Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Kombinatorik

vom 24. bis 3o. Juli 1967

Fast 4o Mathematiker aus dem In- und Ausland waren der Einladung der Herren Prof. Dr. K. Jacobs (Erlangen) und Prof. Dr. D. Morgenstern (Freiburg) gefolgt und fanden sich zu einer Tagung über Kombinatorik ein, der ersten dieser Art in Oberwolfach. Ein umfangreiches Vortragsprogramm sollte in gedrängterForm einen Überblick über neuere Methoden, Fragestellungen und Ergebnisse aus der Kombinatorik vermitteln und dadurch in Deutschland einer mathematischen Disziplin Resonanz verschaffen, die hier als Forschungsgebiet noch fast unbekannt ist, deren theoretische und praktische Bedeutung jedoch anderswo schon längst erkannt wurde und die gemeinsam mit ihrem Anwendungsbereich stetig wächst.

Demgemäß wurde in vier Vorlesungsreihen eine systematische Behandlung je einer Hauptrichtung der Kombinatorik geboten, während zusätzliche Einzelvorträge über speziellere Forschungsergebnisse informierten.

Durch die Vorträge und Diskussionen angeregt, fühlten sich die Teilnehmer von der Oberwolfacher Atmosphäre angetan und bereichert. Selbstverständlich hat daran auch der gesellschaftliche Teil der Tagung seinen Anteil, der durch abendliches Würstchen-Braten am Holzkohlengrill, gemeinsame Ausflüge und den regen Gebrauch der vorhandenen Spielbretter gekennzeichnet war.

Im einzelnen besuchten die Tagung:

Ahlswede, R., Dipl.-Math, Math. Inst. Univ., 852 Erlangen, Bismarckstr. 1 1/2
Bandelow, Ch., Dipl.-Math., Math. Inst. Univ, 463 Bochum, Friederikastr. 11
Barndorff-Nielsen, O., Prof., Aarhus (Dänemark) Matematisk Institut, Universitet
Bock, H.H., Dipl.-Math., Inst. Math. Stat., 78 Freiburg, Hebelstr. 27
Behara, M. Prof. z. Zt. Math. Inst. Univ., 69 Heidelberg, Tiergartenstr.
Böge, W. Dr., Inst. Angew. Math., 69 Heidelberg, Tiergartenstr.
de Bruijn, N.G. Prof., Techn. Univ., Eindhoven/Niederlande
Crapo, H. Prof., University of Waterloo, Waterloo/Kanada
Dinges, H. Prof., Inst. Angew. Math., 6 Frankfurt/M., Im Sachsenlager 12

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Eberl, W., Dipl.-Math., Inst. f. Stat. u. Dok., Univ. 4 Düsseldorf 1,

Foata, D., Dep. de Math., Univ., 67 Straßburg/ Frankreich

Freeman, J. M., Prof., Univ. Tübingen, 74 Tübingen, Universitätsgebäude

Gottschewski, J., Dipl.-Math., Bundesgesundheitsamt, 1 Berlin 45, Geranienstr. 3

Hajian, A., Prof., University of Boston, Boston (USA)

Harper, L. H., Prof., Rockefeller Univ., New York, 1oo21, USA

Heinecke, A., Univ. Bonn, Math. Inst., 53 Bonn, Wegeler Str. 1o

Hering, F., Dr., Inst. Angew. Math., 53 Bonn, Bonner Talweg 8

Jacobs, K., Prof., Math. Inst. Univ., 852 Erlangen, Bismarckstr. 1 1/2

Keane, M., Math. Inst. Univ., 852 Erlangen, Bismarckstr. 1 1/2

Kleitman, D. Prof., Dept. of Math., M. I. T., Cambridge /Mass. (USA)

Kurotschka, V. Dr., Inst. Math. Stat., 78 Freiburg, Hebelstr. 27

Lotz, H. Dr., Math. Inst. Univ., 74 Tübingen, Im Winkelrain 4

Lüneburg, H. Dr., Math. Inst. Univ., 65 Mainz, Saarstr. 21

Morgenstern, D. Prof., Math. Inst. Stat., 78 Freiburg, Hebelstr. 27

Müller, D. W., Math. Inst. Univ., 852 Erlangen, Bismarckstr. 1 1/2

Nivat, M., Math. Appl., Univ. Grenoble (Frankreich)

