Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 5/67

Unerreichbare Kardinalzahlen

27. März bis 3. April 1967

Die Tagung fand unter Leitung von Prof. G.H. Müller (Heidelberg) statt. Dank der vorbildlichen Betreuung seitens des Oberwolfacher Instituts konnten sich auch diesmal die Teilnehmer dem Arbeitsthema voll widmen. Die Teilnehmer aus der Bundesrepublik freuten sich sehr, bei dieser Gelegenheit eine Reihe von englischen Logikern zu begrüßen. Viele der Anwesenden nahmen auch an dem nachfolgenden Kolloquium über Mathematische Logik und Grundlagen der Wissenschaften teil.

Ziel der Tagung war, über die in den letzten Jahren vor allem in den USA untersuchten Erweiterungen des schon klassisch gewordenen Zermelo-Fraenkelschen bzw. von-Neumann-Bernaysschen Axiomensystem der Mengenlehre zu berichten. In diesem Zusammenhang war es eine besondere Freude, daß Herr Prof. Bernays (Zürich) an der Tagung teilnahm.

Die Teilnehmer sind Herrn Dr. R.B. Jensen (Bonn) sehr zu Dank verpflichtet dafür, daß er (wie übrigens schon im April 1965) den Hauptteil der Vorlesungen übernahm und den Teilnehmern vorher ein umfangreiches Arbeitsmanuskript zur Verfügung stellte. Die Tagung wäre in dieser Form ohne ihn nicht denkbar gewesen. In dem Manuskript sind insbesondere die Ergebnisse über meßbare und Ramsaysche Kardinalzahlen (mit Beweisen) enthalten; es soll zur Grundlage von "lecture notes" dienen. In zwei zusätzlichen Vorträgen gab Herr Koppelberg (Köln) Ergänzungen zu den Hauptvorträgen.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer:

Bernays, P., Zürich/Schweiz	Mathias, A.R.D., Cambridge/Engl.
Crossley, J.N., Oxford/England	Müller, G.H., Heidelberg
Derrick, J., Leeds/England	Oberschelp, A., Hannover
Diener, K.H., Köln	Oberschelp, W., Hannover
Drake, F., Leeds/England	Peters, K., Heidelberg
Felgner, U., Frankfurt	Pfeiffer, H., Hannover
Felscher, W., Freiburg	Potthoff, K., Hannover
Gloede, K., Heidelberg	Prestel, A., Bonn
Hasenjaeger, G., Bonn	Rödding, D., Münster
Jensen, R.B., Bonn	Siefkes, D., Heidelberg
Koppelberg, B., Köln	Thiele, E.J., Hannover
Leven, F.J., Bonn	Wette, E., Uckerath

Zusammenfassung der Vorträge von Herrn Dr. R.B. Jensen

Hauptziel der Vortragsreihe von Herrn Dr. Jensen war es, die axiomatischen Erweiterungen der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre, die in den letzten zehn Jahren etwa untersucht wurden, darzustellen und dabei insbesondere die modelltheoretischen Ergebnisse, hinsichtlich von Modellen der Mengenlehre selbst, herauszuarbeiten.

Zunächst wurden die Unendlichkeitsaxiome behandelt, die inhaltlich auf Mahlos Arbeiten 1911-1913 zurückgehen, aber insbesondere durch Lévy, Bernays und Tarski eine mehr moderne Fassung erhielten: Sei κ eine Ordinalzahl. Eine Menge $a \subset \kappa$ heißt a b g e s c h l o s s e n i n κ, wenn für jedes $\alpha < \kappa$ aus $\alpha = \sup(\alpha \cap a)$ folgt $\alpha \in a$. $b \subset \kappa$ heißt eine M a h l o s c h e M e n g e i n κ, wenn für jedes in κ abgeschlossene a mit $\bigcup a = \kappa$ gilt $b \cap a \neq \emptyset$. κ heißt eine M a h l o s c h e Z a h l, wenn κ stark unerreichbar ist und die stark unerreichbaren $\alpha < \kappa$ eine Mahlosche Menge in κ bilden.

Die nächsten Erweiterungen werden durch sogenannte Unbeschreiblichkeitsaxiome geliefert: Eine Kardinalzahl α heißt **unbeschreiblich** in einer Sprache, wenn jede Formel der Sprache, die in V_α erfüllt ist, schon in einem kleineren V_β erfüllbar ist. (Dabei ist die von Neumannsche Hierarchie $\{V_\gamma\}$ definiert durch: $V_o = \emptyset$, $V_{\gamma+1} = \mathfrak{P}(V_\gamma) =_{Df} \{x;\ x \subset V_\gamma\}$, $V_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi$ für Limeszahlen λ.) Verwendet man geeignete Sprachen höherer Stufe, so sind die darin unbeschreiblichen Zahlen wesentlich größer als die kleinste Mahlosche Zahl.

