MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 11/1967

Optimierungsaufgaben
11.6. bis 16.6.1967

Die Tagung über Optimierungsaufgaben stand unter der Leitung von L.Collatz (Hamburg) und W.Wetterling (Hamburg).

Die Theorie der Optimierungsaufgaben stellt einen verhältnismäßig jungen Zweig der Mathematik dar.Angeregt vor allem von Fragestellungen der Wirtschaftswissenschaften,hat sie sich zu einem eigenständigen Gebiet der Mathematik entwickelt,welches besonders für die Numerische Mathematik auch dadurch interessant geworden ist,daß sich verschiedene Probleme bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen,Approximationsaufgaben und der Spieltheorie auf Optimierungsaufgaben zurückführen lassen.

Während die lineare Theorie als ziemlich abgerundet gelten kann,ergeben sich bei den nichtlinearen Optimierungsaufgaben noch eine ganze Reihe von offenen Fragen, worauf bei den regen Diskussionen im Anschluß an die Vorträge wiederholt hingewiesen wurde.

Die Vorträge spiegelten die verschiedenartigen Anwendungsmöglichkeiten der Optimierungsaufgaben wieder. Neben Problemen der Numerischen Mathematik,wie z.B.

linearen und nichtlinearen Randwertaufgaben und Eigenwertaufgaben wurden stochastische und ganzzahlige Programmierung behandelt und u.a. spieltheoretische,graphentheoretische und informationstheoretische Anwendungen betrachtet.

Nicht nur den anregenden wissenschaftlichen Kontakt, sondern auch die persönliche Atmosphäre werden die Teilnehmer dieser Tagung in angenehmer Erinnerung behalten. Für die hervorragende Betreuung sei der Leitung des Hauses noch einmal herzlich gedankt.

Teilnehmer

J.Albrecht, Hamburg
R.Ansorge, Clausthal-Zellerfeld
H.Bauer, München
R.Beuschel, München
W.Börsch-Supan, Mainz
E.Bredendiek, Hamburg
R.Bulirsch, München
U.Dieter, Karlsruhe
F.Fazekas, Budapest
B.Fleischmann, Hamburg
K.P.Hadeler, Hamburg
G.Hotz, Saarbrücken
P.Kall, Zürich
K.Kirchgässner, Freiburg
W.Knödel, Stuttgart
W.Krabs, Hamburg
G.Meinardus, Clausthal-Zellerfeld
P.Meissl, Wien
F.Natterer, Hamburg
W.Oettli, Zürich
H.Pudlatz, Münster
B.Riedmüller, München
F.W.Schäfke, Köln
H.Schneeberger, München
J.Schröder, Köln
J.Stoer, München
W.Törnig, Clausthal-Zellerfeld
R.S.Varga, Cleveland
R.Wais, Hamburg
H.J.Weinitschke, Berlin
H.Werner, Münster
J.Werner, Hamburg

Vortragsauszüge

W.WETTERLING: Lokal optimale Schranken bei Randwertaufgaben

Für die Lösung u einer Randwertaufgabe mit linearer, elliptischer Differentialgleichung $Lu = 0$ (in B) mit Randbedingung $u = f$ (auf Γ) sollen Schranken unter Benutzung des Randmaximumprinzips bestimmt werden. Eine Möglichkeit ist die Approximation von f durch $v = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu v_\nu$ auf Γ. Eine andere Möglichkeit ist die, daß man ein $x_0 \in B$ wählt und die kontinuierliche Optimierungsaufgabe $\text{Max}\{v(x_0) : v \leq f \text{ auf } \Gamma\}$ löst. So erhält man untere Schranken, die lokal, nämlich in x_0, optimal sind; entsprechend auch obere Schranken. Es gilt ein Existenzsatz: Falls ein zulässiges v existiert, ist diese Aufgabe lösbar. Eine Einschließung des Maximalwertes $v(x_0)$ kann durch Angabe eines dual-zulässigen $\bar{v}$ erreicht werden. Die Ergebnisse lassen sich auf den Fall zusammengesetzter Bereiche $B = \bigcup_{i=1}^{N} B_i$ übertragen. Zur numerischen Lösung der Aufgabe kann unter einschränkenden Voraussetzungen das Newtonsche Iterationsverfahren verwendet werden.

W.KNÖDEL: Ein Modell zur Berechnung optimaler Straßennetze.