Nölle, G., Dr., Inst. Math. Stat., 44 Münster, Schloßplatz 2

Oberschelp, W., Dr., Math. Inst. C., 3 Hannover, Welfengarten 1

Oettling, H., Math. Inst. Univ., 852 Erlangen, Bismarckstr. 1 1/2

Peter, R., Dipl.-Math., Inst. Angew. Math., 6 Frankfurt, Im Sachsenlager 12

Ryser, H. J., Prof., Syracuse Univ., Syracuse, New York 1321o, 15 Smith Hall

Seidel, J. J., Prof., Techn. Univ., Einhoven / Holland

Schulz, R. H., Dipl.-Math., Mathem. Inst. Univ., 65 Mainz, Saarstr. 21

Theodorescu, Prof., Akad. d. SSR, Bukarest 9 / Rumänien, Mihail-Eminescu Str. 47

Vogel, W., Prof., Inst. Angew. Math. Univ., 53 Bonn, Bonner Talweg 8

v. Waldenfels, W., Dr., Math. Inst. Univ. 66 Saarbrücken, Universitätsgebäude

Wille, R., Dr., Inst. Angew. Math., 53 Bonn, Bonner Talweg 8

Die folgenden Vortragsauszüge beruhen - soweit vorhanden - auf Berichten der Vortragenden. Die mit +) gekennzeichneten Vorträge werden noch in ausführlicher Form erscheinen und wurden entsprechend knapp dargestellt.

Vortragsauszüge:

N. G. de Bruijn: Kombinatorische Anzahlbestimmungen +)

In dieser vierstündigen Vorlesung wurde ein umfangreicher Überblick über den Polya'schen Satz, seine Verallgemeinerungen und seine Verwendung zur Konstruktion erzeugender Funktionen geboten. Zahlreiche Beispiele veranschaulichten die Nützlichkeit dieser Theorie.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

H. Crapo: The Geometric Approach to Coloring Problems

A (finite exchange) geometry is a finite lattice L satisfying, for all x, y in L: y covers x $\Leftrightarrow$ $\exists$ atom p complementary to x in the interval $[o, y]$. We generalize the enumerative theory of graph colorings to its natural context in geometry by applying Möbius inversion techniques (Rota) to the polynomials in two variables invented by Tutte (Proc. Camb. Phil. Soc. [43] 26–40).

Each subset A of the set X of atoms of a geometry L generates (by supremum only) a subgeometry of L. Each subgeometry has a rank $\lambda(A)$, cardinality $|A|$. Given a subgeometry C and an element $x \in L$, let $\alpha(x)$ = # atoms in C beneath x.

The rank generating function of the subgeometry C of L

$$\rho(C, \xi, \eta) = \sum_{A;\ A \subseteq C} \xi^{\lambda(C)-\lambda(A)} \eta^{|A| - \lambda(A)} .$$

The coboundary polynomial

$$\tau(C; \varphi, \nu) = \sum_{x \in L} \varphi^{\alpha(x)} p(x, \nu)$$

generalizing the chromatic polynomial $p(x, \nu) = \sum \mu(x, y) \nu^{\lambda(1) - \lambda(y)}$.

Theorem: $\tau(C; \varphi, \nu) = \nu^{\lambda(X) - \lambda(C)} (\varphi - 1)^{\lambda(C)} \rho\left(C, \frac{\nu}{\varphi - 1}, \varphi - 1\right)$.

Corollary 1. $\rho(X, -\nu, -1) = (-1)^{\lambda(X)} p(o, \nu)$.

Corollary 2. The atom set $C \subseteq X$ generates a subgeometry of L, which itself has a chromatic polynomial p_C. Then

$$\nu^{\lambda(X) - \lambda(C)} p_C(o, \nu) = \sum_{x \in L;\ \alpha(x) = o} p(x, \nu) .$$

If L = lattice of all partitions of the set of vertices of a graph, then the edges of the graph are atoms of L, and

$$\nu^{\lambda(X) - \lambda(C)} p_C(o, \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k (\nu - 1) \ldots (\nu - k + 1)$$

where π_k = # k-part color-partitions of the vertices. Thus corollary 2 generalizes the usual laver factorial expression for chromatic polynomials to subgeometries of arbitrary geometries.

