Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 8/1967

Grundlagen der Geometrie

15. bis 20.5.1967

Die diesjährige Pfingsttagung über "Grundlagen der Geometrie" im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach stand unter der Leitung der Herren Professoren F. Bachmann (Kiel), H. Freudenthal (Utrecht) und E. Sperner (Hamburg).

Es nahmen in diesem Jahr insgesamt 43 Teilnehmer an dieser Tagung teil; es wurden 28 Vorträge gehalten.

Teilnehmer:

Arnold, H.J., Bochum
Bachmann, F., Kiel
Barlotti, A., Florenz
Benz, W., Bochum
Biallas, D., Hamburg
Bollow, B., Darmstadt
Bollow-Mannzen, A., Darmstadt
Bröcker, L., Kiel
Chen, Y., Bochum
Drengenberg, Ch., Rendsburg
Dreß, A., Berlin
Finke, G., Kiel
Freudenthal, H., Utrecht
Garner, C.W.L., Ottawa

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Götzky, M., Kiel
Goldenbaum, D., Darmstadt
Grenzdörffer, J., Kiel
Havliček, K., Prag
Hering, Chr., Mainz
Hübner, G., Hamburg
Junkers, W., Bonn
Kinder, H., Kiel
Klopsch, P., Kiel
Lenz, H., München
Lingenberg, R., Darmstadt
Lüneburg, H., Mainz
Mäurer, H., Darmstadt
Mathiak, K., Braunschweig
Melchior, U., Bochum
Meyer, K.H., München
Misfeld, J., Hamburg
Pavlović, S.V., Hamburg
Pejas, W., Kiel
Pieper, J., Hamburg
Ruoff, D., Kiel
Salzmann, M., Frankfurt
Seidel, J.J., Eindhoven
Sperner, E., Hamburg
Strambach, K., München
Tomasic, V., Rijeka
Wagner, A., London
Wille, R., Frankfurt
Zappa, G., Florenz

Herr Dr. V.Havel (Brno) hatte ein Referat angemeldet, konnte jedoch an der Tagung nicht teilnehmen; sein Vortragsauszug wird mit abgedruckt.

Vortragsauszüge

Arnold, H.J.: Schwach affine Räume über Fastkörpern

Es gilt folgender Kennzeichnungssatz für SPERNERsche schwach affine Räume über Fastkörpern:

> Ein mindestens dreidimensionaler schwach affiner Raum ist genau dann ein Fastkörperraum, wenn er translationstransitiv ist und eine distributive Basis besitzt.

Dabei heißen n Fernpunkte $a_1, \ldots, a_n$ Basis, wenn für die zugehörigen Untergruppen $\langle a_i \rangle$ der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ gilt $\mathfrak{T} = \bigoplus_{i=1}^{n} \langle a_i \rangle$. Zwei Translationen $a\alpha \in \langle a \rangle$, $b\beta \in \langle b \rangle$ heißen komplementär bzgl. der Basis $a_1, \ldots, a_n$, wenn gilt:

$$a\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i, \quad b\beta = \sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i \Longrightarrow \alpha_i = 0 \text{ oder } \beta_i = 0 \quad (i=1,\ldots,n).$$

Eine Basis $a_1, \ldots, a_n$ heißt distributiv, wenn unter der Voraussetzung, daß $a\alpha$, $b\beta$ oder $b\beta$, $c\gamma$ komplementär bzgl. $a_1, \ldots, a_n$ sind, gilt

$$\left.\begin{array}{l} c\gamma = a\alpha + b\beta \\ c\gamma \neq \text{Identität} \end{array}\right\} \Longrightarrow \langle c \rangle \subset \langle a \rangle + \langle b \rangle.$$

Bachmann, F.: Über die 1. Mitteilung von Hjelmslev's Allgemeiner Kongruenzlehre

Es wird die folgende These vertreten: Ersetzt man in dem Axiomensystem A der ebenen absoluten Geometrie aus meinem Buch "Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff" die

(1) Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden durch die

(2) Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten,

so erhält man ein Axiomensystem A*, aus dem man für jeden Satz aus der 1. Mitteilung von Hjelmslev's "Allgemeiner Kongruenzlehre" eine Interpretation beweisen kann.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Das Axiomensystem A^* läßt die Existenz von verschiedenen, aber punktgleichen Geraden zu, während bei Hjelmslev Geraden Punktmengen sind; ferner läßt A^* - im Gegensatz zu dem Hjelmslev'schen Axiomensystem - die Existenz von Punkten zu, die nicht ineinander beweglich sind, und schließt die elliptische Ebene nicht aus. Aus A folgt A^*.

