)$ eine über [o, 1] definierte reelle beschränkte Funktion, so existiert der Erwartungswert der Anzahl der Schnittpunkte von x(t) und $\gamma(t)$ genau dann, wenn $\gamma(t)$ über [o, 1] von beschränkter Schwankung ist und das Burkill-Unterteilungsintegral $\int_0^1 \sqrt{1-r(t,t')}$ existiert; unter Benutzung eines Satzes über B-Integrale kann man diesen Erwartungswert als Lebesgue-Stieltjes-Integral darstellen.

KRICKEBERG, K.: Isomorphismen topologischer Maßräume und Mischungen Markoffscher Ketten

Ein Homomorphismus eines topologischen Maßraumes in einen anderen werde als maßtreue fast überall stetige Abbildung definiert, sinngemäß ein Isomorphismus. BÖGE, PAPANGELOU und der Vortragende bewiesen, daß ein topologischer Maßraum (X, $\mathfrak{O}$, μ) mit abzählbarer Basis (der Topologie) und lokalendlichem μ dann und nur dann einem

Raum $(R, \mathfrak{B}, \nu)$, wobei ν ein Radonsches Maß auf dem System $\mathfrak{B}$ der Borelschen Mengen der Zahlengeraden R bedeute, isomorph ist, wenn X einen polnischen Teilraum P mit $\mu(X-P) = 0$ enthält. Zugleich läßt sich ν in eine gewisse Normalform bringen. Zur Konstruktion von Mischungen im Sinne des Vortragenden (Proc. 5th Berkeley Symposium) im Falle $\mu(X) = \infty$ genügt es daher, den Raum $(R, \mathfrak{B}, \lambda)$ mit dem Lebesgueschen Maß λ zu betrachten. Dort sei φ die Menge der meßbaren Transformationen, versehen mit der schwachen Topologie (starken Operatortopologie), M die Menge der Mischungen, $M_o((\rho_n))$ die Menge der umkehrbaren Mischungen mit der Verdünnungsgeschwindigkeit $(\rho_n)_{n=1,2,\ldots}$, d.h. $\lim_{n\to\infty} \rho_n \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B)$ für alle quadrierbaren Mengen A und B. Dann ist zunächst M von erster Kategorie in φ. Andererseits gilt: Ist $M_o((\rho_n))$ nicht leer, so ist es schwach dicht in φ. Beispiele nicht leerer Klassen $M_o((\rho_n))$ erhält man nun wieder, indem man Verschiebungen im Raum der Trajektorien von Markoffschen Ketten mit diskreter Zeit und stationärem Anfangsmaß nimmt, die die individuelle (starke) Grenzwerteigenschaft im Sinne von OREY (strong ratio limit property) haben, und die zugehörigen Maßräume isomorph auf $(R, \mathfrak{B}, \lambda)$ abbilden. Auf diese Weise ergeben sich dichte Klassen $M_o((\rho_n))$ mit langsam oder schnell wachsendem (ρ_n) oder mit vorgegebenem ergodischen Index.

HANSEN, W.: Konstruktion von Halbgruppen und Markoffschen Prozessen

Der Satz von HUNT über die Existenz von Halbgruppen zu im Unendlichen verschwindenden Kernen und der zugehörige Existenzsatz von Markoffschen Prozessen ist für die Einordnung der axiomatischen Potentialtheorie in die Theorie der Markoffschen Prozesse nicht geeignet. Der Grund dafür ist, daß sich im Unendlichen verschwindende Kerne im allgemeinen nur auf regulären Mengen konstruieren lassen.

Daher wird eine Erweiterung jener Sätze gegeben, die nicht voraussetzt, daß die Kerne im Unendlichen verschwinden. Für die Konstruktion der zugehörigen Huntschen Prozesse ist dabei entscheidend die Existenz zweier λ-supermedianer Funktionen p, q mit den Eigenschaften: Sie sind endlich, p ist streng positiv, und für alle $\alpha > 0$ und $\beta < +\infty$ ist $[p \geq \alpha] \cap [q \leq \beta]$ relativ-kompakt. Dadurch wird nämlich grob gespro-

chen, die Relativ-Kompaktheit der Pfade einer zugehörigen Familie von stochastischen Prozessen garantiert, so daß Regularitätsuntersuchungen nur lokal durchgeführt werden brauchen.

Bei der Anwendung auf die Potentialtheorie ist ein vollständiger Ersatz für das Verschwinden im Unendlichen die folgende Eigenschaft von stetigen Potentialen p: Das Infimum aller stetigen Potentiale, die unterhalb von p liegen, aber außerhalb einer kompakten Menge mit p übereinstimmen, ist gleich Null.

Es ergibt sich das Resultat: Sei X ein streng harmonischer Raum im Sinne der Axiomatik von H. BAUER, in dem die positiven Konstanten superharmonisch sind. Dann existiert ein Huntscher Prozeß auf X mit stetigen Pfaden, dessen exzessive Funktionen gerade die positiven hyperharmonischen Funktionen sind. (Für Einzelheiten s. inventiones mathematicae 67).