Von Verkehrsingenieuren wurde folgende Aufgabe gestellt: Für ein Gebiet mit vorgegebenen Verkehrswünschen soll ein optimales Verkehrsnetz entworfen werden. Im Vortrag wird ein Modell zur Diskussion gestellt. Das Modell erfordert die Berechnung des Fundamentaltensors einer zweidimensionalen

Riemann'schen Mannigfaltigkeit und die Bestimmung eines Netzes von geodätischen Parallelkoordinaten. Das Verfahren wurde am Bäispiel der Stadt Bruchsal erprobt.

J. STOER: <u>Anmerkungen zum Satz von Kuhn und Tucker.</u>

Gegeben sei das Problem der konvexen Programmierung,

$$\text{Min}\{f(x): x \in C, F_1(x) \leq 0, F_2(x) \leq 0\}$$

zu bestimmen. Dabei sei $C \subseteq R^n$ eine konvexe Menge, $f(x)$ eine auf C definierte konvexe Funktion, $F_1(x)$ ein Vektor von endlich vielen konvexen Funktionen, die ebenfalls auf C definiert sind, $F_2(x) \equiv b-Ax$ ein Vektor von endlich vielen linearen Funktionen. Es wird folgender Satz gezeigt, der bekannte Fassungen des Satzes von Kuhn und Tucker etwas verschärft:

<u>Satz</u>: Wenn $\bar{x}$ Optimallösung ist und es ein $x_1 \in C^i$ (=relativ Inneres von C) mit $F_1(x_1) < 0$ und $F_2(x_1) \leq 0$ gibt, dann existieren Vektoren $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$, so daß $f(\bar{x}) \leq f(x) + y_1^T F_1(x) + y_2^T F_2(x)$ für alle $x \in C$.

Anhand eines Gegenbeispiels kann gezeigt werden, daß der Satz ohne die Voraussetzung, daß es ein $x_1 \in C^i$ mit $F_1(x_1) < 0$, $F_2(x_1) \leq 0$ gibt, i.a. falsch ist, selbst dann, wenn nur lineare Nebenbedingungen vorliegen.

P. KALL: <u>Über das zweistufige Problem der stochastischen Programmierung.</u>

Gegeben ist das Problem

$$(1) \quad \begin{cases} \text{Min } \psi(x) = E\{c'x + \varnothing(x,A,b)\} \\ \tilde{A}x = \tilde{b}\ ,\ x \geq 0 \end{cases}$$

wobei

$$(2)\quad \begin{cases} \Phi(x,A,b) = \text{Min } q'y \\ Wy = b-Ax \ , y \geq 0 \end{cases} .$$

Dabei sind $\tilde{A}$,W,$\tilde{b}$,q feste Matrizen bzw. Vektoren,während A,b,c stochastisch sind.Kann b-Ax mit allen möglichen Realisationen von A und b und allen in (1) zulässigen x über einer Vollkugel um den Ursprung variieren,so ist dafür,daß (2) stets eine zulässige Lösung hat,notwendig und hinreichend,daß ein lineares Restriktionensystem eine zulässige Lösung besitzt.Ist ferner $W'z \leq q$ verträglich, so ist $\psi(x)$ unter der Annahme,daß die Erwartungswerte $\bar{A},\bar{b},\bar{c}$ existieren,endlich und konvex.Ist das Wahrscheinlichkeitsmaß P(A,b) absolut stetig in bezug auf das Lebesgue-Maß $\mu(A,b)$,dann besitzt $\psi(x)$ einen stetigen Gradienten. Daher läßt sich dann auf (1) ein Zoutendijk-Verfahren anwenden.Auf Grund von Ungleichungen wird gezeigt,daß es im allgemeinen unzulässig ist,die in (1) vorkommenden Zufallsvariablen a priori durch ihre Erwartungswerte zu ersetzen und dann das dabei entstehende Linearprogramm an Stelle von (1) zu lösen.

F.FAZEKAS: <u>Neuere Optimierungen mittels der Matrixalgorithmischen Methoden(MAM).</u>

MAM in der <u>linearen Algebra</u>:transformierende (TMA),rangerzeugende(RMA),normierende(NMA),invertierende (IMA) Matrixalgorithmen;sprungweise transformierende Matrixformel:

$$A_p = A_o - (A_L - E_K) A_{KL}^{-1} A^K .$$

Anwendung auf Lösung allgemeiner,linearer Gleichungssysteme. MAM in der <u>linearen Optimierung</u>: Grundgleichung in der Hypermatrixform,als Anfangslage (SMA_o) des Simplex-Matrix-algorithmus (SMA).Erster Schritt (SMA_1):

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_o - \gamma(\hat{a}_l - \hat{e}_k)(\hat{a}^k + \hat{e}^l);$$

allgemeiner Schritt (SMA_{q+1}).
MAM für <u>spezielle Optimierungszwecke:</u> modifizierte Simplexmethode (SmMA),für Transportationsoptimierung (StMA),für ganzzahlige lineare Optimierung (SiMA,kombiniert mit

Gomory's MIF), für quadratische Optimierung (SqMA, kombiniert mit Wolfe's Methode), für verschiedene Tschebyscheff-Approximationsaufgaben (STMA), ohne-mit Bedingungsungleichheiten, einseitige, rationale Aufgabe.