Eine Reihe von Folgerungen von A (wie sie etwa in meinem Buch stehen) läßt sich bereits aus dem Axiomensystem A^* auf sehr natürliche Weise beweisen. Beispiele sind Sätze über Gleitspiegelungen, der Höhensatz, der Lotensatz. Andere Folgerungen von A werden anspruchsvoller, wenn man auf (1) verzichtet. Ein Beispiel hierfür ist der auch aus A^* beweisbare Satz:

> Zwei Punkte haben (im nichtelliptischen Fall) höchstens einen Mittelpunkt, und dieser liegt auf allen Verbindungsgeraden.

Unter den Folgerungen von A^* gibt es drittens die Aussagen, die sich mit den merkwürdigen Phänomenen beschäftigen, die eintreten, wenn (1) verletzt ist. Als Beispiele seien genannt:

1) Gibt es zwei Geraden, welche zwei verschiedene Punkte gemein haben, aber nicht punktgleich sind, so gibt es ein Rechtseit.
2) Die Fixpunkte einer Drehung, d.h. eines Produkts von zwei Spiegelungen an Geraden a, b mit einem gemeinsamen Punkt, bilden zusammen mit dem durch a, b bestimmten Geradenbüschel eine Teilstruktur. Dies interpretiert den Hjelmslev'schen "Fleck".

Bollow, B.: <u>Metrisch-euklidische Lingenberg-Ebenen</u>

Sei $\Pi(K, f)$ die singuläre projektiv-metrische Ebene über dem Körper K mit $-1 \notin K^2$ und $f: (1, 1, 0)$. Eine Teilmenge von Geraden von $\Pi(K, f)$ heiße Lingenberg-Ebene über K, wenn sie wenigstens zwei eigentliche Büschel und zu je drei Geraden eines Büschels die vierte Spiegelungsgerade enthält (vgl. [1]).

Liegt $\frac{1}{2}$ nicht in dem von den Elementen $\frac{2}{1+a^2}$ mit $a \in K$ erzeugten

Teilring C'(K) von K, so gibt es Lingenberg-Ebenen K, welche das Axiomensystem aus [2] nicht erfüllen. Ist speziell Q der rationale Zahlkörper, M ein vom Nullmodul verschiedener Modul von Q mit C'(Q) als Multiplikatorenring und ist $\mathfrak{P}$ die Punktmenge $\{(x, y) \mid x, y \in M\}$, so gilt:

a) Die Verbindungsgeraden von $\mathfrak{P}$ bilden eine Lingenberg-Ebene.

b) Die Geradenmenge $\mathfrak{N} = \{g \mid \mathfrak{P}^g = \mathfrak{P}\}$ ist eine Lingenberg-Ebene.

c) Jede Lingenberg-Ebene, in welcher (0, 0) ein eigentlicher Punkt ist, läßt sich nach a) oder nach b) darstellen.

Literatur:

1. LINGENBERG, R.: Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt. I-IV Math.Ann. 137 (1959), 142 (1962), 158 (1965).
2. BACHMANN, F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959.

Bollow-Mannzen, A.: Absolute Geometrie mit euklidischer Metrik

Die metrisch-euklidischen Räume im Sinne von Ahrens lassen sich durch ein algebraisches Kriterium für ihre Koordinatenmoduln beschreiben; Spezialisierungen des Kriteriums ergeben unter anderem: Die metrisch-euklidischen Räume über Körpern algebraischer Zahlen mit drei paarweise orthogonalen, ineinander spiegelbaren Ebenen sind euklidisch. Bezeichnen wir die metrisch-euklidischen Ebenen über dem rationalen Zahlkörper Q als groß, wenn die Inversen von fast allen Primzahlen Multiplikatoren der Koordinatenmoduln sind, so sind genau die großen metrisch-euklidischen Ebenen über Q als Ebene eines metrischen Raumes darstellbar.

Literatur:

AHRENS, J.: Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff. Math. Z. 71, 154-185 (1959).

BACHMANN, F.: Geometrien mit euklidischer Metrik, in denen es zu jeder Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt mehrere Nichtschneidende gibt. I, II, III. Math. Z. 51, 752-768, 769-779 (1949). Math. Nachr. J, 258-276 (1948).