D. Foata: Fonctions génératrices de monoides standards
Identités combinatoriels non-commutatives

Sei X eine nichtleere Menge ("Buchstaben"), F_X das freie, nicht kommutative Monoid über X ("Wörter"); λf bezeichne die Länge von $f \in F_X$. Gegeben sei ferner eine Relation R auf X; R' sei die durch R auf F_X induzierte Äquivalenzrelation, A das Quotientenmonoid von F_X bzgl. R' ("Standardmonoid"). π sei der kanonische Homomorphismus von F_X auf A. Man definiere U als die Untermenge aus F_X, deren Wörter keine mehrfachen Buchstaben enthalten und deren

Buchstaben alle untereinander kommutiert werden dürfen, und setze $V = \pi(U)$. Ist dann Ω ein kommutativer Ring, dann gilt in der Algebra des Monoids A über Ω die Identität

$$[1 + \sum_{a \in V} a(-1)^{\lambda a}]^{-1} = \sum_{a \in V} a \quad .$$

Spezialfälle dieser Beziehung sind die Formeln $(1-x_1)^{-1}(1-x_2)^{-1}\ldots(1-x_n)^{-1} = \sum x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ aus der Theorie der formalen Potenzreihen und

$$[1 - (x_1+x_2+\ldots+x_n)]^{-1} = \sum f \; ,$$

gültig in der freien assoziativen Algebra bzgl. $x_1, \ldots, x_n$. ($\sum f$ bedeute Summation aller assoziativen, aber nicht kommutativen Monome f in $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten 1.) Die Weiterführung der obigen Betrachtungen führt schließlich bis zum Master-Theorem von Mc Mahon.

Harper, L. H.: Combinatorial Coding Theory +)

The general problem of combinatorial coding theory may be stated briefly as follows: Let $A = (a_{ij})$ and $B = (b_{ij})$ be $n \times n$ matrices with non-negative entries. Then find permutations π and σ so that the functional $\sum_{i,j} f(a_{ij}, b_{\pi(i)\,\sigma(j)})$ is minimized, f a fixed convex function.

The discussion will emphasize solved and unsolved special cases, their applications and their relationship to the general problem.

Hering, F.: Über die Eckenzahl konvexer Polyeder

Es wird bewiesen, daß ein konvexes Polyeder der Dimension r mit m Seitenflächen der Dimension m-1 höchstens

$$\binom{m - [\frac{1}{2}(r+1)]}{m-r} + \binom{m - [\frac{1}{2}(r+2)]}{m-r}$$

Ecken hat. Dieses Resultat wurde zuerst von Saaty vermutet und von verschiedenen Autoren für spezielle Klassen von Polyedern bewiesen.

Kleitman, D.: Verallgemeinerte Möbiusfunktionen +)

Die in der Theorie verallgemeinerter Möbiusfunktionen verwendeten Methoden wurden erläutert und die Ergebnisse der Theorie auf kombinatorische Problemstellungen angewandt. (Vgl. z.B. Gian-Carlo Rota, On the foundations of combinatorial theory. I: Theory of Möbius functions. Zeitschr. f. W.-theorie und verw. Geb. 2(1964), 340-368)

H. Lüneburg: Endliche Geometrien +)

Diese Vorlesungsreihe befaßte sich mit

1. Inzidenzstrukturen auf endlichen Mengen und den sich durch Spezialisierungen ergebenden Folgerungen (z.B. für Operatorgruppen, Blockpläne und projektive

Ebenen)

2. Automorphismen auf Inzidenzstrukturen (Sätze von Baer - Dembowski - Hughes - Lüneburg - Parker)
3. Taktischen Zerlegungen von Inzidenzstrukturen und Matrizen
4. Einem Konstruktionsprinzip für Blockpläne aus zweifach homogenen Permutationsgruppen und
5. Endlichen projektiven Ebenen.

