Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 12/67

der Arbeitsgemeinschaft unter Leitung von
Herrn Professor Dr. P. Roquette
23. bis 26. Juni 1967

Diese Arbeitsgemeinschaft führte mathematische Nachwuchskräfte aus Heidelberg und Tübingen zu gemeinsamer Arbeit zusammen. Die Teilnehmer trugen eigene Arbeiten aus verschiedenen Gebieten der Algebra vor. Als Gast sprach Prof. Zassenhaus (Columbus, USA) über ganzzahlige Darstellungen. Neben den Vorträgen fanden weiterführende Diskussionen und Unterhaltungen statt.

Teilnehmer

Becker, I., Heidelberg
Becker, M., Tübingen
Brandis, A., Heidelberg
Eberle, H., Tübingen
Frey, G., Heidelberg
Geyer, W.-D., Heidelberg
Göhner, H., Tübingen
Göhner, U., Tübingen
Hahnel, P., Tübingen
Hartmann, F., Heidelberg
Heer, I., Heidelberg
Irion, K., Heidelberg
Koch, I., Tübingen
Martens, G., Heidelberg
Maulbetsch, R., Tübingen
Mendoza, E., Heidelberg
Radbruch, K., Tübingen
Ritter, J., Tübingen
Roquette, P., Heidelberg
Schmale, W., Tübingen
v. Weizsäcker, H., Heidelberg
Wolff, M., Tübingen
Zassenhaus, H., Columbus
Zimmer, H.G., Tübingen

ZIMMER, H.G.: Die Néron-Tate'sche Höhe im Falle einer elliptischen Kurve über einem Funktionenkörper

Sei K ein globaler Körper, d.h. ein Körper mit einem System von Bewertungen, für das die Summenformel gilt, A eine über K definierte abelsche Mannigfaltigkeit, A_K die Gruppe der über K rationalen Punkte von A und h die bezüglich einer festen projektiven Einbettung von A über K auf A_K definierte Höhe. Es gilt dann der

SATZ (Néron-Tate): Auf A_K gibt es eine eindeutig bestimmte quadratische Form q und eine eindeutig bestimmte Linearform l, so daß der Betrag $|(h-(q+l))|$ auf A_K beschränkt ist.

Dieser Satz kann elementar bewiesen werden für den Fall, daß A eine elliptische Kurve über einem algebraischen Funktionenkörper K ist, indem eine Funktion D auf A_K mittels der Bewertungen in K definiert wird, aus der sich mit $q(P) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{d(nP)}{n^2}$ für $P \in A_K$ und $l = 0$ der obige Satz ergibt.

HEER, I.: Fortsetzung von Differentialspezialisierungen

Ein Satz von Chow aus der algebraischen Geometrie wird in die Differentialalgebra übertragen:

Sei R ein noetherscher Differentialintegritätsbereich, der den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen enthält, und $\mathfrak{p}$ ein nichttriviales Primdifferentialideal in R. Dann gibt es im Quotientenkörper K von R einen diskreten Bewertungsring O vom Rang 1 mit dem Bewertungsideal M und folgenden Eigenschaften: $O' \subset O$, $M' \subset M$, $O \supset R$, $M \cap R = \mathfrak{p}$. Dabei ist $'$ die Differentiation in R, welche sich eindeutig auf K fortsetzt. Beim Beweis wird wesentlich ein Satz von Seidenberg über den ganzen Abschluß von Differentialintegritätsbereichen verwendet.

IRION, K.: Über adjungierte Funktoren

Ist $T : C \to X$ ein Funktor zwischen kleinen Kategorien, so induziert er einen "transponierten" Funktor ${}^tT$: Mod X → Mod C, der exakt ist (Mod X ist die Kategorie der Funktoren von X in die Kategorie der abelschen Gruppen). Zu ${}^tT$ wird ein adjungierter Funktor S explizit angegeben: Für $A \in$ Mod C und $x \in X$ ist $SA(x)$ ein (projektiver) Limes über ein gewisses (nichtfiltriertes) Diagramm $I(x)$. Entsprechend für den zu ${}^tT$ coadjungierten Funktor S^*. Weiter werden einige hinreichende Kriterien für die Exaktheit von S und S^* angegeben.