BRÖCKER, L.: Zur Struktur orthogonaler Gruppen über bewerteten Körpern

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit gegebener 1-rangiger Bewertung. Wir nennen eine symmetrische Bilinearform f bewertungs-anisotrop, wenn sie auch auf der Komplettierung von K anisotrop ist. Es ist bekannt, daß für solches f ein filtrierendes System von Normalteilern von $O_n(K, f)$ existiert. Gleichwertig damit ist, daß sich auf $O_n(K, f)$ eine sogenannte Gruppenbewertung erklären läßt. Es werden Faktorgruppen von "aufeinanderfolgenden" Normalteilern berechnet. Sie sind isomorph zu

$$\prod_i O_{r_i}(\bar{K}, \bar{f}_i), \quad \sum_i r_i = n$$

beziehungsweise $\bar{K}^{n_j}$. Dabei ist $\bar{K}$ der Restklassenkörper zur gegebenen Bewertung, und die $\bar{f}_i$ sind symmetrische Bilinearformen über $\bar{K}$ (Restklassenformen von f).

CHEN, Y.: Miquelsche Lie-Ebenen

Unter einer Lie-Ebene versteht man eine Menge Ω von Elementen mit einer zweistelligen reflexiven und symmetrischen Relation, derart, daß sie eine Laguerre-Ebene im engeren Sinne bildet, wenn man ein beliebiges Element x aus Ω wegläßt und alle x berührenden Elemente als Sperre und alle anderen als Zykel betrachtet.

Eine Lie-Ebene heißt Miquelsch, wenn die induzierte Laguerre-Ebene den vollen Satz von Miquel erfüllt.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Satz: Identisch sind die Klassen der

I. Geometrien $\mathbb{K}^2(\mathfrak{K})$, Char. $(\mathfrak{K}) \neq 2$ (Def. vgl. W. Benz "Lie-Transformationen" Abh. Hamburg 29 (1966), 197-211),

II. Miquelsche Lie-Ebenen,

III. Lie-Ebenen mit einer abelschen Transformationsgruppe $P_{12,34}$, wobei $P_{12,34}$ in der in der Laguerre-Ebene induzierten affinen Ebene eine Gruppe der transitiven Dilatationen mit einem vorgegebenen Fixpunkt bedeutet.

DRESS, A.: Homomorphismen, die von Bewertungen induziert werden

1. Sei $\omega: K^\times \longrightarrow G$ ein Homomorphismus der multiplikativen Gruppe $K^\times$ des Körpers K in eine Gruppe G. Dann faktorisiert ω genau dann über einen Bewertungshomomorphismus, wenn gilt:

(i) $\omega(-1) = 1$

(ii) $a, b, a+1, b+1, a+b+1 \in K^\times$

$\omega(a) \neq 1 \neq \omega(b), \ \omega(1+a) = 1 = \omega(1+b) \Longrightarrow \omega(1+a+b) = 1$

(iii) $a, a+1 \in K^\times, \ \omega(a) \neq 1 \Longrightarrow \omega(a+1) \in \{1, \omega(a)\}$.

2. Sei f ternäre quadratische Form über $L = K(x)$. Dann stellt f die Null in L nicht trivial dar, wenn f dies an allen Stellen von $\frac{L}{K}$ tut (Char $K \neq 2$). Beweis nach Legendre. Verallgemeinerungen? (Für endl. K oder $K = \mathbb{R}$ bekanntlich möglich).

GÖTZKY, M.: Ebene unitär-minkowskische Geometrie

Mit Hilfe von Sätzen über höchstens vierstellige Quasispiegelungsrelationen wurde eine Kennzeichnung der engeren unitären Gruppe $U^* = U^*_n(K, f_\alpha)$ - K ein Schiefkörper, f_α eine α-hermitesche Form vom Rang 2 und Index 1 - für Char. $K \neq 2$ gegeben:

Zunächst wurde ein axiomatisch ausgezeichnetes System von Untergrup-

pen (die sich später als Standuntergruppen der Hyperebenen des zu U* gehörigen unitären Vektorraumes V in dualer Deutung erweisen) als Geradenmenge einer "unitären" Ebene aufgefaßt, die dann über den Nachweis spezieller Scherensatzkonfigurationen koordinatisiert werden konnte. Axiomatisch wurde der "Satz von der isogonalen Punktverwandtschaft" (in einer gruppentheoretischen Umformulierung) gefordert und dann über ihn und einen Satz von Schütte die Repräsentierbarkeit der Orthogonalitätsrelation der Ebene durch eine Hermitesche Form f_α nachgewiesen.

HAVEL, V.: Ternary halfgroupoids and coordinatization

a) The generalizations of Hall coordinatization principle onto general ternary rings.

b) The geometric significance of autotopisms of ternary (half)groupoids.

c) The characterization of one type of geometric systems closely related to pseudo planes.