Die stärkste Erweiterung, die in diesen Vorträgen behandelt wurde, stellt die Forderung nach der Existenz einer meßbaren Zahl dar: Eine Kardinalzahl $\varkappa > \omega$ heißt **meßbar**, wenn es in $\mathfrak{P}(\varkappa)$ einen $\varkappa$-Ultrafilter gibt, der kein Hauptfilter ist. Die Existenz einer meßbaren Zahl ist in dem Zermelo-Fraenkelschen System plus Auswahlaxiom unverträglich mit dem Gödelschen Konstruktibilitätsaxiom "V = L" (Scott), aber noch verträglich mit der verallgemeinerten Kontinuumshypothese (Jensen, Silver).

Unverträglich mit "V = L" sind schon schwächere Existenzforderungen (Rowbottom, Silver): Für eine Klasse A sei $[A]^n =_{Df} \{x \subset A;\ \overline{\overline{x}} = n\}$, $[A]^{<\omega} =_{Df} \{x \subset A;\ \overline{\overline{x}} < \aleph_o\}$. Eine Klasse $X \subset A$ heißt **nicht unterscheidbar** bezüglich einer Zerlegung $f: [A]^{<\omega} \to I$, falls es zu jedem $n \geq 1$ ein $i \in I$ gibt mit f-Bild von $[X]^n \subset \{i\}$. Die Abkürzung $\alpha \to (\beta)^{<\omega}$ von Erdös-Hajnal stehe für die Aussage: "Zu jeder Zerlegung $f: [A]^{<\omega} \to I$ mit $\overline{\overline{A}} \geq \alpha$ und $\overline{\overline{I}} = 2$ gibt es ein $X \subset A$ mit $\overline{\overline{X}} \geq \beta$, das nicht unterscheidbar bezüglich f ist". Kardinalzahlen $\varkappa$ mit $\varkappa \to (\varkappa)^{<\omega}$ heißen **Ramseysche Zahlen**. Die Existenz Ramseyscher Zahlen ist unverträglich mit "V = L", es genügen sogar Zahlen $\varkappa$ mit $\varkappa \to (\aleph_1)^{<\omega}$ (dagegen ist $\varkappa \to (\aleph_o)^{<\omega}$ verträglich mit "V = L". Für diesen Teil der Darstellung wurde die Dissertation von Silver wesentlich benutzt und dem Ziel der Vorträge gemäß umgearbeitet.

Zusammenfassung der Vorträge von B. Koppelberg

Schwach und stark kompakte Kardinalzahlen

Eine Kardinalzahl α heißt schwach kompakt, wenn in jedem α-Mengenkörper K mit $\overline{\overline{K}} \leq \alpha$ jeder eigentliche α-Filter in einem α-Ultrafilter in K enthalten ist. Es ergibt sich, daß die Π_1^1-unbeschreiblichen Zahlen gerade die schwach kompakten Zahlen sind.
Eine Kardinalzahl α heißt stark kompakt, wenn in jedem α-Mengenkörper K jeder eigentliche α-Filter in einem α-Ultrafilter in K enthalten ist. Die stark kompakten Kardinalzahlen sind meßbar. Für eine Menge M und eine Kardinalzahl α ist $P_\alpha(M) =_{Df} \{x \subset M; \overline{\overline{x}} = \alpha\}$ durch $\subseteq$ (teilweise) geordnet. Für jedes $x \in P_\alpha(M)$ sei $E_\alpha^M(x) =$ $\{y/y \in P_\alpha(M),\ y \supseteq x\}$. Für reguläres α mit $\overline{\overline{M}} \geq \alpha$ ist $\{E_\alpha^M(x)/x \in P_\alpha(M)\}$ Filterbasis eines eigentlichen α-Filters. Ein Ultrafilter G in $P(P_\alpha(M))$ heißt Hauptendenultrafilter, wenn für alle $x \in P_\alpha(M)$ $E_\alpha^M(x) \in G$ gilt.
Durch eine Ultrafilterkonstruktion folgt nun der Satz:

Folgendes ist äquivalent:

1) α ist stark kompakt.

2) Für jedes $\beta \geq \alpha$ gibt es ein $\gamma \geq \beta$, so daß in $P(P_\alpha(\gamma))$ ein α-Hauptendenultrafilter existiert.

Starke Unendlichkeitsaxiome

Am Ende der Tagung wurde ein Überblick über die von W. Reinhardt in seiner Note "Some Strong Axioms of Infinity" vorgeschlagenen Schemata für Unendlichkeitsaxiome gegeben. Zwei Schemata wurden genauer beschrieben und dabei angedeutet, wie eines die Existenz meßbarer, das andere die Existenz stark kompakter Kardinalzahlen nach sich zieht. Das zuletzt benutzte Schema enthält in der dabei nötigen Sprache neben den üblichen Prädikaten = und $\in$ noch weitere Prädikate, eine Menge von Konstanten und ein "Interpretationsfunktion" genanntes Prädikat, das angibt, welche Mengen in den in Frage kommenden Modellen die Konstanten interpretieren.

B. Koppelberg (Köln)