Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 15|1967

Gruppen und Geometrie

16. - 22. 7. 1967

In diesem Jahr kam die Wechselwirkung zwischen der Gruppentheorie und der Geometrie in relativ wenigen Vorträgen zum Ausdruck, und zwar in den Vorträgen von Dembowski, Lüneburg, Strambach und Tits. Die anderen Vorträge beschäftigten sich vorwiegend mit gruppentheoretischen Fragen. Da täglich nur etwa vier Vorträge gehalten wurden, konnte jeder Vortrag ausführlich im großen Kreis besprochen werden, und die Teilnehmer hatten genügend Gelegenheit zu Diskussionen in kleinen Gruppen.

Am letzten Tag wurde der Tagungsleiter Professor Dr. R. Baer anläßlich seines 65. Geburtstages durch den Besuch einer großen Zahl von Schülern und Freunden geehrt.

Teilnehmer

Ayoub, Ch., Frankfurt
Ayoub, R., Frankfurt
Baer, R., Frankfurt
Behrens, E. A., Frankfurt
Bender, H., Frankfurt
Brandis, A., Heidelberg
Cofman, J., London
Dembowski, P., Frankfurt
Feit, W., New Haven
Felscher, W., Freiburg
Fischer, B., Frankfurt
Freudenthal, H., Utrecht
Heineken, H., Frankfurt
Hering, Ch., Mainz
Higman, D. G., Ann Arbor
Kappe, W., Columbus
Kegel, O. H., Köln
Leptin, H., Heidelberg
Lüneburg, H., Mainz
Plaumann, P., Frankfurt
Salzmann, H., Frankfurt
Schmidt, R., Frankfurt
Schoewaelder, U., Frankfurt
Strambach, K., Frankfurt
Tits, J., Bonn
Wille, R., Bonn
Zassenhaus, H., Columbus

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

[illegible]
[illegible]

[illegible]

[illegible]
[illegible]

[illegible] und [illegible] mit den Vor- [illegible] anderen Vorträge [illegible] möglich [illegible]

[illegible] und [illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
	[illegible]

Vortragsauszüge

AYOUB, R.: On sums involving quadratic characters

Let $p \equiv 3(4)$. From different sources, Chowla and Walman and the author, here considered the sums

$$S(k) = \sum_{n=1}^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right) n^k .$$

Since $S(1) = -ph(-p)$ where $h(-p)$ is the class number of the imaginary quadratic field $Q(Fp)$ and $S(2) = -p^2 h(-p)$, and since for $k > k_o(p)$ $S(k) < 0$, it suggests that $S(k) < 0$. We show that $\exists\ \infty$ many $p \ni S(3) > 0$ and ∞ many $p \ni S(3) < 0$.

DEMBOWSKI, P.: Abelsche Kollineationsgruppen endlicher projektiver Ebenen

Sei P eine projektive Ebene endlicher Ordnung n und G eine quasireguläre Kollineationsgruppe von P, d. h. wenn $x^g = x$ für $x \in P$ und $g \in G$, so auch $y^g = y$ für alle $y \in x^G$. (Abelsche und hamiltonsche Kollineationsgruppen sind automatisch quasiregulär.) Es wurden alle möglichen Typen für den Fall angegeben, daß G eine Ordnung $\geqq (n^2 + n + 1)/2$ hat.

FEIT, W.: Isometries in Character Rings

Let π be a set of primes. Let H be a subgroup of G and let A be a set of π-elements in H. Assume that

(i) two elements in A are conjugate in G iff they are conjugate in H;

(ii) if $x \in A$ then $C_G(x) = C_G(x)_{\underline{\underline{Q}}} = \pi'(C_G(x))$.

If α is a class function of H vanishing outside A define

$$\alpha^\tau(y) = \begin{cases} \alpha(x) & \text{if } y \text{ is conjugate to an element } x \text{ with } x_\pi \in A; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Theorem: Let S be a set of irreducible characters of H such that any linear combination vanishing at 1 vanishes on $H \setminus A$; assume that (S, τ) is coherent. Then for $\zeta \in S$, $\zeta^\tau_A = \zeta + \gamma$ where $\gamma \perp S$.
This shows that the methods of exceptional characters can be applied in this situation. The proof relies on the theory of p-blocks.

FELSCHER, W. : Kennzeichnung von Kategorien, welche äquivalent oder isomorph zu Kategorien quasiprimitiver oder primitiver Klassen von Algebren sind.

