Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

T a g u n g s b e r i c h t

Konvexe Körper, Geometrische Ordnungen

7. Juli - 14. Juli 1967

Unter der Leitung der Herren Professoren E. Derry (Vancouver), G. Ewald (Bochum) und O. Haupt (Erlangen) fand eine Tagung über "Konvexe Körper, Geometrische Ordnungen" vom 7.7. - 14.7. 1967 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach statt.

"Konvexe Körper" und "Geometrische Ordnungen" sind zwar verschiedene Gebiete innerhalb der Geometrie. Beide verbindet jedoch die Art ihrer Schlußweisen, die sich denen der klassischen Geometrie einordnen.

Teilnehmer:

Aumann, G., München
Barner, M., Freiburg
Danzer, L., Göttingen
Derry, D., Triest
Ewald, G., Bochum
Haupt, O., Erlangen
Heil, E., Darmstadt
Kind, B., Bochum
Künneth, H., Erlangen
Lane, N.D., Los Angeles
Marchaud, A., Boulogne
McMullen, P., Birmingham
Park, R., Toronto
Rado, R., Reading
Rahn, G., Bochum
Scherk, P., Toronto
Schmitt, K.-A., Bochum
Schneider, R., Frankfurt
Shephard, G.C., Birmingham
Streit, F., Bern
Turgeon, J., Toronto
Valette, G., Brüssel
Zamfirescu, T., Bukarest

Die 23 Teilnehmer aus verschiedenen Ländern hielten 19 Vorträge. Das mathematische Programm wurde durch Diskussionen und persönliche Gespräche bereichert, worin sich das große Interesse der Teilnehmer bekundete.
Es sei noch erwähnt, daß während der Tagung von einem ausländischen und einem deutschen Teilnehmer ein Satz über n-fache Überdeckungen der d-dimensionalen Einheitskugel durch offene Halbkugeln bewiesen wurde.

Es folgen kurze Zusammenfassungen der Vorträge.

Vortragsauszüge:

DANZER, L.: Sparsame Überdeckungen des E^d mit Einheitskugeln

C.A. ROGERS hat gezeigt, daß es zu beliebig vorgegebenem konvexen Körper K im R^d eine Überdeckung des R^d mit Translaten von K gibt, deren Dichte kleiner ist als d log d + d loglog d + 4d. Für den Spezialfall, daß K ein Ellipsoid ist, läßt sich die Methode so ausbauen, daß die Überdeckungsdichte (bezgl. Translate) je nach Aufwand abgeschätzt werden kann durch

$$\frac{2}{3}\, d\,(\varphi(d) + 2) \quad \text{bzw. durch} \quad \frac{4}{7}\, d\,(\varphi(d) + 2).$$

Ob $^1/2\, d(\varphi(d) + \text{const})$ erreichbar ist, bleibt zunächst offen. Die Funktion φ ist dabei definiert durch $e^{\varphi(d)} = d\,\varphi(d)$ $(d \geqq 3,\ \varphi(d) > 1)$; es ist $\varphi(d) = \log d + \log\log d + r(d)$ mit $\lim_{d \to \infty} r(d) = 0$ und $r(d) < 0{,}7$ für alle d.

DERRY, D.: Polygone der Ordnung n mit n+2 Seiten

Es sei $R = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, $m > n+1$, eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage innerhalb des reellen projektiven Raumes L_n n-ter Ordnung. Das folgende Problem wurde betrachtet. Was sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß R die Eckpunktmenge eines Polygons π_n der reellen Ordnung n ist?

Für $m = n+2$ nennt man ein Segment A_iA_j von L_n R-zulässig, wenn die Hyperebene durch die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{j-1}$ $A_{j+1}, \ldots, A_{n+2}$ keinen Punkt von A_iA_j enthält. Die folgenden zwei Sätze wurden ohne Beweis behauptet.