DIETER, U.: Anwendungen unendlicher Optimierungsaufgaben in der Spieltheorie

Es seien X und Z reelle lokalkonvexe topologische Vektorräume, X^* und Z^* ihre Dualräume, X und Z seien durch Kegel K_x bzw. K_z teilweise geordnet. Ihre dualen Kegel K_x^* bzw. K_z^* induzieren eine teilweise Ordnung von X^* und Z^*. Als Paar dualer Optimierungsaufgaben bezeichnet man die Aufgaben

$$\text{Bestimme } \sup\{x_o^* x \mid x \geq 0, \quad Tx \leq z_o\}$$
$$\text{Bestimme } \inf\{z^* z_o \mid z^* \geq 0, \quad T^* z^* \leq x_o\}.$$

Dabei sind x_o^*, z_o feste Elemente, T ein stetiger linearer Operator von X in Z. Verknüpft sind beide Aufgaben durch die Dualitätsaussagen:

Besitzen beide Aufgaben zulässige Lösungen und gibt es ein x mit $z_o - Tx \in K_z$ oder ist die Menge $\{(y^* + z^* z_o, T^* z^* - x^*) \in R \times X^* \mid y \geq 0, x^* \geq 0, z^* \geq 0\}$ abgeschlossen bezüglich der schwachen* Topologie von X^*, so ist $\sup x_o^* x = \inf z^* z_o$.

Man definiert nun ein 2-Personen-Spiel in einem topologischen Vektorraum folgendermaßen:

Spieler I wählt $x \in X$ mit $x \geq 0$ und $x_o^* x = 1$

Spieler II wählt $z^* \in Z^*$ mit $z^* \geq 0$ und $z_o z^* = 1$.

Die Auszahlung beträgt für I: $z^* Tx$, für II: $-z^* Tx$. Ein solches Spiel entspricht dann dem oben angegebenen Paar dualer Aufgaben. Die Dualitätsaussagen geben Fälle, in denen $\sup_x \inf_{z^*} z^* Tx = \inf_{z^*} \sup_x z^* Tx$ gilt. Spezialisiert man die Räume X bzw. Z, so erhält man die verschiedenen Ergebnisse von VILLE, KARLIN, GLICKSBERG für einzelne Klassen von Spielen.

CORSTEN, L.C.A.: Ein Test für die Differenz zwischen zwei Korrelationskoeffizienten

Seien $(x_1, x_2, x_3) = x'$ drei Merkmale mit einer 3-dimensionalen Normalverteilung mit unbekannten Erwartungswerten und unbekannter Kovarianzmatrix. Wir suchen einen Test für die Nullhypothese $H_o: e_{12} = e_{13}$ gegen: $e_{12} \neq e_{13}$, während n unabhängige Stichproben von x zur Verfügung stehen. Man konstruiert dazu einen Likalihoodquotiententest; die entsprechende Testvariable z hat unter H_o asymtotisch eine χ^2-Verteilung mit einem Freiheitsgrad. Die Variable z ist $n(\Omega^L - \omega^L)$; darin ist $L = \ln|C^{-1}| - tr(AC^{-1})$, C die unbekannte Kovarianzmatrix, A die Stichprobenkovarianzmatrix, Ω^L das unbedingte Maximum von L bzgl. C, und ω^L das Maximum von L bzgl. C unter H_o. Für Ω^L folgt C = A. Zur Bestimmung von L wird C mit Hilfe eines Modells aus der Faktoranalyse dargestellt:

$C = 11' + V$, wo $1'$ ein Vektor $(1_1, 1_2, 1_3)$ ist und V eine Diagonalmatrix mit Elementen v_1, v_2, v_3. Nun gilt: $e_{12} = e_{13} \Longleftrightarrow 1^*_1 = 1^*_2$, wo $1^* = V^{-1/2}1$.

Die Gleichungen, die aus den partiellen Ableitungen nach den 5 unbekannten Parametern entstehen:

$$R(V^{-1/2}AV^{-1/2}1^* - V^{-1/2}CV^{-1/2}1^*) = 0 \quad \text{mit} \quad R = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{diag}(V^{+1/2} - AC^{-1}V^{1/2}) = 0$$

können durch ein Iterationsverfahren bezüglich V, das dem bei der Faktoranalyse üblichen etwas ähnlich ist, gelöst werden. Es folgt:

$$z = n[\ln(\lambda+1) - \sum_{j=1}^{3} \ln \lambda_j^*],$$ wo λ der einzige Eigenwert $\neq 0$ von ${}^{-\frac{1}{2}}V^{-\frac{1}{2}}R(V^{-1/2}AV^{-1/2} - I)R$ ist und λ_j^* $(j = 1, 2, 3)$ die Eigenwerte von $V^{-\frac{1}{2}}AV^{-\frac{1}{2}}$ darstellen. Die Behandlung dieses Problems von HOTELLING (AMS 1940) ist (sogar asymptotisch) fehlerhaft.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft