MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 7|1967

Arbeitsgemeinschaft über auflösbare Gruppen

23.4. bis 28.4.1967

Im Mittelpunkt dieser Arbeitsgemeinschaft, die von den Herren A. Brandis (Heidelberg) und B. Huppert (Mainz) geleitet wurde, stand die Theorie der Formationen von W. Gaschütz und ihre Dualisierung von B. Fischer. Gaschütz trug eine modifizierte Dualisierung vor, in der sich die Beweise übersichtlicher gestalten lassen. Für den wichtigen Satz von Gaschütz-Lubeseder aus der Theorie der Formationen gab Huppert einen Beweis an, der nichtelementare Sätze aus der Theorie der modularen Darstellungen vermeidet. Ferner wurden Kriterien für die p-Nilpotenz endlicher Gruppen behandelt, insbesondere der Satz von Thompson.

Teilnehmer

R. Berger, Berlin
A. Brandis, Heidelberg
B. Fischer, Frankfurt
W. Fischer, Göttingen
W. Gaschütz, Kiel
E. Gottschling, Berlin
F. Groß, Kiel
K. Höchsmann, Tübingen
B. Huppert, Mainz
W. Legrady, Hamburg
D. W. Müller, Erlangen
P. Roquette, Heidelberg
T. Yen, Kiel

Vortragsauszüge

1. Fritz Groß, Kiel

Einleitend wurden einige elementare Tatsachen über p-nilpotente Gruppen gebracht: Eine endliche Gruppe heißt p-nilpotent, wenn sie einen Normalteiler von zu p teilerfremder Ordnung besitzt, dessen Index eine Potenz von p ist (p Primzahl). Untergruppen und Faktorgruppen von p-nilpotenten Gruppen sind p-nilpotent. In einer auflösbaren Gruppe gibt es einen maximalen p-nilpotenten Normalteiler; er ist gleich dem Zentralisator aller p-Hauptfaktoren.

Anschließend wurde der Satz von Schur-Zassenhaus bewiesen: Zu einem Normalteiler N einer endlichen Gruppe G, mit $(|N|/|G/N|) = 1$ gibt es ein Komplement K mit $N \cap K = 1$ und $NK = G$ (Zassenhaus). Der Beweis geschieht durch Reduktion auf den Fall: N ist abelsch (Schur). Ein kohomologischer Beweis der folgenden Verallgemeinerung (Gaschütz) wurde skizziert: N sei normal und abelsch, $N \leq U \leq G$, $(|N|, [G:U]) = 1$ und U zerfalle über N; dann zerfällt G über N.

2. Wolfgang Fischer, Göttingen

Eine Untergruppe H einer Gruppe G heißt Hall- Untergruppe, wenn $(|H|, [G:H]) = 1$. Ist H (Hall) - Untergruppe von G und K Normalteiler von G mit $H \cap K = 1$, $HK = G$, so heißt K normales (Hall)-Komplement von H. Es wurde ein Beweis des folgenden Satzes vorgetragen (Satz von Huppert-Tate-Roquette): Es sei H Hall-Untergruppe von G, N Normalteiler von G und $D := H \cap N$ sei in der Frattinigruppe von H enthalten. Dann hat die Hall-Untergruppe D von N ein normales Komplement in N. Der Roquette'sche Beweis dieses Satzes liefert auch folgende verwandte Aussage: Ist $G = HN$, H Untergruppe, N Normalteiler, ist weiter $D := H \cap N \subset \Phi(H)$ und $(|D|, [G:H]) = 1$, so gibt es ein normales Komplement von H in G.

3. E. Gottschling, Berlin:

Eine Untergruppe einer auflösbaren Gruppe G heißt Cartergruppe von G, wenn sie nilpotent und selbstnormalisierend ist. Für jede endliche auflösbare Gruppe gilt:

(i) G besitzt Cartergruppen

(ii) je zwei Cartergruppen sind konjugiert

(iii) jede Obergruppe einer Cartergruppe ist selbstnormalisierend.

Eine Klasse $\mathfrak{F}$ von endlichen auflösbaren Gruppen heißt Formation, wenn gilt:

(i) $\mathfrak{F}$ enthält mit einer Gruppe G auch jedes homomorphe Bild von G.

(ii) für zwei Normalteiler N_1, N_2 von G mit $G/N_i \in \mathfrak{F}$ gilt auch $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Eine Formation heißt gesättigt, wenn gilt: $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F} \Rightarrow G \in \mathfrak{F}$. ($\Phi(G)$ = Frattinigruppe von G). Eine Untergruppe F von G heißt $\mathfrak{F}$ - Projektor von G, wenn $F \in \mathfrak{F}$ ist und für alle U mit $F \leq U \leq G$ und jeden Homomorphismus σ von U gilt:

$U^{\sigma} \in \mathfrak{F} \Longrightarrow F^{\sigma} = U^{\sigma}.$

Es wurde folgender Satz bewiesen:

Wenn $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation ist, so enthält jede endliche auflösbare Gruppe $\mathfrak{F}$- Projektoren, und je zwei sind konjugiert. Die nilpotenten Gruppen bilden eine gesättigte Formation $\mathfrak{N}$ .Die $\mathfrak{N}$- Pro jektoren sind die Cartergruppen.

4. R. Berger, Berlin:

Zu jeder Primzahl p sei ein e Formation gegeben, die wir mit $\mathfrak{F}(p)$ bezeichnen.
Folgendermaßen läßt sich aus dieser eine Formation $\mathfrak{F}$ auflösbarer Gruppen erklären:

$$\mathfrak{F} := \{ G \mid G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}(p) \text{ für alle p-Hauptfaktoren } H/K \}$$

$\mathfrak{F}$ ist eine gesättigte Formation.
Es gilt das handliche Kriterium :
$G \in \mathfrak{F} \Longleftrightarrow \forall p \mid |G|$ gilt $G/F_p(G) \in \mathfrak{F}$, wobei $F_p(G)$ den größten p-nilpotenten Normalteiler von G bezeichnet.
Wir sagen, $\mathfrak{F}$ sei lokal durch die Formation ven $\mathfrak{F}(p)$ definiert.
$\mathfrak{F}$ heißt inklusiv definiert, falls $\mathfrak{F}(p) \subset \mathfrak{F}$ für alle p.
Die $\mathfrak{F}(p)$ können stets so gewählt werden, daß $\mathfrak{F}$ inklusiv definiert ist.
Satz: Seien $\mathfrak{F}_1$ bzw. $\mathfrak{F}_2$ inklusiv durch $\mathfrak{F}_1(p)$ bzw. $\mathfrak{F}_2(p)$ definiert. Dann gilt

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 \Longleftrightarrow \forall p \text{ ist } \mathfrak{P}(p)\mathfrak{F}_1(p) = \mathfrak{P}(p)\mathfrak{F}_2(p)$$

wobei $\mathfrak{P}(p)\mathfrak{F}(p)$ die Formation der auflösbaren Gruppen ist, deren Faktorgruppen nach dem maximalen p- Normalteiler in $\mathfrak{F}(p)$ liegt.

5. B. Huppert, Mainz: Satz von Lubeseder.
Ist $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation, so ist $\mathfrak{F}$ lokal definierbar.
Wesentlicher Beweisschritt ist:
Sei $\mathfrak{F}$ gesättigt, $G \in \mathfrak{F}$, $p \mid |G|$. Wir setzen $\bar{G} = G/F_p(G)$.
Ist V eine irreduzible $\bar{G}$ - Gruppe, elementar - abelsch vom Exponenten p, so liegt das semidirekte Produkt $V\bar{G}$ in $\mathfrak{F}$. Dazu wird das Ergebnis des folgenden Satzes herangezogen:

6. K. Hoechsmann, Tübingen:
Sei G eine endliche Gruppe, V ein endlicher K[G] - Modul (K ein Körper). Ist V als G - Modul treu, so steckt jeder irreduzible K[G] Modul in einer geeigneten Tensorpotenz von V. Es wurde ein sehr einfacher Beweis von R. Steinberg vorgetragen.

7. P. Roquette, Heidelberg:
Sei G eine endliche, auflösbare Gruppe, $\mathfrak{F}$ eine gesättigte Formation. Die $\mathfrak{F}$-Projektoren F von G können gekennzeichnet werden durch die folgende Maximaleigenschaft (Hawkes):
Für jeden Homomorphismus α von G ist F^{α} maximale $\mathfrak{F}$-Untergruppe von G^{α}

8. W. Gaschütz, Kiel:
Eine Klasse $\mathfrak{f}$ von Gruppen heißt fittingsch, wenn sie unter Normalteilerbildung und normalen Produkten
($N_1, N_2 \in \mathfrak{f}$, $N_1 \trianglelefteq G$, $N_2 \trianglelefteq G \Longrightarrow N_1N_2 \in \mathfrak{f}$) abgeschlossen ist.
Eine Untergruppe V von G heißt dann $\mathfrak{f}$ - Injektor von G, wenn für jede nachinvariante Untergruppe N von G der Durchschnitt $N \cap V$ $\mathfrak{f}$ - maximal in N ist.
Es wird bewiesen:
Ist G endlich und auflösbar, so existieren zu jedem $\mathfrak{f}$ auch $\mathfrak{f}$ - Injektoren und alle $\mathfrak{f}$- Injektoren von G sind konjugiert.
(Gemeinsam veröffentlicht in der M.Z. mit B.Fischer und H.Hartley)
9. B. Fischer, Frankfurt
$\mathfrak{F}$ - Normalisatoren(R. Carter und T. Hawkes).
Sei $\mathfrak{F}$ eine Formation, lokal definiert durch $\mathfrak{F}(p)$, mit $\emptyset \neq \mathfrak{F}(p) \leq \mathfrak{F}$. Für jedes p sei $A_p(G)$ eine p'- Hallgruppe von $G^{\mathfrak{F}(p)} = \bigcap_{G/N \in \mathfrak{F}(p)} N$ für eine endliche auflösbare Gruppe G. Dann ist $N_G(\{A_p(G)\})$ ein $\mathfrak{F}$ - Normalisator von G.
$\mathfrak{F}$ - Normalisatoren sind in G konjugiert, decken genau die p- Hauptfaktoren K/L mit $C_G(K/L) \geqslant G^{\mathfrak{F}(p)}$, meiden alle anderen, sind in $\mathfrak{F}$ enthalten, und es gibt einen $\mathfrak{F}$ - Projektor, der sie enthält.
1o. A. Brandis, Heidelberg:
G sei eine endliche Gruppe, P eine p- Sylowgruppe von G. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:
(i) G ist p- nilpotent
(ii) Für alle $1 \neq Q \leq P$ gilt $N_G(Q)/C_G(Q)$ ist eine p-Gruppe.
(iii) Für alle $x,y \in P$, $x \underset{G}{=} y \Rightarrow x \underset{P}{=} y$.

($x \underset{G}{=} y$ heißt: y ist konjugiert zu x unter G)
Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist der Satz von Frobenius.
Insbesondere folgt:
Ist für alle $1 \neq Q \leq P$ $N_G(Q)$ p-nilpotent, so auch G.

11. Fritz Groß, Kiel und A. Dreß, Berlin:

Der Satz von Thompson:
Sei G eine endliche Gruppe, p eine ungerade Primzahl, P eine p- Sylowgruppe von G. Sind $N_G(J(P))$ und $C_G(Z(P))$ p- nilpotent, so ach G. Dabei ist $Z(P)$ das Zentrum von P und $J(P)$ die Thompson Untergruppe von P, die wie folgt definiert ist:
Für eine Gruppe M sei $d(M)$ die Minimalzahl von Erzeugenden von M. $J(P)$ ist das Erzeugnis aller derjenigen abelschen Untergruppen ~~xxx~~ A von P, für die $d(A)$ größtmöglich ist.

12. K. Höchsmann, Tübingen
Kohomologische Kennzeichnung der p-nilpotenten Gruppen.
Sei G eine endliche Gruppe. $P_i(G)$ bedeute: Für alle endlichen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[G]$ - Moduln M folgt $H^i(G,M) = 0$ aus $H^0(G,M) = 0$.
Ist G p-nilpotent, so folgt $P_i(G)$, für alle $i \in \mathbb{Z}$.
Umgekehrt: Aus $P_i(G)$ folgt p-Nilpotenz von G, falls $|i| = 1,2,3$.

A. Brandis (Heidelberg)