Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 9

2. Arbeitstagung des Frankfurter Seminars

Leitung: R. BAER

24. bis 28. Mai 1967

In dieser zwölften der Arbeitstagungen von Professor Baer wurden in Vorträgen und Diskussionen im wesentlichen Probleme aus der Gruppentheorie und Geometrie behandelt; hier liegt ja auch das Hauptinteresse des Baerschen Kreises. Viele Anregungen in den Diskussionen verdanken wir unseren Gästen.

Viele Ausführungen nehmen Bezug auf frühere Tagungen. So ergänzte D. Betten zum Beispiel einen Vortrag von H. Salzmann (Tagung für Gruppen und Geometrie, 31.7.-6.8.66), J. Cofman benutzte einen Satz von Ch. Hering (Tagung von Prof. Baer, 5.-9.1.66) und H. Bender (Tagung für Gruppen und Geometrie, 31.7.-6.8.66), ebenso benutzte J. Maetzke einen Satz von Ch. Hering (Tagung für Gruppen und Geometrie, 31.7.-6.8.66).

Teilnehmer:

Ayoub, R. und C.W., Pennsylvania, z.Zt. Frankfurt

Cofman, J., London

Hering, Ch., Mainz

Kappe, W., Columbus/Ohio

Kegel, H.O., Köln

Lüneburg, H., Mainz

Newell, M., London

Ostrom, T.G., Pulmann/USA, z.Zt. Frankfurt

Wille, R., Bonn

Aus Frankfurt waren gekommen:

Amberg, B.	Fischer, B.	Hotzel, El.	Scheer, D.
Baer, R.	Graebe, P.	Krause, G.	Schmidt, R.
Bender, H.	Göbel, R.	Müller, U.	Schoenwaelder, U.
Birkenstock, H.J.	Groh, H.J.	Plaumann, P.	Strambach, K.
Brungs, H.H.	Günther, K.D.	Polley, C.	Timmesfeld, F.G.
Betten, D.	Hahn, S.	Maetzke, J.	
Faltings, K.	Hausen, J.	Ringel, C.M.	
Felgner, U.	Heineken, H.	Salzmann, H.	

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge:

AMBERG, B.: Noethersche Gruppen mit Normalisatorbedingung

SATZ: Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent:

(1) G besitzt eine noethersche, auflösbare Untergruppe von endlichem Index.

(2)
a) G ist noethersch.

b) Ist X eine normalisatorgleiche Untergruppe des Faktors F von G mit unendlichem Index $|F : X|$, so gibt es eine Untergruppe Y von F mit $Y^X = Y$, $Y \not\subseteq X$, $(X \cap Y)^{\langle X, Y\rangle} = X \cap Y$.

c) Torsionsfaktoren von G sind endlich.

d) Ist (U_i) eine absteigende Folge von Untergruppen von G, so ist $|U_i : U_{i+1}|$ endlich für wenigstens ein i.

AYOUB, Ch.: On a property of solvable groups

G will be said to have property (*) if given $a, b (\neq 1, 1)$ there is a subgroup $C \triangleleft G$ such that $[a, b] \in C$ but not both a and b are in C.

THEOREM. If G is a finitely generated group which satisfies (*) and the minimum condition for normal subgroups, G is finite and solvable.

THEOREM. If G satisfies (*) locally, G satisfies (*).

Property (Q): G satisfies (Q) if for A B G with A maximal in B, there is a subgroup NB such that $B = AN$ and $A \cap N \triangleleft B$.

Property (Q'): G satisfies (Q') if for $A \subset B \subseteq G$ with A maximal in B, either $A \triangleleft B$ or there is a proper subgroup $N \triangleleft B$ such that $B = AN$.

THEOREM. Let G satisfy the minimum condition for subgroups. Then the following are equivalent: 1) G is solvable, 2) G satisfies (*), 3) G satisfies (Q), 4) G satisfies (Q').

AYOUB, R.: A remark on groups of exponent 9.

Let G be a group and $G = G_1 \supseteq G \supseteq \dots \supseteq G_n$ the lower central series. We denote the engel element $(\ldots(y,x)\underbrace{,\ldots)}_{r}$ by $yx^{(r)}$. Sanov proved the engel congruence for groups of exponent p^2: $yx^{(2p^2-1)} \equiv 1 \ (G_{2p^2+1})$. (He actually proved a more general theorem for groups of exponent p^a).

We prove the following theorem:

If G is a group of exponent p^2, then

$$yx^{(2p^2 - \frac{p-1}{2} + 1)} \equiv 1 \quad (G_{2p^2 - \frac{p-1}{2} + 3}).$$

Sanov used ideal theory in the associated lie ring whereas we use P. Hall's collection formula.