EBERLE, H.: Über abelsche Erweiterungen lokaler Körper

Es wird versucht, aus den expliziten Resultaten von Lubin und Tate (Ann. of Math. 81) das Reziprozitätsgesetz abzuleiten. Gezeigt werden kann, daß das bei Lubin und Tate definierte $L_\pi T$ die maximale abelsche Erweiterung des lokalen Grundkörpers ist (unter Benutzung der Sätze von Hasse-Arf, Mackenzie-Whaples und der Eigenschaften der Herbrandschen ψ-Funktion). Es fehlen Aussagen über die Normengruppe.

MAULBETSCH, R.E.: Reelle Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen über einem formal reellen Differentialkörper

Vorgelegt sei eine Differentialgleichung $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_o y = 0$ mit Koeffizienten a_i aus einem formal reellen Differentialkörper F. Bei $n = 1$ existiert stets eine reelle Lösung, die den Konstantenkörper nicht erweitert. Bei $n = 2$ existiert ein reelles Fundamentalsystem, welches den Konstantenkörper nur reell-quadratisch erweitert. Sind alle a_i konstant, so existiert ein reelles Fundamentalsystem, welches

keine neuen Konstanten einführt.

Besitzt F einen reell abgeschlossenen Konstantenkörper C, so existiert ein reelles Fundamentalsystem, das den Konstantenkörper nicht erweitert, jedenfalls dann, wenn F archimedisch über C angeordnet werden kann, oder wenn F über D endlich erzeugt ist.

KOCH, I.: Die Ordnung der Aotomorphismengruppe einer endlichen Gruppe

Es sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $g = p^n r$, $(p, r) = 1$. $A(G)$ sei die Automorphismengruppe von G. Setzt man

$f(n) = -[\frac{3}{2} - \sqrt{2n + \frac{1}{4}}]$, so gilt $p^{f(n)} \mid A(G)$, was zu der Abschätzung

$A(G) \geq 2^{-3 + \sqrt{(\frac{5}{2})^2 + 2\log_2 g}}$ führt.

Schneidet die p-Sylowgruppe des Zentrums von G die Kommutatorgruppe von G trivial, so gilt sogar $p^{n-1} \mid A(G)$.

RITTER, J.: Ganzzahlige Darstellungen endlicher Gruppen

Er werden Arbeiten von R.G. Swan, H. Bass, D.S. Rim, A. Heller-I. Reiner referiert. Untersucht werden soll die Grothendieckgruppe $G(R\pi)$ des Gruppenringes der endlichen Gruppe π über dem Ring R der ganzen Zahlen in einem algebraischen Zahlkörper K.

SATZ 1: Die Sequenz $C_o(R\pi) \longrightarrow G(R\pi) \longrightarrow G(K\pi) \longrightarrow 0$ ist exakt, wobei $C_o(R\pi)$ die reduzierte projektive Klassengruppe über $R\pi$ ist.

Hieraus folgt zunächst die Endlichkeit von $\ker(G(R\pi) \longrightarrow G(K\pi))$, mit dem Induzierungssatz von Artin-Brauer-Witt folgt ferner die Exaktheit der Sequenz $C_o(v) \longrightarrow C(R\pi) \longrightarrow G(K\pi) \longrightarrow 0$, wo v

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

eine Maximalordnung über $R\pi$ in $K\pi$ ist. Ist K Zerfällungskörper für π, so ist $C_o(v)$ isomorph mit der Idealklassengruppe des Zentrums von v.

SATZ 2: Die Sequenz $0 \longrightarrow C_o(R\pi) \longrightarrow P(R\pi) \longrightarrow G(K\pi)$ ist exakt, wobei $P(R\pi)$ die projektive Grothendieckgruppe über $R\pi$ ist.

SATZ 3: Für einen projektiven $R\pi$-Modul P ist $K \otimes_R P$ $K\pi$-frei, P zerlegt sich als $P \approx F \oplus I$ mit einem $R\pi$-freien Teil F und einem projektiven Linksideal I in $R\pi$.

ZASSENHAUS, H.: Verhalten des Kroneckerhalbrings bei Komplettierung des Grundkörpers

Sei G eine endliche Gruppe, R ein Integritätsbereich. Die Darstellungsmoduln von G über R bilden den Kroneckerhalbring $\mathrm{Kron}(RG)$ mit Addition $\oplus$, Multiplikation $\otimes$, Gleichheit $\approx$.