Die im Titel angegebenen Kategorien von Algebren werden charakterisiert, und zwar auch für den Fall von Typen ohne Dimension (z. B. atomistische vollständige Boolesche Algebren). Die Kennzeichnung primitiver Kategorien ist im wesentlichen dieselbe, wie die von LINTON (Proc. Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965, Springer 1966, p. 84–94) gegebene Kennzeichnung gleichungsdefinierter Kategorien von Algebren. Die verwandte Beweismethode ist elementar und beruht auf einem Einbettungsverfahren von MALCEV (Doklady Akad. Nauk SSSR, 119 (1958), p. 28–32).

FREUDENTHAL, H. : Der natürliche Inhalt kompakter halbeinfacher LIE-Gruppen

Die Killingform bestimmt ein geeichtes invariantes Differentialmaß $d\mu_o$ in der Gruppe G. Mit ihm hat die Gruppe G einen wohlbestimmten Inhalt $\mu_o(G)$. Bei der Berechnung des Inhalts spielt der Ausdruck $\sum (\alpha_{i_1} \alpha_{i_2}) \dots (\alpha_{i_{2n-1}} \alpha_{i_{2n}})$ eine Rolle (Summation über alle Permutationen der nichtverschwindenden Wurzelformen $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$).

HIGMAN, D. G. : Groups with 3^1

Theorem. Let G be a finite group such that $3 \parallel |G|$ and let X be a subgroup of G of order 3. Assume that the centralizer C(X) of X in G is a cyclic trivial intersection set of even order 3s. Then one of the following holds:

(A) G is 3-nilpotent.

(B) $G \approx L_2(q)$, $q = 6s \pm 1$.

(C) there exists a normal subgroup G_o of odd index in G and a normal subgroup N of G_o such that $G = N\langle\sigma\rangle$ where $C(X) = X \times \langle\sigma\rangle$.

KAPPE, W. : Gruppentheoretische Eigenschaften

Ist E eine gruppentheoretische Eigenschaft, so verstehen wir unter einer E-Überdeckung der Gruppe G eine normale Menge von E-Untergruppen von G, die die Menge der Elemente von Primzahlpotenzordnung überdeckt. Dann ist

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$N_S(G)$ der Normalisator der E-Überdeckung S, $N^*_E(G)$ das Produkt aller $N_S(G)$, und $N_E(G)$ der Normalisator des Systems der E-maximalen Untergruppen von G. Es wird gezeigt, daß sich die Klasse der Gruppen mit nilpotenter Kommutatorgruppe charakterisieren läßt als die größte untergruppenabgeschlossene gesättigte Formation K derart daß $N^*_E(G) = N_E(G)$ für alle Gruppen $G \in K$ und alle gesättigten Formationen $E \leq K$. Ähnliche Sätze werden für den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Gruppen $N_E(G)$ für alle gesättigten Formationen E bewiesen.

LEPTIN, H.: <u>Gruppen mit invariantem Mittel</u>

Bericht über verschiedene Charakterisierungen dieser Gruppen; vgl. die noch nicht erschienenen Monographien von F. Greenleaf und von H. Reiter.

LÜNEBURG, H.: <u>Einige Bemerkungen zur Theorie der Bewegungsgruppen der elliptischen Ebenen</u>

Es wurde gezeigt, wie man die grundlegenden Eigenschaften der elliptischen Ebenen und ihrer Bewegungsgruppen herleiten kann, wenn man die Partition, die aus den Drehuntergruppen der Bewegungsgruppe besteht, in den Mittelpunkt der Untersuchungen stellt.

PLAUMANN, P.: <u>Über einen Satz von Baer</u>

In einer kompakten, total unzusammenhängenden abelschen Gruppe definieren wir $\dim_p G$ als den p-Rang der Charaktergruppe von G. Es gilt folgender

<u>Satz:</u> Sei G eine lokal kompakte, total unzusammenhängende abelsche Gruppe, sei A eine endliche Gruppe von Automorphismen von G mit $|A| = n$, sei $D = \{ g^{1-a} \mid g \in G, a \in A \}$ und sei $C = [g \in G \mid g^a = g$ für alle $a \in A]$. Wenn $\dim_p G$ für alle Primteiler von n endlich ist, so sind die Kompaktheit von D und G/C äquivalent.

SCHMIDT, R.: Modulare Untergruppen endlicher Gruppen

Definition: Die Untergruppe M der Gruppe G heißt modular in G, wenn gilt:

$(U \cup M) \cap V = U \cup (M \cap V)$ für alle $U, V \leq G$ mit $U \leq V$ und

$(U \cup M) \cap V = (U \cap V) \cup M$ für alle $U, V \leq G$ mit $M \leq V$.