In the case of exponent 9 we prove the sharper result

Theorem. If $y \in G_t$, then

$$yx^{(15)} \equiv 1 \quad (G_{\min(2t+21,\ 9t+6)}).$$

BETTEN, D.: Topologische Geometrien auf dem Möbiusband

In einer Geometrie $(B, \underline{L})$ auf dem Möbiusband ist jede Gerade entweder homöomorph zur reellen Zahlengeraden (R-Gerade) oder homöomorph zur Kreislinie (S-Gerade). Durch jeden Punkt $p \in B$ geht entweder genau eine R-Gerade (p von erster Art) oder mehrere R-Geraden (p von zweiter Art). Je nachdem ob in der Geometrie nur Punkte erster Art oder nur Punkte zweiter Art oder Punkte beider Arten vorkommen, läßt sich die Geometrie $(B, \underline{L})$ aus einer eindeutig bestimmten projektiven Geometrie $(P, \underline{L})$ gewinnen durch Weglassen eines Punktes bzw. einer zur abgeschlossenen Kreisscheibe homöomorphen Punktmenge bzw. eines abgeschlossenen Intervalls auf einer Geraden.

Da die projektiven Geometrien $(P, \underline{L})$ von H. Salzmann vollständig klassifiziert wurden, sind durch dieses Ergebnis auch die Geometrien mit mindestens 3-dimensionaler Kollineationsgruppe auf dem Möbiusband bekannt.

COFMAN, J.: Transitivität auf geordneten Dreiecken in endlichen projektiven Ebenen

Sei Π eine endliche projektive Ebene und O eine Punktmenge aus Π, deren Elemente nicht alle kollinear sind, von denen aber mindestens drei auf einer Geraden liegen. Sei Δ eine Kollineationsgruppe von Π, die O auf

sich abbildet, auf den geordneten, nichtkollinearen Punkttripeln von O transitiv operiert und keine planaren Involutionen enthält. Dann bilden die Punkte aus O entweder

a) eine desarguessche projektive Ebene und Δ enthält die kleine projektive Gruppe dieser Unterebene, oder

b) eine affine Unterebene $\mathfrak{A}_o$, die eine Translationsebene ist,und Δ enthält die Translationsgruppe von $\mathfrak{A}_o$.

FELGNER, U.: Zur v. Neumann-Bernays-Gödelschen Mengenlehre

Es wurden die folgenden Sätze bewiesen:

1) Sei $\Phi \equiv \bigvee_x \Psi$ eine Aussage, in der alle Variable Mengenvariable sind und wo Ψ ein beschränkter Ausdruck ist; sei θ ein Axiom ($\theta \in \mathfrak{L}$) und $\Sigma \cup \{\theta\} \vdash \Phi$. Es gilt bereits $\Sigma \vdash \Phi$, wenn ein vollständiges Modell μ (vgl. SHEPERSON, JSL 16) von $T = \{\mathfrak{L}, \Sigma \cup \{\theta\}\}$ in $T_\Sigma = \{\mathfrak{L}, \Sigma\}$ existiert.

1) verallgemeinert einen Satz von A. LÉVY (Memoirs AMS 57 (1965), Theorem 44); $\mathfrak{L}$ ist die Sprache und Σ das GÖDELsche Axiomensystem der NBG-Mengenlehre.

2) Die Verschärfung $\bigwedge_\xi \bigwedge_\eta [\mathfrak{Cls}(\xi) \wedge \eta \in \xi) \Rightarrow \mathfrak{M}(\eta)]$ des Axioms (A 2) von GÖDEL (vgl. SHEPERDSON, JSL 16, S. 162) ist vom Axiomensystem $\Sigma^* \cup \{GCH\}$ unabhängig.

3) Der Satz $\bigwedge_\xi [\mathfrak{M}(\xi) \Longleftrightarrow \bigvee_\eta (\xi \in \eta)]$ ist von $\Sigma^* \cup \{GCH\}$ unabhängig.

Die Beweise von 2) und 3), die syntaktisch geführt wurden, verwenden, daß $V = L$ von $\Sigma^* \cup \{GCH\}$ unabhängig ist (COHEN, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 50/51).

GÖBEL, R.: Kartesisch abgeschlossene Klassen von Hyper-e^a-Gruppen

Definition: Es seien e und a gruppentheoretische Eigenschaften.

Eine Gruppe G ist dann eine Hyper-e^a-Gruppe, wenn jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G einen e-Normalteiler besitzt,in dem G eine a-Gruppe von Automorphismen induziert.

SATZ: Es seien a und e gruppentheoretische Eigenschaften, und e vererbe sich auf Normalteiler. Zentren von Hyper-e^a-Gruppen seien wieder Hyper-e -Gruppen. Ist k eine kartesisch abgeschlossene Klasse von Hyper-e^a-Gruppen, so sind für k-Gruppen äquivalent:

1) Es gibt eine Kardinalzahl $\aleph$ derart, daß alle a-Gruppen eine Mächtigkeit $< \aleph$ haben.