SATZ: R sei ein diskreter Bewertungsring mit Komplettierung $\hat{R}$, k und $\hat{k}$ seien die Quotientenkörper. Zwei Darstellungen von G über R sind genau dann äquivalent, wenn sie über $\hat{R}$ äquivalent sind. Eine Darstellung über $\hat{R}$ kommt genau dann von einer Darstellung über R her, wenn sie über $\hat{k}$ äquivalent ist zu der Erweiterung einer Darstellung über k.

Im Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Kron}(RG) & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathrm{Kron}(\hat{R}G) \\ \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ \mathrm{Kron}(kG) & \overset{j}{\hookrightarrow} & \mathrm{Kron}(\hat{k}G) \end{array} \qquad \text{mit } \mathrm{im}(i) = \varepsilon^{-1}(\mathrm{im}(j))$$

ZUSATZ: $\mathrm{Kron}(\hat{R}G)$ hat freie Erzeugende über $\mathbb{N}$, nämlich die unzerlegbaren Darstellungsmoduln Δ_i von G über $\hat{R}$, weil über $\hat{R}$ nach Zassenhaus und Reiner der Satz von Krull-Schmidt gilt. Die zweite Aussage des Satzes liest sich auch so:

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$\Sigma n_i \Delta_i = \Delta \in \mathrm{Kron}(RG) \Longleftrightarrow \chi(\Delta) = \Sigma n_i \chi(\Delta_i)$ in k realisierbarer Charakter.

BRANDIS, A.: Bericht über eine Arbeit von Alperin (J. of Algebra, 6, (1967)

Sei G eine endliche Gruppe, P eine p-Sylowgruppe von G, dann ist $G' \cap P = \langle x^{-1}x^y;\ x, x^y \in P,\ y \in G \rangle$ (Fokalgruppensatz). Sind $x, x^y \in P$, so kann man fragen, unter welchen Voraussetzungen y bereits aus einer Untergruppe von G gewählt werden kann, um genauere Auskunft über die Fokalgruppe zu erhalten. Dies geschieht in dem

SATZ (Alperin): Sind $x,\ x^y \in P$, dann gibt es p-Sylowgruppen $X_1, \ldots, X_n$ und Elemente $y_1, \ldots, y_n$ aus G sowie ein Element z aus N(P), so daß

(1) $y = y_1 \ldots y_n z$

(2) $y_i \in N(P \cap X_i)$

(3) $x \in P \cap X_1,\ x^{y_1 \ldots y_i} \in P \cap X_{i+1}$

(4) $P \cap X_i$ ist zahm, d.h. $N_P(P \cap X_i)$ und $N_{X_i}(P \cap X_i)$ sind p-Sylowgruppen von $N(P \cap X_i)$.

Hieraus folgt z.B. der

SATZ (Alperin): Für alle zahmen Durchschnitte H von P sei N(H)/C(H) eine p-Gruppe. Dann ist G p-nilpotent.

BEWEIS:

1) Sind $x, x^y \in P$, so kann y durch ein Element aus P ersetzt werden. Nach Voraussetzung ist nämlich $N(P \cap X_i) = N_p(P \cap X_i) \cdot C(P \cap X_i)$ (Bezeichnungen wie im Satz 1) und $N(P) = P \cdot C(P)$. Also ist $x^y = x^{y_1 \ldots y_n z} = x^{y_1' \ldots y_n' z'}$ mit $y_i', z' \in P$.

2) Sei N der kleinste Normalteiler in G, so daß G/N eine p-Gruppe ist. N besitzt keine echte p-Faktorgruppe. Ist Q^* die Fokalgruppe der p-Sylowgruppe $Q = P \cap N$ von N, so ist also $Q = Q^* = \langle x^{-1}x^y;\ x, x^y \in Q,\ y \in N\rangle$, wegen 1) also $Q \subset \langle x^{-1}x^z;\ x \in Q,\ z \in P\rangle = [Q,P]$, was nur für $Q = 1$ möglich ist. qed.

Dieser Satz verallgemeinert einen Satz von Frobenius.