H.SCHNEEBERGER: Optimierungsprobleme in der Stichprobentheorie.

Es wird gezeigt, daß sich das Problem der optimalen Schichtung und Aufteilung durch nichtlineare Programme formulieren läßt, wobei die Variablen ganzzahlig, diskret und/oder reellwertig sein können. Durch Einführung der Determinante der Varianzmatrix als verallgemeinerte Streuung ist die Verallgemeinerung auf k Variable möglich.
Weiter zeigt sich, daß die Verallgemeinerung der optimalen Aufteilung auf k Variable nach dem Vorschlag von Yates:

$$\sigma^2_{\bar{x}_i} = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h - n_h}{n_h} N_h S^2_{h x_i} \leq V_i \quad (i = 1(1)k)$$

$$\sum_{h=1}^{L} n_h = n \longrightarrow Min$$

sich in das nichtlineare Programm

$$\frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} y_h N_h^2 S^2_{h x_i} \leq V_i$$

$$y_h \leq 1 - \frac{1}{N_h} \quad , \quad y_h \geq 0$$

$$\sum_{h=1}^{L} \frac{1}{y_h + \frac{1}{N_h}} \longrightarrow Min$$

überführen läßt, dessen Lösung im zulässigen Bereich eindeutig ist.

W.KRABS: Lineare Optimierung in halbgeordneten Vektorräumen.

Betrachtet wurde das folgende Problem: E und F seien halbgeordnete normierte Vektorräume über den reellen Zahlen, $A: E \to F$ sei eine stetige lineare Abbildung und $c: E \to \mathbb{R}$ eine stetige Linearform. Unter der Nebenbedingung $A(x) \geq b$ für ein festes $b \in F$ ist $c(x)$ zum Minimum zu machen.
Diesem Problem läßt sich auf folgende Weise ein duales Problem zuordnen: Seien E^* bzw. F^* die topologischen Dualräume von E bzw. F, versehen mit den (durch die Ordnungen von E bzw. F) induzierten Ordnungen, und sei $A^*: F^* \to E^*$ die zu A adjungierte Abbildung; dann ist unter den Nebenbedingungen $A^*(y) = c$, $y \geq 0$

der Wert y(b) zum Maximum zu machen.
Unter gewissen Zusatzannahmen werden zwei Existenzsätze der folgenden Form angegeben:

$$\min_{x\in M} c(x)=\sup_{y\in N} y(b) \text{ bzw. } \max_{y\in N} y(b)=\inf_{x\in M} c(x).$$

Dabei ist $M=\{x\in E: A(x)\geq b\}$ und $N=\{y\in F^{*}: A^{*}(y)=c, y\geq 0\}$.
Weiterhin wurde die Anwendbarkeit dieser Sätze auf gewisse Spezialfälle von Optimierungsaufgaben in Funktionenräumen diskutiert.Es handelt sich dabei um Aufgaben,die in der Theorie der linearen Approximation bei unendlich vielen linearen Nebenbedingungen und im Zusammenhang mit der Lösung von elliptischen Differentialgleichungen auftreten.

K.P.HADELER: Verallgemeinerte Eigenwertaufgaben.

Sei H der reelle R^n, $\mathcal{H}$ der Raum der reellen,symmetrischen Matrizen der Ordnung n.Sei $(a,b)\subset R^1$ und $T:(a,b)\longrightarrow \mathcal{H}$ eine stetig differenzierbare Abbildung.(Die Ableitung heiße T'). Sei p ein stetiges reelles Funktional auf $H-\{0\}$ mit $W(T)=\{p(x):x\in H-\{0\}\}\subset(a,b), p(cx)=p(x)\ \forall c\neq 0$, $(T(p(x))x,x)=0, (T'(p(x))x,x)>0. x\in H-\{0\}, \alpha\in W(T)$ heißen Eigenvektor und Eigenwert,falls $T(\alpha)x=0$.Nach E.H.Rogers gibt es(bei geeigneter Definition der Vielfachheit) genau n Eigenwerte und eine aus Eigenvektoren bestehende Basis von H.
Neben dem von Rogers gezeigten Minimax-Prinzip gibt es ein Rayleighsches Minimum-Prinzip mit einem verallgemeinerten (nicht bilinearen) inneren Produkt.Die Eigenwerte können durch Verfahren approximiert werden,die als Verallgemeinerungen der v.Mises-Methode aufgefaßt werden.Die Beziehungen zu mehrparametrigen Eigenwertaufgaben gestatten eine geometrische Deutung der Ergebnisse.

