Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 6

Zur mathematischen Logik

3. bis 8. April 1967

Zum dritten Mal seit 1964 fand in Oberwolfach eine Tagung über mathematische Logik unter der Leitung von Prof. Dr. H. Hermes und Prof. Dr. H. Arnold Schmidt statt. In ihrem Verlauf hielten die 38 Tagungsteilnehmer, von denen drei aus der Schweiz und vier aus England gekommen waren, zwanzig Referate. Es herrschte die übliche fruchtbare Arbeitsatmosphäre, die diesmal noch durch das schlechte Wetter gefördert wurde. Im Rahmen der Tagung konnte auch die DVMLG ihre Mitgliederversammlung abhalten.

Teilnehmer:

Bernays, P., Zürich	Kaiser, K., Bonn
Bibel, W., München	v. Kempski, J., Münster
Bürstenbinder, D., Hannover	v. Kutschera, F., München
Crossley, J.N., Oxford	Löb, M.H., Leeds
Derrick, J., Leeds	Luckhardt, H., Marburg
Diener, K.H., Köln	Mahn, F.K., Freiburg
Diller, J., München	Müller, G.H., Heidelberg
Döpp, K., Hannover	Oberschelp, A., Berenbostel
Drake, F.R., Leeds	Oberschelp, W., Hannover
Ebbinghaus, H.D., Freiburg	Pfeiffer, H., Hannover
Felgner, U., Frankfurt	Prestel, A., Bonn
Felscher, W., Freiburg	Rödding, D., Münster
Germano, G., Münster	Scarpellini, B., Basel
Gloede, K., Lübeck	Schmidt, H.A., Marburg
Hasenjaeger, G., Bonn	Schütte, K., München
Heinermann, W., Hannover	Schwabhäuser, W., Bad Honnef
Hermes, H., Freiburg	Siefkes, D., Heidelberg
Hoering, W., München	Specker, E., Zürich
Jensen, R., Bonn	Thiele, E.J., Hannover

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge (in zeitlicher Reihenfolge)

BERNAYS, P: Zur Fragestellung in der Grundlagenforschung

Aufgrund der Erweiterung des Programms der Beweistheorie, derart daß die Abgrenzung der zu gebrauchenden Mathematik gegenüber der mittels der Formalisierung zu behandelnden Mathematik nicht als an sich bestimmt, vielmehr als einer geeigneten Wahl unterliegend betrachtet wird (modified Hilbert program, im Sinne von Kreisel), wird angeregt, neben den Aufgabestellungen der konstruktiven Beweistheorie einerseits und der mit unbeschränkten Mitteln verfahrenden Modelltheorie andererseits auch die Möglichkeit ins Auge zu fassen, daß man den methodischen Standpunkt der klassischen Analysis als den der "Gebrauchsmathematik" nimmt für die beweistheoretische Behandlung der vollen Mengenlehre, insbesondere der Kardinalzahltheorie. Der Standpunkt der Analysis, im Unterschied von dem der vollen Mengenlehre, ergibt, daß man, anstatt die Bildung der Potenzmenge als einen zu iterierenden arithmetischen Grundprozeß zu betrachten, nur die spezielle Einführung der Potenzmenge der Zahlenreihe im Sinne eines geometrisch motivierten Postulates vornimmt. Ein Individuenbereich der Mengen überhaupt wird in der Analysis nicht eingeführt.

CROSSLEY, J. N.: Effective Dedekind Types

We extend the notion of Recursive Equivalence Types (Dekker & Myhill) to arbitrary collections of models satisfying certain simple effectiveness conditions. Analogues of Nerode's "Extensions to Isols" (Annals of Math. 1961) are studied in particular and recursive combinatorial functions explicitly determined for the cases of sets and abelian torsion groups. This work was done jointly with Anil Nerode.

JENSEN, R.: Quine's New Foundations mit Urelementen ist widerspruchsfrei

Man modifiziere das Quinesche System NF so, daß sowohl Urelemente als Mengen zugelassen sind. NF* sei das so ergänzte System; ET sei

die Typentheorie endlichen Ranges; U bzw. AC sei das Unendlichkeitsaxiom bzw. das Auswahlaxiom.

SATZ: Falls ET (bzw. ET + U, ET + U + AC) widerspruchsfrei ist, ist auch NF* (bzw. NF* + U, NF* + U + AC) widerspruchsfrei.

Dies ist in der elementaren Zahlentheorie beweisbar; folglich ist U nicht in NF* beweisbar. Dagegen hat SPECKER gezeigt, daß NF + AC widerspruchsvoll ist.

SCHÜTTE, K.: Zur Berechenbarkeit von Funktionalen höherer Typen

Zum Widerspruchsfreiheitsbeweis der reinen Zahlentheorie führte K. Gödel (Dialectica 1958) Funktionale höherer Typen ein, die im wesentlichen durch ein Abstraktionsprinzip und ein Rekursionsprinzip definiert sind. Hierdurch wird eine Klasse berechenbarer Funktionen abgegrenzt, die weiter als die Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen und enger als die Klasse der allgemein-rekursiven Funktionen ist. Die Berechenbarkeit dieser Funktionen ergibt sich nach J. Diller durch transfinite Induktion bis zur kleinsten ω-kritischen Ordinalzahl. Ein schärferes Ergebnis stammt von W. Howard. Hiernach ergibt sich die Berechenbarkeit der betrachteten Funktionen bereits durch transfinite Induktion bis ϵ_0. Die Methode von W. Howard besteht darin, daß jedem Funktional eine endliche Folge von Ordinalzahlen $< \epsilon_0$ zugeordnet wird, wobei sich die erste Ordinalzahl der Folge bei jeder Reduktion des Funktionals erniedrigt. Hiermit zeigt sich zugleich, daß die Widerspruchsfreiheitsbeweise von G. Gentzen und von K. Gödel auf metamathematischen Methoden von genau der gleichen Stärke beruhen.

DILLER, J.: Definitionen der partiell-rekursiven Funktionen

Durch $Lda = \mu n(d^n a = 0)$ und $Cpa = \mu x(px = a)$ sind partiell-rekursive Funktionale L und C definiert, für die man im Anschluß an Kleene's Normalform-Theorem beweist:

Es gibt primitiv-rekursive Funktionen U^L und U^C, so daß es zu jeder partiell-rekursiven (einstelligen) Funktion f primitiv-rekursive Funk-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

tionen d und p und eine primitiv-rekursive lineare Ordnungsrelation $\leq$ mit $|\leq| \subseteq 1+\omega^*\omega$, primitiv-rekursiver Vorgängerfunktion und $da' < a'$ gibt, so daß

$$fx = U^L(Ld(2x+1)) \quad \text{und} \quad fx = U^C(Cp(2x+1))$$

gilt. f ist genau dann allgemein-rekursiv, wenn $\leq$ vom Typ ω und p eine Permutation ist.

MAHN, F.K.: <u>Primitiv-rekursive Funktionen auf Termmengen</u>

Es werden Termmengen $\mathfrak{T}$ betrachtet, die aus Anfangselementen $A_o, \ldots, A_n$ durch Funktionen $F_o, \ldots, F_m$ der Stellenzahlen $j_o, \ldots, j_m$ erzeugt werden und wo jedes Element auf genau eine Weise erzeugt wird. Eine Funktion auf $\mathfrak{T}$ mit Werten in $\mathfrak{T}$ heißt $\mathfrak{T}$-primitiv-rekursiv, falls sie aus den Ausgangsfunktionen
$C_o^{A_o}, \ldots, C_o^{A_n}$, $F_o, \ldots, F_m$, U_k^i für $0 < k$ und $1 \leq i \leq k$ durch die Prozesse der simultanen Einsetzung und der $\mathfrak{T}$-primitiven Rekursion entsteht. Dabei entsteht die Funktion F aus den Funktionen $G_o, \ldots, G_n$, $H_o, \ldots, H_m$ geeigneter Stellenzahlen durch $\mathfrak{T}$-primitive Rekursion, falls

$$F(X_1, \ldots, X_k, A_i) = G_i(X_1, \ldots, X_k) \qquad \text{für } 0 \leq i \leq n,$$

$$F(X_1, \ldots, X_k, F_i(Y_1, \ldots, Y_{j_i})) = H_i(X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_{j_i}, F(X_1, \ldots, X_k Y_1), \ldots, F(X_1, \ldots, X_k, Y_{j_i})) \quad \text{für } 0 \leq i \leq m.$$

Es wird eine Gödelisierung angegeben, für die die Menge der von den natürlichen Zahlen auf $\mathfrak{T}$ übertragenen primitiv-rekursiven Funktionen mit der Menge der $\mathfrak{T}$-primitiv-rekursiven Funktionen übereinstimmt, und es werden alle Gödelisierungen charakterisiert, für die das der Fall ist.

SCARPELLINI, B.: <u>Bemerkungen zu Gentzens Widerspruchsfreiheitsbeweis</u>

Um Gentzens Konsistenzbeweis für die intuitionistische Zahlentheorie

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

auszunutzen, benötigt man zwei vorbereitende Schritte:

1. Definition eines Reduktionsschrittes für die Implikation,
2. Modifikation der Verknüpfungsreduktion für intuitionistische Beweise.

Anwendungen: Sei M wie folgt definiert:

a) Primformeln sind in M,

b) $A, B \in M \rightarrow A \wedge B \in M$,

c) $A \in M \rightarrow (x) A \in M$,

d) $A \in M \rightarrow B \supset A \in M$.

Nach Harrop gilt:

Sind A, (Es)D(s) geschlossen, $A \in M$ und ist $A \supset (Es)D(s)$ intuitionistisch beweisbar, so findet man effektiv einen Term t und einen Beweis von $A \supset D(t)$. Dieser Satz kann mit Hilfe von Gentzens Reduktionsmethode für intuitionistische Beweise wieder erhalten werden. Setzt man für A die Formel $0 = 0$ ein, so ergibt sich ein Resultat von Kleene. Dieses läßt sich nicht auf die klassische Zahlentheorie übertragen. Schwächt man diese aber in einer bestimmten Weise etwas ab, so erhält man etwas Analoges.

BÜRSTENBINDER, D.: Über Axiome, deren Modellklassen gegen Isotopie abgeschlossen sind

Def.: $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist Isotopismus von $(A, \mathfrak{f}^n)$ auf $(B, \mathfrak{g}^n)$ gdw. $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ sind bijektive Abbildungen von A auf B mit der Eigenschaft $\alpha_0(\mathfrak{f}^n(\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n)) = \mathfrak{g}^n(\alpha_1(\mathfrak{r}_1), \ldots, \alpha_n(\mathfrak{r}_n))$ für alle $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n \in A$.

Eine Aussage, deren Modellklasse gegen Isotopie abgeschlossen ist, heiße I-Axiom. Es gilt u.a.

SATZ 1: (Für jedes Präfix Π ist $\Pi F^n(t_1, \ldots, t_n) \equiv x_o$ ein I-Axiom) gdw. (die Terme $x_o, t_1, \ldots, t_n$ sind I-Variablen und verschieden).

SATZ 2: (Für jedes Präfix Π ist $\Pi F^n(x_1, \ldots, x_n) \equiv F^n(y_1, \ldots, y_n)$ ein I-Axiom) gdw. (keine I-Variablen mit verschiedenem Index sind identisch, oder die Seiten der Gleichung sind identisch).

In diesen Sätzen darf Π neben den Quantoren $\exists$ und $\forall$ auch allgemeinere Quantoren enthalten, etwa den Es-gibt-genau-ein-Quantor. Dann folgt aus Satz 1 z.B., daß die Axiome für Quasigruppen I-Axiome sind.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Nach Ausdehnung des Isotopiebegriffes auf Strukturen mit endlich vielen Funktionen und Relationen werden weitere Sätze über I-Axiome angegeben.

DÖPP, K.: Homogenisierbarkeit von Rechenprogrammen

Jede Turingmaschine über einem beliebigen Alphabet läßt sich gleichwertig ersetzen durch eine aus zwei geeigneten Elementarmaschinentypen aufgebaute Maschine. Dagegen ist es nicht möglich, eine einzige elementare Turingmaschine mit der entsprechenden Eigenschaft anzugeben; dies gilt bereits für die Turingmaschinen, welche im Rahmen gewisser Konventionen partiell-rekursive Funktionen berechnen.

Die analoge Fragestellung für Minsky-Maschinen führt zu drei Elementarmaschinentypen; jedoch genügen zur Berechnung der partiell-rekursiven Funktionen bereits zwei (weitere) Typen.

KAISER, K.: Die induktive Hülle

Sei K eine konsistente Satzmenge einer Prädikatenlogik L 1. Stufe. Gibt es induktive und relativ zu K modellkonsistente Satzmengen, dann gibt es unter diesen eine größte $\bar{K}$; $\bar{K}$ heiße die induktive Hülle von K und die Modellklasse $\bar{\mathfrak{M}}$ = Md($\bar{K}$) der induktive Kern von $\mathfrak{M}$ = Md(K). Die induktive Hülle ist eine Verallgemeinerung der Modellkomplettierung A. Robinsons. Als Beispiel wird die induktive Hülle der partiell geordneten Mengen oder allgemeiner die gewisser Relationssysteme mit universellen Modellen angegeben.

LÖB, M.H.: Die Semantik des Notwendigkeitsbegriffs

Mittels einer Erweiterung der semantischen Methode wird eine Definition des Notwendigkeitsbegriffes gegeben. Es wird die Frage untersucht, welches formale System auf Grund dieser Definition für die Notwendigkeitslogik im Sinne der Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit adäquat ist.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

LUCKHARDT, H.: Kodifikation und Aussagenlogik

Auf Grund der Verwandtschaft zwischen Wahrformen gewisser Gestalt und linearisierten kodifikativen Beweisbäumen gelingt durch eine Kodifizierung der erzeugenden Syntax beliebiger Kodifikate K in aussagenlogisch fundierte Theorien mit einem logischen Mindestkern, aber keiner Beschränkung hinsichtlich der alternären Logik, eine vollständige Charakterisierung der Kodifikate K in diesen ihren Syntaxtheorien T(K). Hiermit übertragen sich Resultate über Kodifikate (Gödel, Rosser, Church) in solche über aussagenlogisch fundierte Theorien. Beispielsweise besagt nun Gödels Unvollständigkeitssatz, daß es unmöglich ist, höheres mathematisches Denken in vollständiger Weise aussagenlogisch zu charakterisieren.

Alle Theorien T(K) sind widerspruchsfrei. Für bestimmte Kodifikationen sind Entscheidbarkeit und Vollständigkeit für K und T(K) äquivalent. Diese Ergebnisse behalten ihre Gültigkeit, wenn man T(K) als Syntaxtheorie in endlicher Weise vergrößert. Für unendliche derartige Erweiterungen gilt dies auch noch, für die Entscheidbarkeit jedoch mit Einschränkungen.

FELGNER, U.: Syntaktische Modelle der Mengenlehre

$T_1 = \{L_1, P, A_1\}$ und $T_2 = \{L_2, P, A_2\}$ seien Theorien in Standardformalisierung (L_i formalisierte Sprache, A_i Axiomenmenge, P Prädikatenkalkül 1. Stufe). Eine Transformation τ, die n-stellige primitive Prädikate von T_1 auf (in L_2 definierbare) n-stellige Prädikate von T_2 abbildet, heißt "syntaktisches Modell von T_1 in T_2", wenn $A_2 \vdash A_1^{\tau}$ gilt.

1) Die Klasse der syntaktischen Modelle bildet eine Kategorie.
2) Fügt man der Def. 9.3 des Gödelschen Modells Δ (1940) die beiden Operationen $\mathfrak{F}_9(x,y) = \mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{F}_{10}(x,y) = \cup x$ hinzu, so erhält man das syntaktische stark-vollständige v. Neumannsche Modell Π von $T_{\Sigma^o} = \{\mathfrak{L}, P, \Sigma^o\}$ in T_{Σ^o}. Der Satz $(E)^{\Pi}$ ist in Σ^o unentscheidbar. Die Beschränkung auf $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_8$ in Def. 9.3 ist also wesentlich.
3) Sei $\Sigma \vdash \Phi$; es gilt bereits $\Sigma^o \vdash \Phi$, wenn ein syntaktisches Modell μ von T_{Σ} in T_{Σ^o} existiert mit $\Sigma^o \vdash (\Phi^{\mu} \Longrightarrow \Phi)$.

Ein analoger Satz gilt für Beweisbarkeit ohne Auswahlaxiom; dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von G. Kreisel ("Some uses of metamathematics", British J. Phil. Sci., vol. 7 (1956/57), S. 161-173).

OBERSCHELP, A.: Über den Interpolationssatz von Craig-Lyndon

Der Interpolationssatz von Craig-Lyndon macht keine Aussage über das Vorkommen des Identitätszeichens in der Zwischenformel. Es wird eine Verschärfung angegeben, die aussagt, daß man noch die folgende Bedingung an die Zwischenformel stellen kann:

Die Zwischenformel enthält das Identitätszeichen nur dann positiv, wenn es in den Prämissen positiv vorkommt und nur dann negativ, wenn es in der Konklusio negativ vorkommt.

Die Beweismethode entspricht der von Henkin (J.S.L. 28, 1963, S. 201-216). In der betrachteten Sprache dürfen auch Funktionszeichen vorkommen.

FELSCHER, W.: Über Definierbarkeitskriterien

Seien Π, Ω, $\mathfrak{J}$, Es die Operationen der Bildung von Ultraprodukten; Ultralimites, isomorphen Bildern und elementaren Subsystemen. Für eine Klasse L von Modellen seien AC(L) und AC_δ(L) erklärt wie bei S. Kochen: Topics in the theory of definition, The Theory of Models, Amsterdam 1965, 170-176.

Theorem 1. Wenn $K \subseteq L$ und K abgeschlossen gegen Π, Ω, $\mathfrak{J}$ und L - K abgeschlossen gegen Ω, dann $K \in AC_\delta(L)$. Wenn außerdem L-K abgeschlossen gegen Π, dann $K \in AC(L)$.

Theorem 2. Wenn $K \subseteq L$, L abgeschlossen gegen $\mathfrak{J}$, und K abgeschlossen gegen Π, $\mathfrak{J}$, $Es \restriction L$, dann $K \in AC_\delta(L)$. Wenn außerdem L-K abgeschlossen gegen Π, dann $K \in AC(L)$.

Für diese Sätze werden kurze Beweise gegeben. Theorem 1 findet sich (mit anderem Beweis) bei Kochen l.c.; aus ihm folgt leicht der Satz von

Beth. Aus Theorem 2 folgt eine mathematische Kennzeichnung definierbarer Abbildungen zwischen Klassen von Modellen nach H.J. Hoehnke.

EBBINGHAUS, H.D.: Über eine dreiwertige Prädikatenlogik mit einer Anwendung auf die Gleichungstheorie

Unter Berücksichtigung gleichungstheoretischer Gesichtspunkte wird - in Erweiterung eines von H. Hermes vorgeschlagenen Systems - eine Prädikatenlogik mit Identität und Funktionssymbolen aufgebaut, deren semantischer Fixierung partielle Prädikate und Funktionen zugrundeliegen. Die Semantik erweist sich als äquivalent zu einer dreiwertigen. Mit einer modifizierten Henkinmethode kann ein Vollständigkeitsbeweis geführt werden. Es wird ein Satz angegeben, demzufolge die Vollständigkeit einer Theorie der klassischen Prädikatenlogik bei Adjungierung neuer, mit den Ausdrucksmitteln dieser Theorie eventuell nur partiell definierter Prädikats- und Funktionskonstanten im Rahmen der neuen Logik - in leicht modifizierter Form - erhalten bleibt. Die Verwendbarkeit dieses Satzes in der Gleichungstheorie wird kurz diskutiert.

DRAKE, F.R.: Element types in uncountable languages

The n-element type of an n-tuple of elements, $a_o \ldots a_{n-1}$, of a structure $\mathfrak{A}$, is the set of all formulae with the first n variables free, which hold in $\mathfrak{A}$ for $a_o \ldots a_{n-1}$. Such an element type p can be omitted if there is another structure $\mathfrak{B}$, elementarily equivalent to $\mathfrak{A}$, in which p is not the element type of any n-tuple of elements of $\mathfrak{B}$. An element type p is principal if there is a single formula φ such that p is the set of all consequences of φ in the theory of $\mathfrak{A}$.

Vaught has proved that for a countable language a neccessary and sufficient condition that an n-element type can be omitted is that it be non-principal.

It seems likely that the restriction to a countable language is not necessary. In partial support of this, a proof is given that in an uncountable language, certain non-principal element types, here called uniform, can be omitted.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

(An element type p in language with K formulae (K a cardinal) is uniform if p is not the set of consequences of fewer than K formulae.)

OBERSCHELP, W.: Struktur-Anzahlformeln für endliche Relationssysteme

Lösung des Problems von Carnap (1950), die Anzahl $S(n,\tau)$ der strukturverschiedenen Relationssysteme eines gegebenen Typs $\tau = [\mu_1, \ldots, \mu_m]$ über endlichem Feld zu bestimmen, und zwar exakt formelmäßig wie auch asymptotisch ($n \to \infty$, n Mächtigkeit des Feldes). Dabei wird die Abzählungstheorie von Polya (1937) verwendet und die Formel für $S(n,\tau)$ mittels des Zykelindexes $Z(\mathfrak{S}_n^\tau)$ der "Typgruppe $\mathfrak{S}_n^\tau$ gegeben. $Z(\mathfrak{S}_n^\tau)$ berechnet sich als eine Art Hadamard-Produkt der vom Autor bereits früher betrachteten Zykelindices für m-Tupelgruppen. Abgesehen von dem bei Carnap schon behandelten Sonderfall nur einstelliger Relationen wird die asymptotische Beziehung $S(n,\tau) = \frac{1}{n!} 2^{T(n)}(1+o(1))$ und eine noch genauere Approximation hergeleitet. Dabei ist $T(z) := \mu_m z^m + \ldots + \mu_1 z$ das sog. Typ-Polynom.

Anschaulich bedeutet das Ergebnis, daß fast alle Relationssysteme mit wenigstens einer höherstelligen Relation nur den trivialen Automorphismus zulassen.

SPECKER, E.: Länge von Formeln

Bericht über den aussagenlogischen Teil einer gemeinsamen Arbeit mit Louis Hodes. Es wird ein Kriterium dafür angegeben, daß es zu einer Wahrheitsfunktion keine darstellbare Formel des Aussagenkalküls gibt, in der jede Variable höchstens k-mal vorkommt.

SCHWABHÄUSER, W.: Zum Problem der Definierbarkeit der Kollinearität mit Hilfe der Mittelpunktsbeziehung

In affinen Räumen beliebiger (endlicher oder unendlicher) Dimension ≥ 2 über einem beliebigen Körper K werden die Kollinearität und die

Mittelpunktsbeziehung als dreistellige Relationen zwischen Punkten eingeführt. Für den Fall, daß K kein Primkörper ist, ist die Kollinearität nicht mit Hilfe der Mittelpunktsbeziehung definierbar, was mit Hilfe der Methode von Padoa gezeigt wird (eine entsprechende Abbildung wird unter Verwendung des Auswahlaxioms konstruiert). Ist K der Körper der rationalen Zahlen, so ist die Kollinearität mit Hilfe der Mittelpunktsbeziehung nicht definierbar in der Logik der ersten Stufe - was mit Hilfe des Satzes von Löwenheim-Skolem auf den vorigen Fall zurückgeführt wird -, wohl aber definierbar in Logiken höherer Stufe, sogar schon in der schwachen Logik der zweiten Stufe. Ist K ein Primkörper von Primzahlcharakteristik, so ist die Kollinearität mit Hilfe der Mittelpunktsbeziehung schon in der Logik der ersten Stufe definierbar.

J. Diller