Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Bericht

Tagung über Graphentheorie vom 30. Juni bis 6. Juli 1967

Leitung: Prof. Dr. Gerhard Ringel (Berlin) und
Prof. Dr. Klaus Wagner (Köln).

Erst seit einem Jahrzehnt finden Tagungen über Graphentheorie statt (Budapest, Halle, Smolenice, Rom, Comer See, Tihany, Manebach). Dies war die erste Tagung, die die Graphentheoretiker in Oberwolfach zusammenführte. So kam es, daß die meisten Teilnehmer zum ersten Mal Oberwolfach besuchten und seine ideale Lage und einmalige Atmosphäre kennenlernten.

Es waren 26 Teilnehmer, davon 12 aus dem Ausland (Großbritannien, Holland, Kanada, Österreich, Tschechoslowakei, Ungarn, USA):

Adam, Budapest	Mader, Berlin
Beineke, Fort Wayne	Noltemeier, Karlsruhe
Boland, Amsterdam	Oberschelp, Hannover
Fiedler, Prag	Ost, Karlsruhe
Guy, Calgary	Plünnecke, Bonn
Halin, Köln	Prins, Detroit
Hammer, Karlsruhe	Rado, Reading
Henn, Karlsruhe	Ringel, Berlin
Izbicki, Klosterneuburg	Sabidussi, Hamilton
Jung, Köln	Sheehan, Aberdeen
Kaerkes, Aachen	Vollmerhaus, Saarbrücken
Kleiner, Berlin	Wagner, Köln
Kotzig, Bratislava	Youngs, Santa Cruz.

Es wurden 20 Vorträge gehalten über endliche und unendliche Graphen sowie über die verschiedensten Anwendungen der Graphentheorie. Die Vorträge wurden durch zum Teil lebhafte Diskussionen ergänzt. Es ist bemerkenswert, daß es den Herren Youngs und Guy während der freien Zeit der Tagung gelang, durch intensive Zusammenarbeit den letzten noch ausstehenden Fall bei der Bestimmung des nichtorientierbaren Geschlechts des vollständigen Graphen mit Hilfe der Theorie der Current Graphs zu bewältigen. Zwar ist ein vollständiger Beweis für diese Formel bereits im Buch von G. Ringel erbracht worden. Sein Beweis ist jedoch kompliziert und schwer lesbar. Nun ist endlich ein durchsichtiger Beweis gefunden, der nur noch den Nachteil hat, daß viele

Fälle unterschieden werden müssen. Das scheint aber in der Natur der Sache zu liegen.

Ein weiterer Erfolg ist zu verzeichnen. Die Herren Guy und Beineke konnten während der Tagung die coarseness $c(K_{m,n})$ des vollständigen paaren Graphen endgültig bestimmen. Nach Erdös ist diese Zahl $c(G)$ für einen Graphen G definiert als die größte Zahl von kantenfremden, nicht-plättbaren Teilgraphen, deren Vereinigung G ist. So ergab sich die Formel

$$c(K_{m,n}) = \min\left(\left[\left[\frac{m}{3}\right]\cdot\frac{n}{3}\right], \left[\left[\frac{n}{3}\right]\cdot\frac{m}{3}\right]\right).$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge:

ÁDÁM, A.: **Neuer Beweis eines Satzes von J. Dénes über die Abbildungen von Mengen in sich**

Eine eindeutige Abbildung α einer endlichen Menge in sich kann als ein gerichteter Graph $\mathfrak{G}$ dargestellt werden. Die minimale Zahl r , für die eine Zahl s existiert, so daß $s \leq r$ und $\alpha^s = \alpha^{r+1}$ gelten, heißt die Ordnung von α . Der Satz von Dénes besagt, daß, falls α nicht ein-eindeutig ist, r mit $k + h - 1$ übereinstimmt, wobei k das kleinste gemeinsame Vielfachen der Zyklus-Längen von $\mathfrak{G}$ und r den maximalen Abstand der Punkte von $\mathfrak{G}$ von den Zyklen bedeuten.

Im vorliegenden Beweis wird $k + h - 1$ durch r' bezeichnet; es werden die gegenseitigen Ungleichheiten $r' \geq r$ und $r \geq r'$ mit graphentheoretischen Methoden gezeigt.