Für diese modularen Untergruppen gilt der folgende

Satz: Sei M modular in der endlichen Gruppe G und sei $M^G = \bigcup_{x \in G} M^x$ die normale Hülle von M in G und $M_G = \bigcap_{x \in G} M^x$ das Herz von M in G. Dann gilt:

(i) M/M_G ist nilpotent,

(ii) M^G/M_G ist überauflösbar und

(iii) $G/\underline{C}_G(M^G/M_G)$ ist überauflösbar der Nilpotenzlänge ≤ 3.

Haupthilfsmittel beim Beweis des Satzes ist das folgende

LEMMA: Sei M modular in G und sei der Verband der M enthaltenden Untergruppen von G eine Kette. Dann ist entweder G/M_G eine p-Gruppe oder $\underline{o}(G/M_G) = pq$, p und q Primzahlen.

SCHOENWAELDER, U.: Normale Komplemente zu nilpotenten Hall-Untergruppen

Definition: Es sei U ein Normalteiler der π-Hall-Untergruppe H der endlichen Gruppe G. Dann hat das Tripel (G, H, U) die Eigenschaft

A_π, wenn aus der π'-Abgeschlossenheit von $\underline{N}(U)$ die π'-Abgeschlossenheit von G folgt;

I_π, wenn die maximale π-Faktorgruppe von $\underline{N}(U)$ isomorph zu der von G ist;

N_π, wenn aus der π-Auflösbarkeit von G folgt, daß $\underline{O}_{\pi'}(G)U$ ein Normalteiler von G ist.

Satz: Es sei U ein Normalteiler der nilpotenten π-Hall-Untergruppe H der endlichen Gruppe G. Dann hat (G, H, U) die Eigenschaft

A_π, wenn für jedes $p \in \pi$ und jede Untergruppe X mit $G \geq X \geq H_p$ das Tripel (X, H_p, U_p) die Eigenschaft A_p hat;

I_π, wenn für jedes $p \in \pi$ und jede Untergruppe X mit $G \geq X \geq \underline{N}(U)$ das Tripel (X, H_p, U_p) die Eigenschaft I_p hat;

N_π, wenn für jedes $p \in \pi$ das Tripel (G, H_p, U_p) die Eigenschaft N_p hat.

Die vorstehenden Aussagen wurden an Hand von Beispielen erläutert.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

STRAMBACH, K. : Zentrale und axiale Kollineationen in Salzmann-Ebenen

Eine Geometrie E heiße eine Salzmann-Ebene, wenn ihre Punktmenge $\mathcal{P}$ homöomorph zur reellen affinen Ebene ist und die Geraden von E abgeschlossene, zur reellen Zahlengeraden homöomorphe Teilmengen von $\mathcal{P}$ sind, so daß durch je zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht.

Satz: Sei E eine Salzmann-Ebene und Σ eine Menge von zentralen bzw. axialen Kollineationen von E, so daß eine der beiden Bedingungen erfüllt ist.

(a) Jeder Punkt von E ist Zentrum einer zentralen Kollineation aus Σ.

(b) Jede Gerade von E ist Achse einer axialen Kollineation aus Σ.

Dann gibt es für die Geometrie E genau eine der folgenden Möglichkeiten:

(i) E ist die reelle affine Ebene D,

(ii) E läßt sich in einer (offenen) Halbebene $\mathcal{H}$ bzw. in einem (offenen) Parallelstreifen $\mathcal{T}$ der reellen affinen Ebene D so darstellen, daß die Geraden von E die in $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{T}$ liegenden Teile der gewöhnlichen Geraden sind. Jede Kollineation von E wird von einer Kollineation der projektiven Abschließung $\bar{D}$ von D in $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{T}$ induziert.

(iii) E ist die klassische hyperbolische Geometrie, und die von der Menge Σ erzeugte Kollineationsgruppe enthält alle orientierungstreuen hyperbolischen Bewegungen.

TITS, J. : Quadratische Formen

Sei k ein Körper, A eine zentrale einfache Algebra der Dimension n^2 über k, σ eine Involution erster Art mit $\mathrm{Dim}\{x \in A \mid x = x^{\sigma}\} = \frac{n(n+1)}{2}$. Man setzt $S_\sigma = \{x \in A \mid x = x\}^{\sigma}$, $T_\sigma = \{x - x^\sigma \mid x \in A\}$, $Q_\sigma = A/T_\sigma$ und läßt A auf S_σ, T_σ, Q_σ durch $a(x) = axa^\sigma$ operieren. Die so erhaltenen "quadratischen Darstellungen" von A hängen von σ nicht ab (bis auf nicht-kanonische Äquivalenz). Ein Element $t \in T_\sigma$ (bzw. $q = \bar{q} + T_\sigma \in Q_\sigma$) heiße eine alternierende (bzw. quadratische) Form (bezüglich σ); diese Form sei nicht-entartet genannt, falls t (bzw. $\bar{q} + \bar{q}^\sigma$) in A invertierbar ist. Man bezeichne mit Sp(t) (bzw. SO(q)) die über k definierte Untergruppe der algebraischen Gruppe $SL_1(A)$, die durch die Gleichungen $x(t) = t$ (bzw. $x(q) = q$ und red. Norm $x = 1$) definiert wird.