HAVLICEK, K.: Über eine geometrische Interpretation der Tetraedergruppe

Es wurde folgende Konstruktion gezeigt:

In der projektiven Ebene erzeugt die Tetraedergruppe die Konfiguration von 12 Punkten und 3 Kegelschnitten des Typus $/ 12_2, 3_8 /$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Alle Konfigurationskegelschnitte haben ein gemeinsames Polardreieck.
2. Jeder Konfigurationskegelschnitt geht in den anderen Konfigurationskegelschnitt mittels einer nicht homologischen periodischen Kollineation mit der Periode 3 über.

Die Konstruktion, die für die Tetraedergruppe charakteristisch ist, beruht auf einer Faktorgruppe der Tetraedergruppe, und der zugehörige

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

natürliche Homomorphismus kann in dieser Konfiguration anschaulich gedeutet werden.

HÜBNER, G.: Klassifikation und Beispiele räumlicher absoluter Geometrien

Die metrischen Räume nach dem Axiomensystem von Ahrens (Math. Z. 71, 1959) werden in Typen eingeteilt und durch Beispiele belegt. Die hyperbolische Metrik wird durch Axiom H: "Es gibt stark unverbindbare Ebenen" gekennzeichnet. (Stark unverbindbare Ebenen werden durch eine gewisse Translations-Invarianz charakterisiert).

Zur Angabe von Beispielen werden die Verfahren von Bachmann (Aufbau d. Geom. aus d. Spiegelungsbegriff) auf beliebige Dimension verallgemeinert. Das Verfahren über Bewertungen von Bachmann-Pejas (Math. Ann. 140, 1960) wird zudem auf beliebige Metrik ausgedehnt. Über dem Körper der rationalen Zahlen erhält man jeweils Teilgeometrien bis zur Dimension vier.

JUNKERS, W.: Über normale Zwischenbeziehungen in affinen Geometrien

Jeder normalen mehrwertigen Ordnungsfunktion auf einem affinen Raum $\mathfrak{R}$ beliebiger Dimension ≥ 2 kann eine "normale" Zwischenbeziehung in $\mathfrak{R}$ zugeordnet werden. Die Tragweite der zugrundeliegenden Definition, die sich früher bei der Untersuchung über Konvexität bei mehrwertigen Ordnungsfunktionen als geeignet erwiesen hat, wurde nun systematisch untersucht. Es lassen sich acht (logisch voneinander unabhängige) Eigenschaften der normalen Zwischenbeziehungen angeben, die sich im Falle eines desarguesschen Raumes als charakteristisch erweisen. Darüber hinaus besteht in diesem Falle ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang zwischen den normalen Ordnungsfunktionen einerseits und den Zwischenbeziehungen mit jenen acht Eigenschaften andererseits.

KINDER, H.: Die Orthogonalität in orthokomplementierten modularen Verbänden

Man kann die orthokomplementierten modularen Verbände (s. BIRKHOFF, lattice theory) der Länge n identifizieren mit den Strukturen M, $\perp$, wobei $\perp$ eine irreflexive symmetrische zweistellige Relation in der nichtleeren Menge M ist mit der Verbindbarkeitsaussage

(V_n) zu $a_1, \ldots, a_{n-1}$ gibt es a mit $a \perp a_1, \ldots, a_{n-1}$

und der Eindeutigkeitsaussage

(E_n) aus $a_1 \perp \ldots \perp a_{n-2} \perp a, b$ und $x \perp a, b$ und $a_1, \ldots, a_{n-2} \perp y$ folgt $x \perp y$ oder $a = b$.

Anwendungen:

1. Charakterisierung der $O_n(K, f)$ und $PO_n(K, f)$ vom Index 0 als aus involutorischen Elementen erzeugte Gruppen.
2. Axiomatisierung der (n-1)-dimensionalen elliptischen Geometrie durch einen selbstdualen Grundbegriff (Paar Pol-Polarhyperebene) und eine selbstduale zweistellige Relation (Verknüpftsein der Paare).

KLOPSCH, P.: Invariante metrische Ebenen über globalen Körpern

Eine metrische Ebene E heißt invariant, wenn für jede Bewegung α ihrer Idealebene $E\alpha \subseteq E$ gilt. Man kennt die invarianten metrischen Ebenen, deren Idealebenen nicht elliptisch-ordinär sind.

Durch Lokalisation läßt sich der folgende Satz beweisen:
Sei E eine nicht-elliptische invariante metrische Ebene über einem globalen Körper (von Charakteristik $\neq 2$) und ihre Idealebene I(E) elliptisch-ordinär.

Dann ist E Durchschnitt endlich vieler halbelliptischer Teilebenen von I(E).