BEINEKE, L.W.: **The toroidal thickness of the complete bipartite graph**

The planar (resp., toroidal) thickness of a graph G is the minimum number of subgraph G_i having G as the union, such that each G_i is embeddable in the plane (resp., torus). The planar thickness of both the complete graph K_n and the complete bipartite graph $K_{m,n}$ remain partially unsolved. The toroidal thickness of the complete graph K_n was first determined by Ringel (1965) and is $\left[\frac{n+4}{6}\right]$. We present a proof of the result that the toroidal thickness of the complete bipartite graph $K_{m,n}$ is $\left\{\frac{mn}{2(m+n)}\right\}$.
This provides a constructive decomposition into the minimum number of toroidal subgraphs.

BOLAND, J.H.: **Einige Bemerkungen zum Kwatowskischen Satz**

Man kann einen kurzen Beweis des Kwatowskischen Satzes geben, wobei man nicht mehrere getrennte Fälle zu betrachten braucht.

FIEDLER, M.: Einige Zusammenhänge zwischen Graphen, Matrizen und Geometrie

Zuerst werden einige Anwendungen der Graphentheorie in der euklidischen Geometrie erwähnt, bei denen Matrizen die Rolle des Vermittlers spielen. Danach werden notwendige und hinreichende Bedingungen für ein gerichtetes Netz angegeben, damit ein zirkulärer Strom mit positiven Flüssen in jeder Kante existiere.

GUY, R.K.: Three problems in k-graphs

A k-graph is an ordered pair $G_k = (S,E)$, where $E \subset [S]^k$, i.e. the set of subsets of S of cardinal k. The elements of S and E are respectively the vertices and edges (k-edges) of G_k. An ordinary graph is a 2-graph.

1. A problem of Turán. How many 3-edges may a 3-graph on n vertices contain, without forming a tetrahedron? It is conjectured that the maximum is attained by partitioning the n vertices into three (nearly) equal sets, A, B and C, and taking all 3-edges whose vertices are of types ABC, AAB, BBC and CCA.

2. A problem of Erdös, Hajnal und Milner. The symbol $(m,n)^k \longrightarrow f$ is used to denote the truth of the statement: Let $A_1, A_2, \ldots, A_m$ be any sets with the property that the union of any n of them covers the union of them all, then

$S = \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \bigcup_{j=1}^{f} C_j$; where $[C_j]^k \subset \bigcup_{i=1}^{m} [A_i]^k$, $1 \leqslant j \leqslant f$. I.e. the union of the A_i is also the union of f complete subgraphs of the k-graph $(S, \bigcup_{i=1}^{m} [A_i]^k)$. The falsity is denoted by $(m,n)^k \not\longrightarrow f$.

Erdös, Hajnal & Milner showed that $(m,n)^k \longrightarrow f$ if $m \geqslant k(n-f)+f$, and conjectured this to be best possible, so that (?) $(kn-kf+f-1,n)^k \not\longrightarrow f$. The following are known to be true: $(kn-k,n)^k \not\longrightarrow 1$, $(2k-3,n)^2 \not\longrightarrow 2$, $(f+3,f+2)^2 \not\longrightarrow f$, $(3n-5,n)^3 \not\longrightarrow 2$, $(f+5,f+3)^2 \not\longrightarrow f$, $(f+5,f+2)^3 \not\longrightarrow f$, $(k+f-1,f+1)^k \not\longrightarrow f$, $(10,7)^2 \not\longrightarrow 3$, $(11,8)^2 \not\longrightarrow 4$, $(12,9)^2 \not\longrightarrow 5$, $(12,8)^2 \not\longrightarrow 3$ and $(9,4)^4 \not\longrightarrow 2$.

3. A problem of Zarankiewicz. What is the least positive integer, $\mathfrak{z}_{k,l}(m,n)$, such that every subset of $\mathfrak{z}$ points of an m by n rectangle of the unit lattice should contain kl points situated simultaneously in k rows and l columns? One of a number of alternative formulations is to ask for a maximal packing of complete k-graphs

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

on f vertices into a k-graph on m vertices, and for mixed packings of such graphs on f, f-1, f-2, ..., k vertices. As an example, $\mathcal{Z}_{3,3}(10,10) = 61$, necessity being exhibited by the adjacency matrix of the line graph of K_5, the complete 2-graph on 5 vertices, which has the symmetry, $\mathcal{S}_5$, of the Petersen graph.