(1) Ist $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$ eine Permutation von $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}$, so hat das Polygon $B_1B_2 \ldots B_{n+2}$ Ordnung n dann und nur dann, wenn jede Seite B_iB_{i+1}, $1 \leq i \leq n+2$, R-zulässig ist.

(2) Ist $m = n+3$, so gibt es genau ein Polygon n-ter Ordnung, dessen Eckpunktmenge R ist.

Im Fall $m > n+3$ heißt jede Teilmenge $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_{n+2}}$, $A_{p_i} \neq A_{p_j}$, $i \neq j$, eine Basis von R. Ist Z ein Punkt von R, der nicht Punkt der Basis ist, dann sei $\pi_n : B_1B_2 \ldots B_{n+2}Z$ das Polygon

n-ter Ordnung mit den Eckpunkten $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_{n+2}}, Z$. Es sei $B_{n+2}B_1$ die Strecke, die mit den Seiten $B_{n+2}Z$, ZB_1 von $\mathcal{T}_n$ ein gerades Dreieck bildet. Das geschlossene Polygon $B_1B_2\ldots B_{n+2}$, das man aus dem Teilpolygon $B_1B_2\ldots B_{n+2}$ von $\mathcal{T}_n$ erhält, indem man es mittels der Strecke $B_{n+2}B_1$ schließt, hat Ordnung n. Ist für jedes Z das durch Z erzeugte Polygon $B_1B_2\ldots B_{n+2}$ immer dasselbe, so heißt die Basis <u>reduktionsinvariant</u>. Man hat den Satz: Notwendig und hinreichend dafür, daß die Menge $R = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, $m > n+3$, eine Eckpunktmenge eines Polygons n-ter Ordnung ist, ist, daß jede Basis von R reduktionsinvariant ist.

HAUPT, O.: <u>Ein allgemeiner Vierscheitelsatz für ebene Jordankurven</u>

Der Vierscheitelsatz von A. KNESER wird dahin verallgemeinert, daß an Stelle des Systems der Kreise Systeme <u>k</u> von (ebenen) Kurven treten, wobei jede dieser Kurven durch je drei ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist und stetig von ihnen abhängt, während der Scheitel als Punkt höherer als dritter Ordnung bezüglich <u>k</u> auf der betrachteten Jordankurve C erklärt wird. Die Voraussetzung, daß die Jordankurve stetige Krümmung besitze, wird ersetzt durch eine Forderung lokaler Natur an die isolierten Scheitel von C sowie die Forderung, daß die <u>k</u>-Paratangenten an C mehrpunktig sind (und zu <u>k</u> gehören).

HEIL, E.: <u>Scheitel in der zentralaffinen Geometrie</u>

Als Schmiegfiguren eines ebenen Ovals, welches das Zentrum umschließt, werden 3-punktig berührende Zentralellipsen betrachtet. Ein solches Oval hat i.a. nur zwei Scheitel, d.h. in höherer Ordnung berührende Zentralellipsen.

Es gibt genau eine Ellipse größten Inhalts, die dem Oval einbeschrieben ist. Sie berührt in mindestens 3 Punkten. Wählt man ihren Mittelpunkt als Zentrum, dann erhält man so 6 Scheitel.

KÜNNETH, H.: Kontinua von der schwachen Ordnung 3 im P_2

Ein Kontinuum C in einem n-dimensionalen Raum R_n ist von der schwachen Punktordnung p, wenn die Menge der Hyperebenen von R_n, die mit C mehr als p Punkte gemein haben, nirgends dicht liegt im Raum der Hyperebenen. In der projektiven Ebene P_2 hat ein Kontinuum C von der schwachen Punktordnung 3 höchstens 4 Verzweigungspunkte (VP). In diesem Fall ist C der Graph, der P_2 in 3 konvexe Vierecke zerlegt mit Strecken als Kanten. Ist G eine Gerade durch einen VP v, so können in $G - \{v\}$ höchstens zwei Teilbogen von C münden. Hat daher C mehr als einen VP, so ist die Verzweigungsordnung (VO) jedes VP höchstens 4. Enthält C nur einen VP v und hat v die VO 3 oder 4, dann kann $C - \{v\}$ drei Teilbogen mit Wendepunkten (Schnäbeln) enthalten, ist die VO von v 5 oder 6, so enthält $C - \{v\}$ nur Strecken als Komponenten. Hat C drei VP in einer Geraden bzw. nur zwei VP, so kann C zwei bzw. vier Teilbogen mit Wendepunkten enthalten. Hat C einen (oder mehrere) VP, so kann C keinen Dorn (Dornspitze) enthalten.