M. Nivat: Langages quasi - rationnels

L' exposé suivant s'occupe des langages quasi-rationnels-notion que l'on retrouve particulièrement dans les publications de M. Foata.

Les langages quasi-rationnels constituent une sous-classe des langages "context-free" que l'on définit très facilement en considérant les langages symétriques de la forme $S = \{f\ \hat{f} \mid f \in K\} \subset Z^*$ où $Z = X \cup \overline{X}$, $n \to \overline{n}$ est une bijection de X dans $\overline{X}$, $f \to \hat{f}$ est la bijection de X^* sur $\overline{X}$: si $f = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$, $\hat{f} = \overline{x}_{i_1} \overline{x}_{i_2} \ldots \overline{x}_{i_n}$, enfin K est un K-langage.

Une famille de langages L est symétriquement fermée si pour tout langage symétrique $S \subset Z^*$ et toute application φ de Z dans L φ (S) appartient à L. La famille des langages quasi-rationnels est la plus petite famille contenant les langages finis et symétriquement fermée.

Nous montrons qu'il existe des langages context-free non quasi-rationnels.

W. Oberschelp: Asymptotische Anzahlbestimmungen für die Anzahl nicht-isomorpher allgemeiner Relationssysteme

The Polya - de Bruijn theory is applied for getting the exact and the asymptotic numbers of non-isomorphic relational systems $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}$ is a sequence $(R_1, \ldots R_k)$ of relations, where R_i has place-number m_i and is restricted by a parametric condition saying, that R_i is determined by the truth-values of T_i (n) m_i-tuples, which can be chosen arbitrarily. Under certain rather general additional assumptions we have, if $b_j^{(t_i)}(\pi)$ is the number of cycles of length j in the permutation $\pi^{(t_i)}$ (over T_i (n) tuples), which is inducted by π

Theorem 1:

$$S^{(t)}(n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \gamma_n} 2^{\sum_{t \in t} \sum_{j \leq T(n)} b_j^{(t)}(\pi)}$$

Theorem 2 (asymptotic result):

If $M \geq 2$, then
$$S^{(t)}(n) = \frac{2^{\mathcal{T}(n)}}{n!} \cdot \left(1 + \frac{\binom{n}{2}}{\mathcal{T}(n) - \sum_{t \in t} \sum_{j \leq T(n)} b_j^{(t)}(\pi)} \cdot (1 + o(1))\right).$$

Here M: = max m_i; $\mathcal{T}(n) := \sum_{i=1}^{k} T_i(n)$; τ is any transposition of the γ_n.

Corollary: $S^{(t)}(n) \sim \frac{2^{\mathcal{T}(n)}}{n!}$ (Since the exponent in Theorem 2 is $\sim \mathcal{T}'(n)$).

H. J. Ryser: Neue Probleme in der Kombinatorik +)

Ausgehend von den klassischen Resultaten über Repräsentantensysteme und den Ergebnissen über kombinatorische Anordnungen wurden verschiedene neue (gelöste und undgelöste) Problemstellungen vorgeführt. Daran schlossen sich zwei Vorlesungen über kombinatorische Ungleichungen und die Faktorisierung von Matrizen. Ein Vortrag über kombinatorische Extremalprobleme beschloß die Vorlesungsreihe.

J. J. Seidel: Stark reguläre Graphen +)

Stark reguläre Graphen treten auf in der Geometrie, bei statistischen Fragestellungen, bei der Planung elektrischer Netzwerke und in der Algebra. Die (0, - 1, +1) - Strukturmatrix A und die Ordnung V eines stark regulären Graphen genügen den Beziehungen:

$$A J = \rho_o J \qquad (A - \rho_1 I)(A - \rho_2 I) = (V - 1 + \rho_1 \rho_2) J$$

wobei ρ_o, ρ_1, ρ_2, die Eigenwerte von A sind, I die Einheitsmatriz, J die Matrix aus lauter Einsen. Von diesen Beziehungen ausgehend gelingt es, eine Klassifikation der starken Graphen in drei Typen zu erstellen und gewisse Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zu beweisen.

H. H. Bock, Freiburg