HALIN, R.: Unterteilungen vollständiger Graphen in Graphen mit unendlicher chromatischer Zahl

Es bezeichne $\varrho(G)$ für jeden Graphen G die kleinste Kardinalzahl ϱ mit folgender Eigenschaft: Es existiert eine Wohlordnung $<$ der Eckenmenge von G derart, daß jede Ecke a von G mit weniger als ϱ Ecken $<$ a durch eine Kante verbunden ist. Stets ist $\varrho(G) \geqq \chi(G)$, wo $\chi(G)$ die chromatische Zahl von G bezeichnet. Es wird gezeigt: Ist $\varrho(G)$ unendlich, so enthält G für jede Kardinalzahl $\tau < \varrho(G)$ eine Unterteilung des vollständigen τ-Graphen. (Dies ist falsch für $\tau = \varrho(G)$.) Der Beweis stützt sich auf folgenden Zerlegungssatz: Ist G ein Graph, in dem je zwei nicht benachbarte Ecken durch $\leqq \tau$ viele Ecken getrennt werden können (τ eine unendliche Kardinalzahl), so enthält G entweder einen vollständigen τ'-Graphen (für ein $\tau' > \tau$) oder G besitzt eine simpliziale Zerfällung, deren Glieder sämtlich höchstens die Mächtigkeit τ haben. (Vgl. Math. Nachr. 33(1967), S. 91 ff.)

IZBICKI, H.: Zur Vierfarbenvermutung äquivalente Probleme

Es wurden die verallgemeinerten Farbenzahlen $\chi(a_{00}, a_{01}, a_{02}; a_{11}, a_{12}; a_{22})$ für die Menge aller normalen Landkarten auf der Kugel betrachtet. Von den 64 möglichen Fällen konnten 43 vollständig gelöst werden; diese Farbenzahlen liegen alle zwischen 1 (für 000 00 0) und 7 (für 111 11 1). 17 weitere Fälle erweisen sich als zur Vierfarbenvermutung äquivalent: 15-mal ist $\chi = 4$ d.u.n.d., w. die Vierfarbenvermutung richtig ist, ansonsten $\chi = 5$; zweimal ist $\chi = 3$ bei Richtigkeit und $\chi = 4$ bei Nicht-Richtigkeit der Vierfarbenvermutung. In den verbleibenden vier Fällen folgt wieder aus der Richtigkeit der Vierfarbenvermutung $\chi = 4$, und es ist sicher $\chi = 4$ oder 5; diese vier Fälle sind untereinander äquivalent, doch konnte die Äquivalenz zur Vierfarbenvermutung nicht entschieden werden.

JUNG, H.A.: Eine Bemerkung zu einem Satz von E.S. Wolk über die Vergleichbarkeitsgraphen von ordnungstheoretischen Bäumen

Eine teilweise Ordnung "$<$" von E heißt ordnungstheoretischer Baum auf E, wenn gilt:
$b < a,\ c < a \Longrightarrow b \leqq c$ oder $c \leqq b$ $(a,b,c \in E)$, ist $G = (E,k)$,*
so verstehe man unter einer Baumrichtung von G eine Richtung "$<$", von $G=(E,k)$, die einen ordnungstheoretischen Baum auf E definiert.

E.S. Wolk charakterisierte die Graphen G, die eine Baumrichtung zulassen. Durch einen neuen Beweis werden alle Baumrichtungen eines Graphen bestimmt. Der Beweis stützt sich auf eine Äquivalenzrelation in E: $e \sim e' \Longleftrightarrow e = e'$ oder:
e ist mit e' verbunden und jede Ecke, die mit e(bzw. e') verbunden ist, ist auch mit e' (bzw. e) verbunden.