LENZ, H.: Zur Axiomatik der absoluten Geometrie des Raumes

Der klassische Aufbau von Euklid-Hilbert setzt in den Axiomen nichts über die Existenz räumlicher Bewegungen voraus, sondern nur über Bewegungen von Ebenen aufeinander. Es wird ein analoger Aufbau vorgeschlagen, der keine Anordnungsaxiome benötigt.

LINGENBERG, R.: Metrische Ebenen mit dreiseitverbindbaren Punkten

Es wird über die Tragweite der Existenz von dreiseitverbindbaren Punkten in einer metrischen Ebene berichtet. Dabei wird eine metrische Ebene als Gruppenebene E(G, S) einer S-Gruppe (G, S) gegeben, d.h. einer Gruppe G mit einem nur aus involutorischen Elementen bestehenden Erzeugendensystem S, für welche der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt. Ein Punkt P in E(G, S) heißt dreiseitverbindbar, wenn er für je drei Punkte, die paarweise verbindbar und voneinander verschieden sind, mit wenigstens einem dieser Punkte verbindbar ist. Gibt es dabei drei Punkte, so daß P mit genau einem verbindbar ist, so heißt P 1-dreiseitverbindbar. Ist P mit allen Punkten verbindbar, so heißt P 3-dreiseitverbindbar. Folgende Forderung kann dann als Grundlage für eine absolute Geometrie der Ebene verwendet werden:

Es gibt mindestens einen 1-dreiseitverbindbaren Punkt oder mindestens einen 3-dreiseitverbindbaren Punkt G(ab) mit $ab \neq ba$. Dieses Axiom zusammen mit der Forderung der Existenz mindestens eines "allgemeinen" Dreiseits in E(G, S) und mindestens einer Senkrechten zu jeder Geraden in E(G, S) ermöglicht eine volle "Begründung".

MÄURER, H.: Die Automorphismengruppe der Lie-Geometrie

Ausgehend von einer Laguerre-Geometrie $(\mathfrak{S}, \mathfrak{K}, \in)$ (die Elemente von $\mathfrak{K}$ seien ausgezeichnete Teilmengen von $\mathfrak{S}$), in der die Parallelität zweier Elemente $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$ dadurch erklärt ist, daß entweder $S_1 = S_2$ ist oder

kein $z \in \mathfrak{Z}$ mit $S_1, S_2 \in z$ existiert, kann eine Lie-Geometrie $(\mathfrak{L}, I)$ konstruiert werden.

Für die folgenden Mengen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{L}$ wurde die Automorphismengruppe von $(\mathfrak{L}, I)$ untersucht:

W sei ein Vektorraum über einem Körper K (Char $K \neq 2$) und V ein eindimensionaler Unterraum. Im Unterraumverband von W/V ($\dim W/V \geq 3$) sei eine Polarität π vom Index 1 gegeben. Dann sei $\mathfrak{S}$ die Menge der von V verschiedenen eindimensionalen Unterräume S von W, für die $(S+V) \subseteq (S+V)^{\pi}$ gilt. Für $W = V \oplus C$ sei $\{S \in \mathfrak{S} / S \subseteq C\}$ ein Element von $\mathfrak{Z}$ und alle Elemente von $\mathfrak{Z}$ mögen so erhalten werden.

MATHIAK, K.: Homomorphismen desarguesscher projektiver Ebenen

Die von einem Homomorphismus induzierte Klasseneinteilung der Punkte einer Geraden kann durch folgende gleichwertige Bedingungen gekennzeichnet werden:

(1) Für jeden Viereckschnitt $Q(ABC, A'B'C')$ der Geraden gilt:
$A, A' \not\sim B \sim C \Longrightarrow B' \sim C'$.

(2) Für jede Projektivität σ, die die Gerade in sich überführt und Produkt zweier Perspektiven ist, gilt: $B \sim C \Longrightarrow B^{\sigma} \sim C^{\sigma}$, falls $B \sim C$ nicht äquivalent zu den Fixpunkten von σ ist. (Man kann zeigen, daß man sich auf solche σ beschränken kann, deren Fixpunkte $\in \{A, A'\}$ sind, $A \not\sim A'$ fest gewählt.)

In einer desarguesschen projektiven Ebene gilt dann

SATZ: 1. Die von einem Homomorphismus induzierte Klasseneinteilung der Punkte einer Geraden erfüllt die Bedingungen (1) und (2).

2. Erfüllt umgekehrt eine Klasseneinteilung der Punkte einer Geraden mit mindestens 3 Klassen die Bedingungen (1) oder (2), so gibt es einen Homomorphismus, der auf den Geraden die Klasseneinteilung der Punkte induziert.

MELCHIOR, U.: Eine Kennzeichnung der zweidimensionalen projektiven linearen Gruppe über gewissen lokalen Ringen.