LANE, N.D.: Strong Cyclic, Parabolic and Conical Convexity

An arc A in the conformal plane is called strongly differentiable at a point p of A if the following conditions are satisfied.
Condition I': There exists a point $R \neq p$ such that if $Q \longrightarrow R$ and the distinct points u and v converge on A to p, then the circle C(u,v,Q) through the points u, v and Q always converges.
Condition II': C(t,u,v) always converges if the mutually distinct points t,u,v converge on A to p. Analgous definitions of strong parabolic and conical differentialility of arcs in the affine and projective planes, respectively, may be formulated. Assume the cyclic [parabolic; conical] Condition II'. Then Condition I' need not hold. If, however, we also assume that p is an end-point of A, or the osculating circle is non-degenerate [the osculating parabola is not a double ray; the osculating conic is not a pair of lines through p], then Condition I' will hold. Next, assume only the parabolic [conical] Condition III'. Then Condition I' will hold but Condition II' need not hold. If, however, p is an end-point of A, or if the limit parabola [conic] of Condition III' is non-degenerate, then Condition II' will also hold. Finally, assume only the conical Condition IV'. Then Conditions I' and II' will hold but Condition III' need not hold. If, however, p is an end-point A, or if the limit conic of Condition IV' is non-degenerate, then Condition III' will hold, too.

McMULLEN, P.: Generalisations of regular polytopes

The concept of a regular polytope can be generalized in several different ways; instead of considering the group of isometries which preserve the polytope, one can allow affine or projective symmetries, or general automorphisms of the lattice of faces of the polytope. It is thus possible to define affinely, projectively or combinatorially regular polytopes. It will be shown that an affinely regular polytope is affinely equivalent to a regular polytope, and the analogous results for projectively and combinatorially regular polytopes will also be proved.

MARCHAUD, A.: Les plans tangents aux Surfaces du troisième ordre et plus particulièrement le long de leurs droites

Les surfaces S_3 dont il s'agit sont celles que j'ai étudiées dans différents Mémoires. Leur définition ne comporte aucune hypothèse de nature infinitésimale.

Une S_3 contenant plus de 27 droites et qui n'est pas dégénérée (cône compété ou non par un ovoide), est une surface réglée, tout à fait analogue à celles du troisième degré. Elle possède en dehors d'une directrice rectiligne un plan tangent partout continu. En chaque point ce plan est le plan unique des tangentes (paratingent).

Une S_3 contenant 27 droites au plus, possède le long de chacune d'elles, sauf peut-être en deux points au plus (par droite) un plan tangent qui varie continuement le long de la droite, sur tout segment ne contenant aucun des points exceptionnels s'il y en a. Le plus souvent ce plan est le plan unique des tangentes. Dans tous les cas c'est l'ensemble des demi-tangentes (contingent).