2) Es gibt eine Kardinalzahl $\aleph$ derart, daß alle e-Gruppen eine Mächtigkeit $< \aleph$ haben.

3) a ist die nur aus 1 bestehende Gruppenklasse t.

4) Es gibt eine natürliche Zahl n derart, daß alle k-Gruppen nilpotent der Klasse n sind.

Besitzt außerdem jede abelsche Hyper-e-Gruppe eine endliche e-Reihe, so ist mit 1) bis 4) äquivalent:

5) Jede k-Gruppe besitzt eine endliche Zentralreihe mit e-Faktoren.

GÜNTHER, K.-D.: <u>Kettenbedingungen für Isomorphietypen von Untergruppen</u>

Der folgende Satz ist ein Beispiel dafür, daß man auch im (fast-) torsionsfreien Fall eine "absteigende" Kettenbedingung aus fastauflösbaren Gruppen sogar fast-abelsche Gruppen "machen" kann:

SATZ: Die folgenden Eigenschaften der noetherschen fast-auflösbaren Gruppe G sind äquivalent:

1) G ist fast-abelsch.
2) G hat nur endlich viele Isomorphietypen von Untergruppen.
3) In G gibt es keine unendliche streng absteigende Folge aus paarweise nicht isomorphen Untergruppen.

Durch ähnliche Kettenbedingungen für Ketten aus paarweise isomorphen oder paarweise nicht isomorphen Untergruppen oder für Ketten von Normalteilern mit paarweise isomorphen oder paarweise nicht isomorphen Faktorgruppen lassen sich auch die artinschen fast-abelschen, die fastpolyzyklischen, die endlichen und andere Gruppenklassen charakterisieren.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

HAUSEN, J.:

Der folgende Satz wurde bewiesen:

SATZ: Die Klasse $\mathfrak{K}$ abelscher Gruppen ist dann und nur dann die Klasse aller endlich erzeugbaren abelschen Gruppen, wenn $\mathfrak{K}$ die folgenden Eigenschaften hat:

1) Abelsche Automorphismengruppen von $\mathfrak{K}$-Gruppen sind $\mathfrak{K}$-Gruppen
2) Jede $\mathfrak{K}$-Gruppe ist abzählbar
3) $\mathfrak{K}$ ist epimorphismenvererblich
4) Die direkte Summe zweier $\mathfrak{K}$-Gruppen ist eine $\mathfrak{K}$-Gruppe
5) Es gibt eine unendliche Gruppe in $\mathfrak{K}$

Auf ähnliche Weise können wir auch die Klasse aller endlichen abelschen Gruppen und die Klasse aller Minimaxgruppen mit endlicher Torsionsuntergruppe charakterisieren.

KAPPE, W.: <u>Über das Antizentrum nilpotenter Gruppen</u>

Es sei $RG = \{x \in G | \text{ aus } xg = gx \text{ folgt } \{x, g\} \text{ zyklisch}\}$.
Das Antizentrum von G ist die von RG erzeugte Untergruppe von G.
Ergebnisse:

1) Lokal nilpotente Gruppen mit nichttrivialem Antizentrum sind abelsch oder periodisch.
2) In nichtabelschen nilpotenten p-Gruppen wird das Antizentrum von den selbstzentralisierenden Elementen erzeugt.
3) Ist in einer periodischen Gruppe der von einem selbstzentralisierenden Element erzeugte Normalteiler nilpotent, so ist die Gruppe endlich.
4) In einer endlichen p-Gruppe kleiner Klasse mit einem selbstzentralisierenden Element wird die Minimalzahl der Erzeugenden durch die Klasse der Gruppe beschränkt.

KEGEL, O.H.: <u>Zentralisatoren in lokal endlichen Gruppen</u>

SATZ: In jeder unendlichen, lokal endlichen Gruppe G gibt es ein Element $\neq 1$, dessen Zentralisator in G die gleiche Kardinalität hat

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

wie G.

Dieser Satz verallgemeinert ein Ergebnis von Šunkov, Sibirskĭ, Mat. Ž. 1967.

LÜNEBURG, H.: Endliche Möbiusebenen

In diesem Vortrag wurde ein Überblick gegeben über die Entwicklung der Theorie der endlichen Möbiusebenen seit der ersten Kindertagung im Januar 1962.

MAETZKE, J.: Nicht-auflösbare (endliche) Gruppen, in denen je zwei Untergruppen gleicher Ordnung konjugiert sind

Sei G eine nicht-auflösbare endliche Gruppe, in der je zwei Untergruppen gleicher Ordnung konjugiert sind. Dann ist jede nicht-zyklische Sylowgruppe ungerader Ordnung elementar-abelsch der Ordnung p^2 oder p^3, und G enthält einen Hall'schen Normalteiler $K = NR$, wobei R eine (Z)-Gruppe und N das direkte Produkt aller nicht-zyklischen Sylowgruppen ungerader Ordnung von G ist; außerdem gilt eine der folgenden Aussagen:

i) $G = K \times L$, $L \cong PSL(2, 2^n)$, $n = 2$ oder 3.

ii) $G = (K \times L)S$, $L \cong PSL(2, 2^5)$, L ist Hall'scher Normalteiler von G, und S ist eine zyklische 5-Sylowgruppe von G.

iii) $G = KL$, $L \cong SL(2, 5)$.

Ist $R = 1$, so ist in den Fällen i) und ii) auch $N = 1$; im Fall iii) ist dann $o(N) = 11^i \cdot 19^j \cdot 29^k \cdot 59^r$ für $i, j, k, r = 0$ oder 2.

NEWELL, M.: Soluble min-by-max groups

A group G is called a min-by-max group if it contains a normal subgroup N which satisfies the minimum condition and such that the factor group G/N satisfies the maximum condition.

Theorem: A soluble group G is a min-by-max group if and only if, the accessible abelian subgroups of G are min-by-max groups.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

OSTROM, T.G.: Collineations and Isomorphisms of a class of translation planes

Let Π' be a translation plane such that the points of Π' can be identified with the points of a Desarguesian plane Π coordinatized by a field K. There is a large class C of planes such that the mappings $(x, y) \to (xa, ya)$ on Π also act as collineations of Π:

In any case, if Π and Π' have a sufficient number of lines in common, the full collineation group of Π' is a subgroup of the collineation group of Π. For planes in C, the stabilizer of $(0,0)$ contains the mapping $(x, y) \to (xa, ya)$ as a normal subgroup.

A large subclass of C has the property that any collineation of $\Pi' \in C$ which is not in the collineation group of Π can be represented as the product of a collineation of Π which fixes $(0,0)$ with a mapping of the form $(x, y) \to (x, y^{\sigma})$, where σ is an automorphism of K. (This choice depends on the choice of coordinates for   and we do not permit $a = 0$).

PLAUMANN, P.: A generalisation of the theorem of Iwasawa-Schmidt

Theorem: For a locally compact, connected topological group G the following conditions are equivalent:

a) Every connected solvable subgroup of G is nilpotent.
b) G contains a connected nilpotent normal subgroup N and a compact semi-simple normal subgroup K such that G = NK holds.
c) The last term of the lower central series of G is compact.
d) G is the extension of a compact group by a nilpotent group.

Using this theorem and the theorem of Iwasawa-Schmidt it is easy to prove the following assertion:

Let G be a locally compact group, which is finite over its connected component of the identity. Then G is nilpotent iff all its solvable subgroups are nilpotent.

WILLE, R.: Varietäten Invarianten modularer Verbände:

Die Menge Q(V) aller Quotienten eines Verbandes V bildet mit den Relationen "transponiert" ($\square$) und "kleiner" ($<$) einen gemischten Graphen $(Q(V), \square, <)$. (B, ß) werde Quotientenbaum des modularen Verbandes V genannt, wenn $B = (B, \square, <)$ ein gemischter Graph, $(B, \square)$ ein endlicher Baum ist und für ß: $B \rightarrow Q(V)$ gilt:

1) $a \, \square \, b \Rightarrow a$ß $\square$ bß

2) $a < b \Leftrightarrow a$ß $<$ bß

3) bß nicht trivial.

Eine Abbildung μ der Klasse aller Quotientenbäume in die natürlichen Zahlen N heiße Quotientenbaum Invariante, wenn gilt:

1) Ist Aα ≅ Bß, dann ist $\mu(A, \alpha) = \mu$(B, ß)

2) Wird (A, α) von (B, ß) durch einen Verbandshomomorphismus induziert, dann ist $\mu(A, \alpha) \geq \mu$(B, ß). Eine Abbildung μ^* von einer Varietät $\mathfrak{B}$ in $N \cup \infty$ heiße Varietäten Invariante, wenn $\{V \in \mathfrak{B};\ \mu^*(V) \leq n\}$ für jedes n wieder eine Varietät ist.

SATZ: Sei μ eine Quotientenbaum Invariante und $\mu^*(V) = \sup\{\mu(B);$ B Quotientenbaum von V$\}$. Dann ist μ^* eine Varietäten Invariante für die Varietät aller modularen Verbände.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich "projektive" Länge und Breite für modulare Verbände angeben, die Varietäten Invarianten sind und Rang und Ordnung der projektiven Geometrien verallgemeinern.

H. Heineken

Gefördert durch
DFG Deutsche
Forschungsgemeinschaft