Die Gruppe $PGL(2, L)$ über einem kommutativen lokalen Ring L mit 1, sowie $L/N \neq GF(2)$ und $N^2 = 0$ für das maximale Ideal N von L wurde gekennzeichnet als Permutationsgruppe auf der projektiven Geraden $P(L)$ über L.

Diese Kennzeichnung lieferte die Hilfsmittel zum Beweis folgenden Satzes:

Für eine Laguerre-Ebene im engeren Sinne E sind folgende Aussagen äquivalent:

(A) In E gilt der Satz von Miquel.

(B) E besitzt eine Gruppe von Automorphismen T mit folgenden beiden Eigenschaften:

(1) T ist minimal transitiv auf den Tripeln paarweise nicht paralleler Speere aus E.

(2) Automorphismen aus T, die zwei nicht parallele Speere vertauschen, sind involutorisch.

MEYER, K.: Transvektionsrelationen in metrischen Vektorräumen der Charakteristik 2

Es sei $V = V_n(K, q)$ ein n-dimensionaler metrischer halbeinfacher Vektorraum über einem Körper K mit der Charakteristik 2, dessen Elementanzahl $o(K) \geq 4n$ ist. Zu jeder Kette von Vektoren $(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$ gehört eine orthogonale Transvektionszerlegung $S_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot S_{\alpha_j}$ (bei char $K \neq 2$ spricht man von Spiegelungszerlegungen) einer orthogonalen Transformation. In der Menge der Ketten führen sog. elementare Umformungen (d. s. triviale Kürzungen und Erweiterungen und Umformungen mit dem Dreispiegelungssatz) zur Äquivalenzrelation "verwandt". Es wird gezeigt: Jede Transvektionsrelation $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2r})$ (d.h.

$S_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot S_{\alpha_{2r}} = 1$ aus O_n) ist zur leeren Kette verwandt. Hieraus folgt: Alle Ketten, die Spiegelungszerlegungen einer festen orthogonalen Transformation ergeben, sind untereinander verwandt.

Damit kann ohne Benutzung der CLIFFORDalgebra die Spinornorm definiert werden. Die Überlegungen sind von der Charakteristik unabhängig. (Vgl. BECKEN bei char $K \neq 2$, J. reine angew. M. Bd. 210!).

MISFELD, J.: Beziehungen zwischen Anordnung und Topologie in projektiven Räumen

Ein n-dimensionaler projektiver Raum Π heiße topologischer projektiver Raum (t.p.R.), wenn die Menge der k-dimensionalen Teilräume jeweils topologische Räume sind ($0 \leq k \leq n-1$), so daß Verbindungsraum und Schnittraumbildung stetige Operationen sind ("starke Verträglichkeitsbedingung"). Diese Definition kann als Verallgemeinerung des Begriffs des 3-dim. t.p.R. von KOLMOGOROFF angesehen werden. Im desarguesschen Fall hat Π dann projektive Koordinatentopologie. Das ist nicht der Fall, wenn man nur einen t.p.R. mit "schwacher Verträglichkeit" (d.h. Zentralprojektionen des Raumes auf eine Hyperebene sind stetig; Bedingung von LENZ) hat. Definiert man in einem SPERNERsch halbgeordneten projektiven Raum eine Topologie τ dadurch, daß man mittels des Trennsymbols durch zwei verschiedene Hyperebenen eine Klasseneinteilung des projektiven Raumes gewinnt und diese Klassen als Subbasis der Topologie nimmt, so gilt der

SATZ: (Π, τ) ist ein t.p.R. mit schwacher Verträglichkeit. Ist Π voll angeordnet (SPERNERsche Ordnungsfunktion mit $Z = 1$ gegeben), so ist (Π, τ) sogar ein t.p.R. mit starker Verträglichkeit. (Im Falle einer vollen Anordnung und dim $\Pi = 2$ ergibt sich hieraus das Resultat von WYLER).

Umgekehrt ist jeder endl. dim. desarguessche zusammenhängende t.p.R., der nach Herausnahme zweier Hyperebenen unzusammenhängend ist,

voll anordnungsfähig und erweist sich als isomorph zu einer reellen projektiven Geometrie.

PAVLOVIČ, S.V.: Konstruktion von Fastkörpern im(1, 3)-Gewebe

Aus der Gesamtheit der (m, n)-Gewebe (Gewebe mit m ausgezeichneten Punkten und n ausgezeichneten Richtungen) hat man folgende Probleme in (1, 2)- bzw. (1, 3)-Geweben betrachtet:

(1) das Aufstellen eines neuen algebraischen Axiomensystems,

(2) den Beweis des Satzes:
Thomsenbedingung $\Longrightarrow$ Reidemeisterbedingung im (1, 2)-Gewebe,

(3) die Konstruktion von Körpern bzw. Fastkörpern im (1, 3)-Gewebe.

PEJAS, W.: Zur Campbell-Hausdorff-Formel

Sei F die freie assoziative Algebra in 2 Erzeugenden x, y (über $\mathbb{R}$), L die von x, y erzeugte Lie-Unteralgebra von F. Es gilt:

Jedes $h \in F$ ist von der From $h = \Sigma_i S_{n_i}(f_1, \ldots, f_{n_i})$ mit $f_i \in L$, wobei $S_n(y_1, \ldots, y_n) := \Sigma_\sigma y_{1\sigma} \ldots y_{n\sigma}$ (Summe über alle Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$) ist.

Wendet man dies in der Potenzreihenentwicklung $\log(\exp\alpha \cdot \exp\beta) = \sum_{i,j} \frac{1}{i!\,j!} \alpha^i \beta^j$ (log) (1) der Multiplikationsfunktion einer analytischen Gruppe auf die Ausdrücke $\alpha^i \beta^j$ an, so erhält man die qualitative Aussage der (nichtformalen) Campbell-Hausdorff-Formel, wonach die Terme dieser Reihe alle von der Form $C_h(\alpha, \beta)$ mit $C_h \in L$ sind.

PIEPER, J.: Zweiseitige geschlitzte Inzidenzgruppen

Es sei $G(\cdot, \gamma)$ eine desarguessche geschlitzte Inzidenzgruppe (Karzel und Meissner) mit $\dim G(\gamma) \geq 2$ und $(F(t), E(\cdot), K(t, \cdot))$ der zuge-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

hörige normale lokale Fastmodul. $\underline{1}$ sei der affine Kern von 1 in $G(\gamma)$ und $^G/\underline{1}$ der Quotientenraum bzgl. der binären Relation nach $\underline{1}$. Dann gilt:

1. $^G/\underline{1}$ ist zweiseitige projektive Inzidenzgruppe, wenn G zweiseitig ist.
2. Wenn G zweiseitig ist und $\dim {}^G/\underline{1} \geq 2$ gilt, dann ist $(F(t), E(\cdot), K(t, \cdot))$ eine lokale Algebra über K.
3. Wenn G kommutativ ist und $\dim {}^G/\underline{1} \geq 2$ gilt, dann ist $(F(t), E(\cdot), K(t, \cdot))$ eine kommutative lokale Algebra über K.
4. Es gibt kommutative (affine) Inzidenzgruppen mit $\dim {}^G/\underline{1} = 0$, die nicht pappussch sind (Translationsgeometrien).
5. Es gibt kommutative Inzidenzgruppen mit $\dim {}^G/\underline{1} = 1$, deren zugehöriger Fastmodul einen echten Fastkörper enthält.

SALZMANN, H.: <u>Geometrien auf Flächen</u>

Für eine topologische Inzidenzstruktur mit eindeutiger Verbindbarkeit und zusammenhängenden Geraden sind die folgenden Aussagen äquivalent, falls die Punktmenge M eine Fläche ist:

(1) M ist kompakt,

(2) M ist homöomorph zur reellen projektiven Ebene,

(3) alle Geraden sind homöomorph zur Kreislinie,

(4) je zwei Geraden schneiden sich.

Ebenso sind äquivalent:

(1) M ist orientierbar,

(2) M ist homöomorph zur reellen affinen Ebene,

(3) alle Geraden sind homöomorph zur Zahlengeraden,

(4) zu jeder Geraden gibt es durch jeden Punkt außerhalb wenigstens eine Nichtschneidende. Liegt keiner dieser beiden Fälle vor, so ist M ein Möbiusband.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

SEIDEL, J.J.: Orthogonal matrices with zero diagonal

Problem: The construction of square matrices C of order q+1, with diagonal elements 0 and other elements +1 und -1, satisfying $CC^T = qI$.

To the projectiv line PG(1, q), $q = p^k$, p prime, $p \neq 2$, there is attached a class of equivalent matrices C, symmetric if $q+1 \equiv 2 \pmod 4$ and antisymmetric if $q+1 \equiv 0 \pmod 4$. This class contains a member of the form

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} .$$

with A and B circulant, B symmetric and A symmetric or antisymmetric. There exist other symmetric matrices C, of order 26 and of order 226.

STRAMBACH, K.: Salzmann-Ebenen

Unter einer Salzmann-Ebene versteht man eine Geometrie E, deren Punktmenge P zur reellen affinen Ebene homöomorph ist und deren Geraden abgeschlossene zur reellen Zahlengeraden homöomorphe Teilmengen von P sind, so daß durch je zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht.

Es wurden die echten (d.h. nichtdesarguesschen) Moulton-Ebenen unter den Salzmann-Ebenen durch gruppentheoretische Eigenschaften ihrer Kollineationsgruppen charakterisiert. Es gilt:

Die echten Moulton-Ebenen bilden die einzige Klasse von Salzmann-Ebenen, die eine zur einfach zusammenhängenden Überlagerungsgruppe von $PSL_2(R)$ isomorphe Kollineationsgruppe gestatten. Sie können auch als die einzigen Salzmann-Ebenen charakterisiert werden, die eine mindestens zweidimensionale über ihrer Zusammenhangskomponente nicht zerfallende Gruppe von Kollineationen zulassen. Eine weitere Kennzeichnung der echten Moulton-Ebenen wird dadurch geliefert, daß sie als einzige Klasse von Salzmann-Ebenen mindestens

zweidimensionale Kollineationsgruppen besitzen, die sich nicht in die volle Kollineationsgruppe der reellen projektiven Ebene einbetten lassen.

WILLE, R.: Koordinatisierung allgemeiner Geometrien

Eine allgemeine Geometrie Γ (s. B. Jónnson, Lattice-theoretic approach to projective and affine geometry, Symposium on the Axiomatic Method (1959), p. 188-203) heiße projektiv bzw. affin koordinatisierbar, wenn der Verband $\mathfrak{B}(\Gamma)$ aller Teilräume von Γ isomorph ist zum Verband aller Kongruenzrelationen bzw. Kongruenzklassen einer allgemeinen Algebra A mit endlichstelligen Operationen; A wird dann projektive bzw. affine Koordinatisierungsalgebra genannt.

P(1): Jede Geometrie ist projektiv koordinatisierbar.

P(2): A ist genau dann projektive Koordinatisierungsalgebra, wenn der Verband der Kongruenzrelationen von A atomistisch ist.

A(2): Jede Algebra ist affine Koordinatisierungsalgebra.

A(1): Γ ist genau dann affin koordinatisierbar, wenn gilt:

(i) Jede Punktmenge von Γ, die das Erzeugnis aller ihrer dreipunktigen Teilmengen enthält, ist Teilraum von Γ.

(ii) Es existiert ein schwacher Parallelismus Π auf Γ, so daß es zu jedem Punkt p im Erzeugnis der Punkte q, r und s Π-Dilationen $\delta_1, \ldots, \delta_n$ gibt mit $q \in \{q, r, s\}\delta_1$, $p \in \{q, r, s\}\delta_n$ und $\{q, r, s\}\delta_i \cap \{q, r, s\}\delta_{i+1} \neq \emptyset$.

ZAPPA, G.: Sur les S-partitions régulières des groupes finis et leurs applications géométriques

Soit G un groupe, S un sous-groupe de G, et Π un ensemble de sous-groupes de G. Π est dit une S-partition si $(x \in G,\ x \notin S) \Longrightarrow \exists$ un et un seul $H \in \Pi$ t.q. $x \in SH$. Π est dite régulière si

$(s \in S,\ H \in \Pi) \Longrightarrow s^{-1} H s \in \Pi$.

Un espace général est un ensemble d' éléments, appelés "points", ayant des sous-ensembles, appelés "droites", tel que:

1) Une droite a au moins 2 points;
2) Pour 2 points passe une et une seule droite. Un espace général Σ est dit r-transitif si le groupe des collinéations de Σ qui fixe une droite r quelconque est transitif sur les points de r.

Si G est un groupe, S un sous-groupe antinormal de G, et Π une S-partition régulière, les classes latérales $Sx (x \in G)$ sont les points, et les complexes $SHx (H \in \Pi,\ x \in G)$ sont les droites d' un espace général r-transitif. Tout espace général r-transitif peut être obtenu par ce procédé.

Soit G un groupe fini supersoluble, S un sous-groupe de Sylow antinormal d' ordre q^{β} (q premier) de G, et Π une S-partition régulière de G. Si les sous-groupes dans Π sont des sous-groupes de Sylow d' ordre premier avec q, on a: $|G| = p^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma}$ (p, r premier, $p < q$, $p < r$, $q \neq r$), $G = PSR$, $|P| = p^{\alpha}$, $|R| = r^{\gamma}$, P est un sous-groupe normal de G, R est un sous-groupe cyclic, PR est un groupe de Frobenius, S et R sont permutables élément par élément, Π est formée des sous-groupes de Sylow de PR.

G. Finke (Kiel)