PARK, R.: On Barner Curves

Let P_k^n be the set of all linear k-spaces in real projective n-space and let C be the unit circle. A Barner curve is a differentiable mapping $L_o : C \longrightarrow P_o^n$ for which there exists a continuous mapping $B : C^{n-1} \longrightarrow P_{n-1}^n$ such that

$$L_k(p) \subseteq B(p_1,\ldots,p_{n-1}) \Longleftrightarrow k \leq \sum_{0\leq i\leq \nu(p;p_1,\ldots,p_{n-1})-1} a_i(p) \quad -1$$

where $(a_0(p),\ldots,a_{n-1}(p))$ is the characteristic of p and

$$\nu(p;p_1,\ldots,p_{n-1}) = \sum_{p=p_i} 1 \text{ .}$$

A theorem similar to Barner's theorem (1956) can be proved: if L_0 is a Barner curve and $L \in P^n_{n-1}$ then the number of points of the curve on L (properly counted) does not exceed the number of singularities (properly counted).

SCHERK, P.: Aus der direkten Differentialgeometrie

Übersicht über die direkte Differentialgeometrie der geometrischen Ordnungen. (i) Differenzierbarkeit und Charakteristik. (ii) Bögen und Kurven n-ter Ordnung im R^n; Differenzierbarkeitseigenschaften; Schließungssatz; Rangprobleme. (iii) Kurven (n+1)-ter Ordnung im R^n. Die singulären Punkte. Abbildungen und Korrespondenzen; Punktetripel ; höhere Singularitäten; Sonderfälle; die Fälle n = 3 und n = 4. [(iv) Nichtlineare Ordnungen und die Arbeiten von Lane und Singh; (v) R. Parks Untersuchungen zum Barnerschen Satz].

SCHMITT, K.-A.: Kennzeichnung des Steinerpunktes konvexer Körper

Eine Abbildung der Menge $\mathcal{R}^n$ aller konvexer Körper des euklidischen $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ ordnet genau dann jedem konvexen Körper seinen Steinerpunkt zu, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $f(K_1 + K_2) = f(K_1) + f(K_2)$

$K_1, K_2 \in \mathcal{R}^n$ und die Addition auf der linken Seite ist die Vektoraddition

(b) $f(TK) = T\,f(K)$ für jede orthogonale Transformation T des $\mathbb{R}^n$

(c) f ist stetig, wenn auf $\mathcal{R}^n$ die Topologie durch die Hausdorff-Metrik gegeben wird.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

SCHNEIDER, R.: Zu einem Problem von Shephard über die Projektionen konvexer Körper

Seien K_1, K_2 konvexe Körper im euklidischen R^n, sei $V(K_i)$ das Volumen von K_i und $v(K_i,u)$ das (n-1)-dimensionale Volumen der Orthogonalprojektion von K_i auf eine zum Einheitsvektor u senkrechte Hyperebene. G.C. Shephard hat die Frage gestellt, ob aus (1) $v(K_1,u) > v(K_2,u)$ für alle u die Ungleichung (2) $V(K_1) > V(K_2)$ folgt, falls K_1 und K_2 zentralsymmetrisch sind. Eine teilweise Antwort wird durch die folgenden Sätze gegeben: Läßt sich K_1 durch Vektorsummen von Strecken approximieren, so folgt aus (1) die Ungleichung (2). Ist K_2 zentralsymmetrisch und hinreichend glatt berandet, aber nicht durch Vektorsummen von Strecken approximierbar (für $n \geq 3$ existieren solche Körper), so gibt es einen zentralsymmetrischen Körper K_1, so daß (1), aber nicht (2) erfüllt ist.

SHEPHARD, G.C.: Euler-type relations and valuations for convex polytopes

Recently it has been shown that certain functions (both vector and scalar-valued), defined on the set $\mathcal{P}$ of all convex polytopes in E^n, satisfy relations similar to that used to define the Euler characteristic. These functions are also valuations on $\mathcal{P}$. In this talk a survey will be given of all the known results and some unsolved problems will be stated.

SINGH, K.D.: Characteristic and order of conically differential points

The five parameter family of conics in a real projective plane gives rise to four differentiability conditions and a point of an arc is called conically differentiable if these four conditions are satisfied. The differentiable points are classified by the nature of their families of osculating conics, superosculating conics and ultraosculating conics.

An arc in the real projective plane is said to be of conical order five if no conic meets it at more than five points. Introducing four strong differentiability conditions it is proved that an arc of conical order five is strongly conically

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

differentiable at its end-points and three times strongly conically differentiable at interior points. Characteristics of points are then defined and proved that "if p be a conically differentiable, conically elementary differentiable point of an arc, then the conical order of p is equal to the sum of the digits of the characteristic of p".

STREIT, F.: Kennzeichnung der Konvexität euklidischer Polyeder durch eine Schnitteigenschaft

Es wird ein elementargeometrischer Beweis des untenstehenden Satzes vorgeführt.

Satz: Es sei $k \geq 2$, $A \subset E^k$ (k-dim. euklidischer Raum) ein kompaktes Polyeder und m eine ganze Zahl. Gilt für jede k-1-dimensionale Ebene $E \subset E^k$ für die $A \cap E \neq \emptyset$ ausfällt stets $\chi(A \cap E) = m$ (χ Charakteristik von Euler-Poincaré) so ist $m = 1$ und A konvex.

TURGEON, J.: Sur le premier rang d'une courbe

Il s'agira ici d'arcs différentiables élémentaires. Le Professeur Derry a démontré que si un tel arc est d'ordre n dans R_n, alors son premier rang est égal à $2(n-1)$. Un théorème de dualité, portant sur la caractéristique définie par le Professeur Peter Scherk en 1936 et prouvé récemment par M. Ralph Park, permet de démontrer aussi que

(i) le premier rang d'un arc est toujours au moins $2(n-1)$
(ii) tout arc dont le premier rang est $2(n-1)$ est d'ordre n (réciproque du théorème de Derry).

VALETTE, G.: An internal characterisation of convex sets

Convex sets are generally defined in a surrounding space (affine, normed, metric, and so on). In this lecture, I propose a definition of a convex set not inbedded in another space. The structure of a convex set X over K is given by a map $X \times X \times I \longrightarrow X$, $(x,y,\mu) \longrightarrow \widehat{xy\mu}$ where $I = [0,1]$ in an ordered (skew-) field K. This map must satisfy 4 axioms which are properties of the map $(x,y,\mu) \longrightarrow x(1-\mu) + y\mu$ so essential in questions about convexitiy, namely

(C 1) $\widehat{xy0} = x$

(C 2) $\widehat{xy\lambda} = \widehat{xy\mu} \Longleftrightarrow x = y$ or $\lambda = \mu$

(C 3) If $\varphi = (1-\lambda)(1-\nu) + \mu\nu \neq 0$, then

$$\widehat{\widehat{xy\lambda}\ \widehat{yz\mu}\nu} = \widehat{y\ \widehat{xz(\mu\nu\varphi^{-1})}\varphi}$$

(C 4) If $0<\lambda \leqslant \mu$ and $\widehat{xy\lambda} = \widehat{xz\mu}$, then $\exists \nu$ so that $z = \widehat{xy\nu}$.

The following theorem is established:

The definitio. of a convex set over K is an internal characterisation of the convex sets in an affine space over K. In other words: A convex set over K is always isomorphic with a convex set in an affine space over K.

ZAMFIRESCO, T.: Familles continues de courbes

La notion de "famille continue de courbes", introduite par M. Branco Grünbaum, généralise plusieurs familles de segments qu'on attache habituellement à un corps convexe plan (comme p.ex. les cordes divisant l'aire (le périmètre) en deux parties égales) de telle manière que beaucoup de leurs propriétés restent vraies. Notre exposé espère d'apporter quelques nouveaux résultats sur les familles continues de courbes. Voici deux théorèmes:

1° Sur chaque courbe d'une famille continue, à l'exception d'une tout au plus, il existe un point par lequel passent au moins trois courbes de la famille (B.GRÜNBAUM).

2° Sur chaque courbe d'une famille continue, à l'exception de trois tout au plus, il existe un arc non dégénéré formé de points avec la propriété demandée ci-dessus.