Satz 1: Sei $n = 2m$ und sei $t \in T_\sigma$ bzw. $q \in Q_\sigma$ nicht entartet. Dann ist die Gruppe Sp(t) zw. SO(q) einfach vom Typ C_m bzw. D_m.

Bis auf zentrale Isogenie werden alle Gruppen der gegebenen Typen außer den trialitären Formen von D_4 so erhalten.

(Vgl. A. Weil, J. Indian Math. Soc. 24 (1960), 589-623.)

Sei die bilineare Abbildung $f : (A \otimes A) \times A \longrightarrow A$ durch $f(x \otimes y, z) = xzy$ definiert.

Satz 2: Sei $q \in Q_6$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Clif}^+(q)$ die "durch den Vektorraum $k + A + A \otimes A$ erzeugte und durch die folgenden Relationen definierte assoziative Algebra":

(i) $s \in S_6 \Longrightarrow s = \mathrm{tr}(s\bar{q}) \cdot 1 \quad (\in k)$;

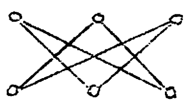
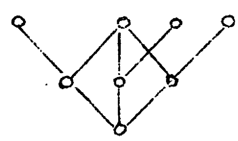
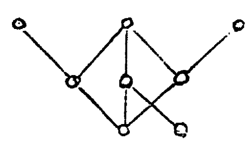
(ii) $a, b \in A \Longrightarrow ab$ (Produkt in Clif^+) $= a \otimes b$;

(iii) $x \in A \otimes A$ und $f(x, T) = \{0\} \Longrightarrow x = f(x, \bar{q})$.

Dann ist $\mathrm{Dim}\ \mathrm{Clif}^+ = 2^{n-1}$. Ist q nicht-entartet, so ist $\mathrm{Clif}^+(q)$ die "durch den Vektorraum $k + A + a\ A$ erzeugte und durch die folgenden Relationen definierte assoziative Algebra":

WILLE, R.: Modulare Verbände der Ordnungsdimension 2

Für eine Halbordnung H auf einer Menge M definiert man die Ordnungsdimension als die minimale Anzahl von Ordnungen auf M, die H als Durchschnitt haben. Es zeigt sich, daß folgende Halbordnungen Ordnungsdimension größer als 2 haben:

(H_1)  (H_2)  (H_3) 

Satz 1: Die Halbordnung eines endlichen distributiven Verbandes hat genau dann Ordnungsdimension 1 oder 2, wenn sie H_1 nicht als Teilhalbordnung enthält.

Satz 2: Ist H die Halbordnung eines endlichen modularen Verbandes und ist H keine Ordnung, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(a) H hat die Ordnungsdimension 2.

(b) H_1, H_2, H_3 oder deren Duale sind nicht Teilhalbordnung von H.

c) Die reduziblen Elemente des Verbandes bilden einen distributiven Verband, dessen Halbordnung Ordnungsdimension 1 oder 2 hat.

ZASSENHAUS, H.: Auflösbare lineare Gruppen

Sei G eine auflösbare lineare Gruppe endlichen Grades f über einem Körper k der Charakteristik χ. G hat als abstrakte Gruppe folgende Eigenschaften: i) G ist auflösbar, ii) $G \supseteq N \supseteq U \supseteq N'$ mit G/N endlich und a) die Minimalanzahl der Erzeugenden der in N/U enthaltenen endlichen abelschen Gruppen ist beschränkt, b) es gibt eine Hauptreihe $N \supseteq U = U_o \supseteq U_1 \supseteq \dots\ U_\tau = 1$, für die b1) $(U, U_i) \subseteq U_{i+1}$, b2) für x, y aus U_i, die nicht zu U_{i+1} gehören, sind stets die Faktorgruppen $\langle x^N, U_{i+1} \rangle$, $\langle y^N, U_{i+1} \rangle$ operatorisomorph unter Transformation mit N, b3) die Ordnung jedes von 1 verschiedenen Elementes aus U_i/U_{i+1} ist χ (für $i = 1, \dots, \tau$).

Umgekehrt gibt es für jede abstrakte Gruppe G mit den vorstehenden Eigenschaften eine treue Darstellung als lineare Gruppe endlichen Grades über einem geeigneten Körper k der Charakteristik χ.

B. Fischer (Frankfurt)