WOLFF, M.: Ganzzahlige Darstellung polyzyklischer Gruppen

Jede polyzyklische Gruppe (d.h. auflösbare Gruppe mit Maximalbedingung) besitzt eine treue Darstellung als Gruppe von ganzzahligen Matrizen mit Determinante 1, Beweis nach Swan (erscheint demnächst).

GEYER, W.-D.: Modelltheorie und algebraische Geometrie

In der Modelltheorie zeigt man, daß "das" Axiomensystem für algebraisch abgeschlossenen Körper modellvollständig bez. des Axiomensystems für Integritätsbereiche ist, analoges gilt für reell abgeschlossene Körper und angeordnete Integritätsbereiche. Hieraus folgen weitere Vollständigkeitssätze sowie ein Entquantifizierungsprozeß: Jedes Prädikat über algebraisch (oder reell) abgeschlossene Körper (formuliert im niederen Prädikatenkalkül) ist einem quantorfreien Prädikat äquivalent.

Wendet man dies auf Morphismen algebraischer Mannigfaltigkeiten an, so erhält man bei algebraisch abgeschlossenem Grundkörper den Satz von Chevalley, der das mengentheoretische Bild eines Morphismus als endliche Vereinigung lokal abgeschlossener Teilmengen beschreibt. Im Fall eines reell abgeschlossenen Grundkörpers erhält man, daß ein Morphismus von Mannigfaltigkeiten eine "elementare" (d.h. durch

Gleichungen und Ungleichungen beschriebene reelle) Punktmenge wieder in eine solche überführt.

BECKER, M.: Metamathematische Ideale

Unter einem Ideal in einer Satzmenge I des niederen Prädikatenkalküls versteht man einen gegen Folgerungen (in I) abgeschlossenen Teil von I. Man erhält die Zerlegung eines Ideals als Durchschnitt von irreduziblen, sie ist eindeutig, falls I disjunktiv ist. Um dieses Ergebnis auf nicht-disjunktive Bereiche zu übertragen, führt man den Begriff des Diagrammideals ein.

HARTMANN, F.: Definition des Residuums in separabel erzeugten Funktionenkörpern

Sei R/K separabel endlich erzeugt vom Transzendenzgrad 1, char(K) = P > 0. Sei ω ein Differential von R/K, $\mathfrak{p}$ eine Stelle von R/K. Sei L der algebraische Abschluß von K und $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r$ die Fortsetzungen von $\mathfrak{p}$ auf RL/L. Betrachte ω als Differential von RL/L und setze

$$\operatorname{res}_{\mathfrak{p}}(\omega) := \sum_{i=1}^{r} \operatorname{res}_{\mathfrak{P}_i}(\omega). \text{ Es gilt}$$

1) $\operatorname{res}_{\mathfrak{p}}(\omega) = 0$ fast überall

2) $\sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{res}_{\mathfrak{p}}(\omega) = 0$

3) $\operatorname{res}_{\mathfrak{P}_i}(\omega)$ ist separabel über K.

1) und 2) ergeben sich aus dem Fall K = L, 3) verwendet den Cartier-Operator.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

FREY, G.: Spezialisierungen in der Differentialalgebra

Es wurden Verallgemeinerungen von Sätzen von Goldman (AMS Trans. 85) bewiesen: Sei F ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, P der algebraische Abschluß eines Potenzreihenkörpers über F. Neben der natürlichen Bewertung w trage P noch eine Differentiation $'$ mit $w(z) \leq w(z')$ für $z \in P$. Dann gilt:

1. Ist $L(y)$ eine homogene lineare Differentialgleichung mit ganzen Koeffizienten in P, so kann zu einem Fundamentallösungssystem (u) von $\bar{L}(y)$ in einer Erweiterung F_1 von F ein Fundamentallösungssystem (v) von $L(y)$ in einer unverzweigten Erweiterung P_1 von P gefunden werden mit $(\bar{v}) = (u)$.

2. Ist $F\langle u\rangle$ eine Picard-Vessiot-Erweiterung von F, und hat P_1 denselben Konstantenkörper wie P, so gibt es eine Untergruppe der Galoisgruppe von $P\langle v\rangle/P$, die auf die Galoisgruppe von $F\langle u\rangle/F$ abgebildet wird.

Wulf-Dieter Geyer, Heidelberg