* ungerichteter Graph (ohne Schlingen und Mehrfachkanten),

KLEINERT, M.: Die Dicke des n-dimensionalen Würfel-Graphen

Es wird eine Methode beschrieben, die Dicke des n-dimensionalen Würfel-Graphen W^n zu bestimmen. Die Dicke ist $t(W^n) = \left\{\frac{n+1}{4}\right\}$.

Die Eulersche Polyederformel liefert $t(W^n) \geqq \left\{\frac{n+1}{4}\right\}$, und eine Zerlegung des (4p-1)-dimensionalen Würfel-Graphen in p ebene Teilgraphen ergibt die Gleichheit.

KOTZIG, A.: Färbungsprobleme an den ebenen kubischen Graphen

Es werden neue Ergebnisse über die Summe der Knotenpunktsbewertungen eines ebenen kubischen Graphen abgeleitet, wo die Bewertung einer Kantenfärbung entspricht. Es werden einige Graphentransformationen eingeführt und Beziehungen zu den Anzahlen verschiedener Kantenfärbungen hergestellt. Weiter wurde ein Überblick über neue Untersuchungen der Färbungen sogenannter Graphenabschnitte gegeben.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

MADER, W.: Unterteilungen vollständiger Graphen in endliche reguläre Graphen

Es sei ein endlicher Graph G_0 vorgegeben. Dann existiert eine reelle Zahl $f(G_0)$, so daß jeder endliche Graph G, dessen Kantenanzahl $k(G)$ die Ungleichung $K(G) \geqslant f(G_0)e(G)$ erfüllt, wobei $e(G)$ die Anzahl der Ecken von G bedeutet, eine Unterteilung von G_0 enthält.
Es sei $d(n) = \inf \{ c \mid k(G) \geqslant c\ e(G) \longrightarrow G \succ V_n \}$.
($G \succ V_n$ bedeutet dabei, daß sich G auf den vollständigen Graphen V_n kontrahieren läßt.)

Es gilt: (1) $d(n+1) \geqslant d(n) + 1$

(2) $d(n) = n - 2$ für $n \leqslant 7$

(3) $d(n) \leqslant \delta \left\{ \frac{n \log n}{\log 2} \right\}$.

OBERSCHELP, W.: Die Anzahl nicht-isomorpher m-Graphen

Die von Bollobas (Acta Math.Ac.Sc.Hung. 16(1965), 447-452) betrachteten verallgemeinerten endlichen Graphen mit m-elementigen "Kanten" werfen ein kombinatorisches Anzahlproblem auf: Gesucht ist die Zahl $G_n^{(m)}$ nichtisomorpher m-Graphen über einer n-elementigen Punktmenge. Bei festem m gilt für diese Zahl die asymptotische Gleichheit $G_n^{(m)} \sim \frac{1}{n!} 2^{\binom{n}{m}}$. Der Beweis wird in der kombinatorischen Theorie von Polya und Harary (Trans.Am. Math.Soc. 78(1955), 445-463) geführt; er ist zu einer besseren als der angegebenen Approximation verschärfbar und erweiterbar auf gewisse Varianten von m-Graphen, z.B. auf solche m-Graphen mit "niederdimensionalen" Kanten (Schlingen usw.) und auf "gerichtete" m-Graphen. Als Spezialfall ergeben sich Anzahlformeln für den klassischen Fall m = 2.

PLÜNNECKE, H.: Zur Theorie der kommutativen Graphen - eine zahlentheoretische Anwendung der Graphentheorie

Das zahlentheoretische Problem, die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ unter der Voraussetzung nach unten abzuschätzen, daß man gewisse Kenntnisse über die Anzahl der Elemente in $\mathfrak{A} + h\mathfrak{B}$ hat, wird dadurch gelöst, daß man diesem Problem in geeigneter Weise

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

einen gerichteten Graphen zuordnet, dessen Knotenpunkte die Elemente von $\mathfrak{A} + h\mathfrak{b}$ sind; von dem Knotenpunkt x zum Knotenpunkt y geht höchstens dann eine Kante, wenn $y - x \in \mathfrak{b}$ ist. Aus der Kommutativität der Addition folgt für den zugeordneten Graphen eine Struktureigenschaft; einen beliebigen Graphen nennen wir kommutativ, wenn er diese Struktureigenschaft hat. Der wichtigste Schritt bei den weiteren Untersuchungen besteht dann darin, für eine spezielle Klasse kommutativer Graphen durch vollständige Induktion einen Satz über die Existenz paarweise disjunkter Wege herzuleiten.