K.KIRCHGÄSSNER: Graphentheoretische Lösung eines nichtlinearen Zuteilungsproblems.

Versucht man,n Examina in q Zeitabschnitten abzuhalten, so daß die Anzahl von Überschneidungen möglichst klein wird, so hat man eine bivalente,nichtdefinite,quadratische Programmierungsaufgabe zu lösen.Ordnet man den Examina die Knoten eines endlichen,symmetrischen Graphen zu und verbindet man Knoten,wenn Überschneidungen bei den entsprechenden Examina möglich sind,so kann man einen konfliktlosen Plan konstruieren,wenn die chromatische Zahl k des Graphen nicht größer als q ist.Im andern Fall hat man den Graphen durch Entfernen von Kanten solange abzubauen,bis ein q-chromatischer Graph entsteht.Es werden Algorithmen angegeben,die es erlauben,folgende Aufgaben zu lösen: 1.Bestimmung aller q+1-kritischen Graphen (Reduktion einer Boole'schen Funktion).2.Optimaler Abbau von Graphen,die Kanten gemeinsam haben (Reduktion einer Pseudoboole'schen Funktion).Sukzessive Anwendung beider Verfahren führt zur Lösung des Problems.

R.S.VARGA: Numerische Methoden höherer Genauigkeit für nichtlineare Randwertaufgaben.Zwei-dimensionale Aufgaben.

Wir betrachten die numerische Lösung von Randwertaufgaben wie

$$\Delta u = e^u \quad \text{oder} \quad \Delta u = u^2 \quad \text{in } R = \{(x,y): 0 < x,y < 1\}$$
$$u = g \quad \text{gegeben auf } \partial R$$

via Rayleigh-Ritz-Galerkin-Methoden für ein Gebiet R. Mit Hilfe Hermite'scher und Spline'scher Unterräume können wir beweisen,daß die numerischen Funktionen konvergieren, wenn $h \downarrow 0$ und die Lösung $u(x,y)$ genügend glatt ist. Zum Beispiel haben wir,daß

$$\| u-w_h \|_{L^\infty(R)} \leq \| u(x,y)-w_h(x,y) \|_{2,2} = O(h^2)$$

für $\Delta\Delta u = f$ wo $f \in L^2(R)$.Das ist eine Verschärfung von Resultaten von Nitsche und Nitsche (1961).

W. OETTLI: Über ein Optimierungsproblem aus der Informationstheorie.

Ein diskreter gestörter Übertragungskanal ohne Gedächtnis im Sinne der Informationstheorie ist definiert durch sein endliches Sendealphabet $\{a_j\}$, sein endliches Empfängeralphabet $\{b_i\}$, sowie die Matrix der bedingten Wahrscheinlichkeiten $p_{ij}=p\{b_i|a_j\}$. Bei vorgegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung $x_j=p\{a_j\}$ über dem Sendealphabet ist die Empfängerverteilung $y_i=p\{b_i\}$ festgelegt durch $y=Px$. Sei jedem Sendesignal α_j eine Zeit-oder Kostengröße $t_j>0$ zugeordnet. Für festes x,y ist die relative Transmissionsrate (Transinformation) des Kanals definiert als

$$(1) \qquad T=\frac{\sum_j \alpha_j x_j - \sum_i y_i \log y_i}{\sum_j t_j x_j}, \quad \alpha_j=\sum_i p_{ij}\log p_{ij} .$$

Sei $z=(x,y)$, $Z=\{z: x\geq 0, \sum x_j=1, y=Px\}$, $Z^o=\{z\in Z: y>0\}$.
Die Kapazität C des Kanals ist definiert als

$$(2) \qquad C=\max_{z\in Z} T(z) .$$

Sei $T(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$, wo f und g durch (1) festgelegt sind.
In Satz 1) und 2) unten darf $\sum t_j x_j$ durch eine allgemeinere Funktion g(z) ersetzt werden mit den Eigenschaften:

a.) g(z) konvex über Z

b.) $g(z^o)+(z-z^o)^T\nabla g(z^o)>0$ für alle $z\in Z, z^o\in Z^o$.

T(z) ist dann quasikonkav über Z und (2) ist eine quasikonkave Optimierungsaufgabe. $\hat{z}\in Z$ ist optimal, wenn $C=T(\hat{z})$. Für $z^o\in Z^o$ definiere

$$\tau_{z^o}(z)=[f(z^o)+(z-z^o)^T\nabla f(z^o)]/[g(z^o)+(z-z^o)^T\nabla g(z^o)]$$

Satz 1): $\hat{z}$ optimal $\Leftrightarrow$ $\hat{z}\in Z^o$ und $\max_{z\in Z}\tau_{\hat{z}}(z)=\tau_{\hat{z}}(\hat{z})$

Der y-Teil $\hat{y}$ jeder Optimallösung ist eindeutig.

Satz 2): Sei eine Folge $\{z^k\}$ durch folgendes Verfahren konstruiert:

$z^1\in Z^o$ beliebig. Wenn z^k gegeben, bestimme

a.) $\bar{z}^k\in Z$ so, daß $\tau_{z^k}(\bar{z}^k)=\max_{z\in Z}\tau_{z^k}(z)$,

b.) $z^{k+1}\in[z^k;\bar{z}^k]$ so, daß $T(z^{k+1})=\max_{z\in[z^k;\bar{z}^k]} T(z)$.

Dann gilt:

$T(z^k)\leq C, \lim_{k\to\infty} T(z^k)=C; \tau_{z^k}(z^k)\ C, \lim_{k\to\infty}\tau_{z^k}(z^k)=C; \lim_{k\to\infty} y^k=\hat{y}$.

Satz 3): Sei $g(z)=\sum t_j x_j$ .Sei $S(y)=\max\limits_j \dfrac{\alpha_j - \sum\limits_i p_{ij} \log y_{ij}}{t_j}$

Dann gilt auch

(3) $C=\min\limits_{\substack{y>0 \\ \sum y_i = 1}} S(y)$

Wenn $\hat{z}$ optimal für (2), so ist der y-Teil $\hat{y}$ optimal für (3). Wenn $\hat{y}$ optimal für (3), so gibt es ein $\hat{x}$ mit $\hat{y}=P\hat{x}$ derart, daß $\hat{z}=(\hat{x},\hat{y})$ optimal für (2).

B.FLEISCHMANN: Einige Enumerationsprinzipien bei Optimierungsaufgaben.

Es werden Aufgaben der Form $f(x)=\min !, x\in M$ mit einer Menge M und $f:M\to\mathbb{R}$ betrachtet, die für $M\neq\emptyset$ lösbar sein sollen. Dafür werden zwei Enumerationsprinzipien angegeben, die auf der Aufzählung eines Systems von Teilmengen einer Menge $M'\supset M$ beruhen. Auf jeder Teilmenge muß eine untere Schranke der Zielfunktion bekannt sein. Dem Mengensystem läßt sich ein Baumgraph, der "Suchbaum" zuordnen. Zwei Algorithmen mit Konvergenzbedingungen werden angegeben und bezüglich der erforderlichen Iterationen und des Speicherbedarfs verglichen. Als Beispiel eines Verfahrens, das eines der Prinzipien benutzt, wird der "Additive Algorithmus" (1965) von E.Balas für bivalente lineare Optimierungsaufgaben mit einigen Verbesserungen erläutert.

U.DIETER: Dualitätssätze für Optimierung in topologischen Vektorräumen.

Ist X ein reeller topologischer Vektorraum, X^* sein Dualraum, $f(x)$, $-g(x)$ konvexe Funktionale mit Definitionsbereich C bzw. D, so kann man zur primären Aufgabe:

$$\text{Bestimme } \inf_{x\in C\cap D} (f(x)-g(x))$$

die duale Aufgabe:

$$\text{Bestimme } \sup_{x^*\in C^*\cap D^*} (g^*(x^*)-f^*(x^*))$$

betrachten.

Hierbei sind $f^*(x^*), g^*(x^*)$ die von Fenchel für endlich dimensionale Vektorräume eingeführten und von verschiedenen Autoren (Moreau, Rochafellar, Brønsted, Dieter) verallgemeinerten konjugierten Funktionale:

$$f^*(x^*)=\sup_{x\in C}\,(x^*x-f(x)),\ C^*=\{x^*: f^*(x^*)<\infty\},\ g^*(x^*)=\inf_{x\in D}\,(x^*x-g(x)),$$

$D^*=\{x^*: g^*(x^*)> -\infty\}$. Es gelten dann Dualitätssätze, die den Dualitätssätzen des linearen Optimierens entsprechen.

Man erhält aus dieser Theorie die bisher bekannten linearen und nicht-linearen Paare dualer Optimierungsaufgaben als Spezialfälle. Anwendungen gibt es bisher in der Spieltheorie, der Testtheorie und der Approximationstheorie.

J. Werner (Hamburg)