RADO, R.: Theorems on the partitioning of complete infinite graphs

For cardinal numbers a,b,c the partition relation $a \longrightarrow (b,c)^2$ has the following meaning. If G is a complete graph on a set A of cardinal $|A| = a$, and if the set E of edges of G is arbitrarily partitioned into sets E_0 and E_1, then there always is a set $A' \subseteq A$ such that either $|A'| = b$ and every edge joining nodes of A' is in E_0, or $|A'| = c$ and every edge joining nodes of A' is in E_1. Similarly relations such as $a \longrightarrow (b_\gamma)^2_{\gamma < n}$ are defined for any ordinal n and any cardinals or cardinals a, b_γ. Assuming the general continuum hypothesis the truth of $a \longrightarrow (b_\gamma)^2_{\gamma < n}$ can be fully discussed for any infinite cardinals a and b_γ provided none of them is inaccessible. In the case of ordinal numbers there are still many unsolved problems.

RINGEL, G.: Das Oberwolfacher Problem

In einer mathematischen Tagung seien 2n + 1 Teilnehmer. Im Tagungs-Speisesaal stehen s runde Tische $T_1, T_2, \dots, T_s$, wobei T_i genau $t_i \geqq 3$ Plätze hat und $2n + 1 = t_1 + t_2 + \dots + t_s$ ist. Ist es möglich, die Sitzordnung für n Mahlzeiten so zu wählen, daß jeder Teilnehmer jeden anderen genau einmal als Nachbarn hat? In dieser Allgemeinheit ist das Problem - wir bezeichnen es hier kurz mit O.P. $(t_1, t_2, \dots, t_s)$ - ungelöst und wohl vorläufig hoffnungslos. Die Frage läßt sich auch graphentheoretisch formulieren: Es sei T ein regulärer Graph vom Grade 2 mit 2n + 1 Knotenpunkten. Läßt sich der vollständige Graph K_{2n+1} in n Teilgraphen $T_1, T_2, \dots, T_n$ so zerlegen, daß jedes T_i

isomorph zu T ist? Lösungen für die beiden Spezialfälle O.P.(2n+1) und O.P. (3,3,...,3) sind schon seit 1859 und 1894 bekannt. Es werden Lösungen in den folgenden neuen Fällen angegeben: O.P. (3,4,4,...,4); O.P. (3,4k-1, 4k-1); O.P. (3,4k, 4k); O.P. (4s + 3,4,...,4), wobei hier die Anzahl der 4-er ein beliebiges Vielfaches von 2s + 1 ist; O.P. (p,p,...,p) mit p Tischen und p = Primzahl > 2; auch O.P. ($\aleph_0$), sowie O.P. ($t_1, t_2, \ldots, t_{s-1}, \aleph_0$) läßt sich lösen. Hierbei soll $\aleph_0$ sinngemäß einen beiderseits unendlich langen Tisch symbolisieren.

SABIDUSSI, G.: <u>Unendliche Matroide</u>

Durch Beschränkung auf endliche Mengen hat die Matroidtheorie zwar einen sehr interessanten kombinatorischen Charakter angenommen, aber stark an Anwendungsfähigkeit in anderen Teilen der Mathematik eingebüßt. Es erscheint daher wünschenswert, den Matroidbegriff auf beliebige, also auch unendliche Mengen zu verallgemeinern. Der Zusammenhang mit der Graphentheorie soll dabei nicht verloren gehen. Das aufzustellende Axiomensystem soll folgende Desiderata erfüllen. (i) Das System aller (endlichen und unendlichen) Kreise eines beliebigen Graphen soll ein Matroid sein; (ii) die von TUTTE durchgeführte Dualitätstheorie soll gültig bleiben, und (iii) es soll die Möglichkeit bestehen, aus gegebenen Familien von Matroiden neue Matroide zu bilden. Hierzu geht man vor wie folgt:

E sei eine beliebige Mengen, $\mathfrak{A}$ eine Menge von Teilmengen von E (E, $\mathfrak{A}$ und die Mengen in $\mathfrak{A}$ alle nicht leer).

$\mathfrak{A}$ heißt eine <u>Austauschsystem</u>, wenn für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ und $a \in A-B$, $b \in A \cap B$ ein $C \in \mathfrak{A}$ existiert, so daß $a \in C \subset A \cup B - \{b\}$. Ein <u>Dendroid</u> (oder <u>Basis</u>) eines Austauschsystems $\mathfrak{A}$ ist eine minimale Teilmenge von E, die alle Mengen in $\mathfrak{A}$ trifft; $\mathcal{D}_{\mathfrak{A}}$ sei die Menge aller Dendroide von $\mathfrak{A}$. Ein <u>Matroid</u> kann dann definiert werden als ein Austauschsystem $\mathfrak{A}$ mit den Eigenschaften (i) $\mathcal{D}_{\mathfrak{A}} \neq \emptyset$ und (ii) $\mathfrak{A} = \{f_D(x) : x \in D \in \mathcal{D}_{\mathfrak{A}}\}$, wobei $f_D(x)$ die (eindeutig bestimmte) Menge in $\mathfrak{A}$ bezeichnet, für welche $f_D(x) \cap D = \{x\}$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

SHEEHAN, J.: The number of graphs with a given automorphism group

The graphs G considered are undirected, loopless but may have multiple edges. We define the automorphism group $\Gamma(G)$ of G to be the group consisting simply of the adjacency preserving isomorphisms of the vertices of the graph. We consider the number $N[H_i; n,p]$ of distinct graphs G with n vertices, p edges & $\Gamma(G) = H_i \subseteq S_n$. The problem is resolved in terms of he characters of the symmetric group S_n. A formulation of Pólyás Theorem in terms of group characters is also given.

VOLLMERHAUS, W.: Die Einbettung von Graphen auf 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten minimalen Geschlechts und irreduzible Graphen

Es wird ein Verfahren angegeben zur effektiven Bestimmung aller wesentlich verschiedenen Einbettungen eines Graphen in zweidimensionale Mannigfaltigkeiten kleinsten Geschlechts. Hieraus erhält man ein Kriterium dafür, wann ein Graph nur eine solche Einbettung zuläßt. Ferner läßt sich hieraus ein Verfahren herleiten zur Bestimmung aller irreduziblen Graphen vorgegebenen Geschlechts. In Verallgemeinerung des Satzes von Kuratowski läßt sich zeigen, daß es für jedes Geschlecht p nur endlich viele Homoeomorphieklassen irreduzibler Graphen vom Geschlecht p gibt.

WAGNER, K.: Fastplättbare Graphen

Sei a eine Ecke eines Graphen G. Mit G/a bezeichne man denjenigen Teilgraphen von G, den man aus G durch Streichung von a samt aller mit a inzidenten Kanten von G erhält. G heiße fastplättbar, wenn G nicht plättbar aber G/a für jede Ecke a von G plättbar ist. Problem: Es sollen alle fastplättbaren Graphen bestimmt werden. Welche chromatischen Zahlen haben die fastplättbaren Graphen?

YOUNGS, J.W.T.: The Heawood map-coloring conjecture (non-orientable case)

The Heawood map-coloring conjecture is one of the oldest and

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

most celebrated problems in combinatorial analysis. The attack is via the dual <u>complete graph conjecture.</u> The latter conjecture is concerned with finding the closed non-orientable (or orientable) 2-manifold of lowest genus in which it is possible to embed -- topologically -- the complete graph K_n. The non-orientable case was solved by G. Ringel over a six-year period beginning with his Habilitationsschrift in 1953, and culminating in his recent book. This was a very remarkable achievement. The object of this lecture is to introduce new methods to this solved problem, methods whose elegance matches the beauty of the problem. For example, it has been shown that those cases in which $n \equiv 3,4,5,9,10,11$, mod 12, can be handled in a unified way by what the author calls the theory of cascades. Moreover, <u>at this writing</u>, only the cases $n \equiv 1$ and 6 mod 12 are left to complete the solution. It is interesting to note that these cases are two of the three that Ringel also found exceptionally difficult.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft