Math. Forschungsinstitut Oberwolfach
E 20 / 01119

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Jordan-Algebren und nicht-assoziative Algebren

vom 17. bis 26.8.1967

Diese erste am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach abgehaltene Tagung über Jordan-Algebren hatte reges Interesse im In- und Ausland gefunden. Sie wurde von N. Jacobson, M. Koecher und L.J. Paige geleitet. Von den 42 Teilnehmern waren 28 aus dem Ausland gekommen, davon 12 aus USA. An 6 Tagen wurden 31 Vorträge gehalten.

Teilnehmer:

Allen, H.P. (Amsterdam)
Behrens, E. (Frankfurt)
Bönecke, E. (Hamburg)
Boers, A.H. (Ryswyk)
Braun, H. (Hamburg)
Brown, R.E. (Berkeley)
Carlsson, R. (Hamburg)
Christensen, E. (Aarhus)
v. Dooyeweert, J.H. (Utrecht)
Eichhorn, W. (Würzburg)
Glennie, C.M. (Edinburgh)
Gray, A. (Berkeley)
Helwig, K.-H. (München)
Hirzebruch, U. (München)
Høiland, G. (Aarhus)
Jacobson, N. (New Haven)
Janssen, G. (Rüningen)
Jonker, P. (Utrecht)
Kalmijn, L.J. (Utrecht)
Knopfmacher, J. (Johannesburg)
Koecher, M. (München)
Martindale, W.S. (Amherst)
McCrimmon, K. (Cambridge)
Meyberg, K. (München)
Mikkelsen, J. (Aarhus)
Osborn, J.M. (Madison)
Paige, L.J. (Los Angeles)
Resnikoff, H.L. (Houston)
Rühaak, H. (Hamburg)
Sagle, A.A. (Minneapolis)
Schafer, R.D. (Cambridge)
Scheele, K. (Bremerhaven)
Schweiger, F. (Wien)
Smits, Th. (Delft)
Springer, T.A. (Utrecht)
Størmer, E. (Oslo)
Taft, E.J. (Princeton)
Thedy, A. (Aarhus)
Tits, J. (Bonn)
Tsai, Ch. (East Lansing)
Veldkamp, F.D. (Utrecht)
Weinert, H.J. (Mannheim)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

T a g u n g s b e r i c h t

Jordan-Algebren und nicht-assoziative Algebren

vom 17. bis 26.8.1967

Diese [illegible] im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach [illegible] Tagung über Jordan-Algebren hatte reges Interesse im In- und Ausland gefunden. Sie wurde von N. Jacobson, M. Koecher und L.J. Paige geleitet. Von den 42 Teilnehmern waren 28 aus dem Ausland gekommen, davon 12 aus USA. An 6 Tagen wurden 31 Vorträge gehalten.

Teilnehmer:

Allen, H.P. ([illegible])
Behrens, [illegible] (Frankfurt)
[illegible] (Hamburg)
[illegible] (Pruneyre)
Braun, H. (Hamburg)
Brown, R.B. (Berkeley)
[illegible] (Hamburg)
[illegible] (Aarhus)
v. D[illegible], J.H. (Utrecht)
[illegible] (Würzburg)
Glennie, C.M. (Zürich)
Gray, A. (Berkeley)
Helwig, K.H. (München)
[illegible] (München)
[illegible] ([illegible])
Jacobson, N. (New Haven)
[illegible] (Tübingen)
Jordan, P. (Hamburg)
Kal[illegible], G.K. (Utrecht)
Knopfmacher, J. (Johannesburg)
Koecher, M. (München)

Martindale, W.S. (Amherst)
McCrimmon, K. (Cambridge)
Meyberg, K. (München)
Mikkelsen, J. (Aarhus)
Osborn, J.M. (Madison)
Paige, L.J. (Los Angeles)
Resnikoff, H.L. (Houston)
Rühaak, H. (Hamburg)
Sagle, A.A. (Minneapolis)
Schafer, R.D. (Cambridge)
Schuel[illegible], K. ([illegible])
Sch[illegible], F. (Wien)
S[illegible], Th. (Delft)
Springer, T.A. (Utrecht)
Størmer, E. (Oslo)
Taft, E.J. (Princeton)
Thedy, A. (Aarhus)
Tits, J. (Bonn)
Tsai, Ch. ([illegible])
Veldkamp, F.D. (Utrecht)
Weinert, H.J. ([illegible])

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge:

ALLEN, H.P.: Hopf Algebras and Forms of Algebras

This paper presents a general theory of descent for algebraic objects defined over arbitrary fields in terms of unrestricted "splitting" fields — i.e., without assuming separability or (purely inseparable) exponent 1. The theory has a very broad range of application, with the "form" content of (the classical concept of) an algebra appearing as a special case. We present a completeness theorem with isomorphism conditions for "derived descent classes" and apply this to obtain Jacobson's conjectured classification of forms of the generalized Witt algebras.

BÖNECKE, E.: Lie-Homomorphismen von Primringen

Seien R und R' zwei assoziative Ringe, φ additiver Homomorphismus von R auf R' und Homomorphismus bezüglich der Lie-Multiplikation

$$[a,b] = ab - ba .$$

Es wird gezeigt, daß φ unter den Voraussetzungen

(1) R' Primring mit char $R' \neq 2$

(2) $\varphi(aba) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)$ für $a,b \in R$

ein Homomorphismus bzgl. der gewöhnlichen Multiplikation ist. Der Beweis ist analog zu dem von M.F. Smiley (Jordan homomorphisms onto prime rings, Trans.Amer.Math.Soc. 84 (1957), pp.426-429) für den entsprechenden Satz bei Jordan-Homomorphismen.

BOERS, A.H.: N-assoziative und N-prod-assoziative Ringe

Der Ring R wird N-assoziativ genannt, falls jeder N-Assoziator $\{a_1,a_2,\ldots,a_N\}$ verschwindet. Der N-Assoziator wird rekursiv definiert:

$$\{a_1,a_2,\ldots,a_N\} = \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k+1}\{a_1,a_2,\ldots,a_k a_{k+1},\ldots,a_N\} \quad \text{mit} \quad \{a_1,a_2\} = a_1a_2 .$$

Man kann den N-Assoziator auch mit Hilfe von Permutationen ausdrücken und das ruft die Idee hervor, eine andere Klasse von Ringen, die sogenannten N-prod-assoziativen Ringe, einzuführen. R wird N-prod-assoziativ genannt, falls das Produkt von N Faktoren nicht von der Klammerung abhängt. Es stellt sich heraus, daß ein N-prod-assoziativer Ring N-assoziativ ist.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Vortragsauszüge:

ALLEN, H. P.: Hopf Algebras and Forms of Algebras

This paper presents a general theory of descent for algebraic objects defined over arbitrary fields in terms of unrestricted "splitting" fields -- i.e., without assuming separability or (purely inseparable) exponent 1. The theory has a very broad range of application, with the "form" content of (the classical concept of) Lie algebras appearing as a special case. He presents a completeness theorem with isomorphism conditions for "derived descent classes" and apply this to obtain Jacobson's conjectured classification of forms of the generalized Witt algebras.

BÖRNCKE, H.: Lie-Homomorphismen von Primringen

Seien R und R' zwei assoziative Ringe, φ additiver Homomorphismus von R auf R' und Homomorphismus bezüglich der Lie-Multiplikation

$[a,b] = ab - ba$.

Es wird gezeigt, daß φ unter den Voraussetzungen

(1) R' Primring mit char R' $\neq$ 2

(2) $\varphi(aba) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)$ für $a,b \in R$

ein Homomorphismus bzgl. der gewöhnlichen Multiplikation ist. Der Beweis ist analog zu dem von M.F. Smiley (Jordan homomorphisms onto prime rings, Trans.Amer.Math.Soc. 84 (1957), pp.426-429) für den entsprechenden Satz bei Jordan-Homomorphismen.

BOERS, A. H.: N-assoziative und N-prod-assoziative Ringe

Der Ring R wird N-assoziativ genannt, falls jeder N-Assoziator $\{a_1,a_2,\dots,a_N\}$ verschwindet. Der N-Assoziator wird rekursiv definiert:

$$\{a_1,a_2,\dots,a_N\} = \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k-1}\{a_1,a_2,\dots,a_k a_{k+1},\dots,a_N\} \quad \text{mit} \quad \{a_1,a_2\} =$$

$= a_1 a_2$. Man kann den N-Assoziator auch mit Hilfe von Permutationen ausdrücken. Man kann auch die Theorie eine andere Klasse von Ringen, die sogenannten N-prod-assoziativen Ringe, einzuführen. A wird N-prod-assoziativ genannt, falls jedes Produkt von N Faktoren nicht von der Klammerung abhängt. Es wird bewiesen, daß ein N-prod-assoziativer Ring N-assoziativ ist.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

BRAUN, H.: Doppelverhältnisse in Jordan-Algebren

$\mathfrak{A}$ sei eine endlich-dimensionale Jordan-Algebra über K, Char K $\neq$ 2, mit Einselement. P bezeichne die quadratische Darstellung. Für generisch unabhängige a,b,c,d von $\mathfrak{A}$ setze man $D(a,b,c,d) = P(a-b)P^{-1}(b-c)P(c-d)P^{-1}(d-a)$. Die Abbildung $E(a,b,c,d) =$ = Identität $- D(a,c,b,d) + D(a,b,c,d)$ stimmt im Fall $\mathfrak{A} = K$ mit dem gewöhnlichen Doppelverhältnis überein. Eigenschaften der E's und D's werden angegeben, ebenso ihre Anwendung auf die Kongruenz von Punktepaaren in Halbräumen.

BROWN, R.B.: Lie Algebras and Groups of Type E_7

This report concerns an axiomatic description of the 56-dimensional module for the Lie algebra E_7. The one main axiom states a relation between two multilinear forms on the module. The group leaving the forms invariant is investigated, and modulo its center is shown to be simple in the case of a "reduced" module. These groups coincide with the Chevalley groups of type E_7 in case the module is "split".

EICHHORN, W.: Über die multiplikativen Abbildungen der Quaternionen- und Cayley-Algebren in kommutative Halbgruppen

Es sei $\mathfrak{Q}$ bzw. $\mathfrak{C}$ eine Quaternionen- bzw. Cayley-Algebra über einem Körper K der Charakteristik $\neq$ 2. Für jede Abbildung $f : \mathfrak{Q} \to H$ oder $f : \mathfrak{C} \to H$ (H eine kommutative Halbgruppe) mit $f(xy) = f(x)f(y)$ gilt, wie bewiesen wird, $f(x^2) = f(x)^2 = f(N(x))$ $(N(x) = x\bar{x} = \bar{x}x$ die Hauptnorm in $\mathfrak{Q}$ bzw. $\mathfrak{C})$. Hieraus folgt, daß die Fortsetzung Φ einer beliebigen reellwertigen Bewertung φ eines Körpers K der Charakteristik $\neq$ 2 auf eine Divisionsalgebra $\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{C}$ über K eindeutig bestimmt ist: $\Phi(x) = \sqrt{\varphi(N(x))}$. Dies und ein bekanntes Ergebnis über die archimedischen Bewertungen des reellen Zahlkörpers $\mathbb{R}$ erlauben eine Charakterisierung des absoluten Betrages $|x| = \sqrt{N(x)}$ der klassischen reellen (Hamiltonschen) Quaternionen $\mathfrak{H}\mathfrak{Q}$ und Cayleyschen Zahlen $\mathfrak{C}\mathfrak{Z}$: $\Phi(x) = |x|$ ist die einzige Bewertung von $\mathfrak{H}\mathfrak{Q}$ bzw. $\mathfrak{C}\mathfrak{Z}$, für die $\Phi(2) = 2$ ist. — Weiter wird bewiesen: Jede multiplikative Funktion mit Definitionsbereich $\mathfrak{H}\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{C}\mathfrak{Z}$ und Wertebereich in einer beliebigen kommutativen Halbgruppe ist eine multiplikative Funktion allein des Betrages $|x|$ (und nicht der Richtung) von x: $f(x) = f(|x|)$. Als Anwendung dieses Satzes ergibt sich die folgende Charakterisierung der Algebren $\mathfrak{H}\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{Z}$: $\mathfrak{H}\mathfrak{Q}$ bzw. $\mathfrak{C}\mathfrak{Z}$ ist die einzige assoziative bzw.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

BRAUN, H.: Doppelverhältnisse in Jordan-Algebren

[illegible] sei eine endlich-dimensionale Jordan-Algebra über K, Char K $\neq$ 2, mit Einselement. P bezeichne die quadratische Darstellung. Für gewisse unabhängige a, b, c, d von A setze [illegible] $D(a,b,c,d)$ = $= P(a-c)P^{-1}(a-d)P(c-d)P^{-1}(d-e)$. Die Abbildung $E(a,b,c,d)$ = $=$ Identität $- D(a,c,b,d) + D(a,b,c,d)$ stimmt im Fall $A = K$ mit dem gewöhnlichen Doppelverhältnis überein. Eigenschaften der E's und D's werden angegeben, ebenso ihre Anwendung auf die Kongruenz von Punktepaaren im [illegible].

BRAUN, [illegible]: Lie Algebras and Groups of Type E_7

This report concerns an axiomatic description of the 56-dimensional module for the Lie algebra E_7. The main axiom states a relation between two multilinear forms on the module. The group leaving the form invariant is investigated, and modulo its center is shown to be simple in the case of a "reduced" module. These groups coincide with the Chevalley group of type E_7 in case the module is "split".

BICHHORN, V.: Über die multiplikativen Abbildungen der Quaternionen- und Cayley-Algebren in kommutative Halbgruppen

Es sei $\mathfrak{Q}$ bzw. $\mathfrak{G}$ eine Quaternionen- bzw. Cayley-Algebra über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$. Für jede Abbildung $f : \mathfrak{Q} \to H$ oder $f : \mathfrak{G} \to H$ (H eine kommutative Halbgruppe) mit $f(xy) = f(x)f(y)$ gilt, wie bewiesen wird, $f(x^2) = f(x)^2 = f(N(x))$ ($N(x) = x\bar{x} = \bar{x}x$ die Hauptnorm in $\mathfrak{Q}$ bzw. $\mathfrak{G}$). Hieraus folgt, daß die Fortsetzung Φ einer beliebigen reellwertigen Bewertung φ eines Körpers K der Charakteristik $\neq 2$ auf eine Divisionsalgebra $\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{G}$ über K eindeutig bestimmt ist: $\Phi(x) = \sqrt{\varphi(N(x))}$. Dies und ein bekanntes Ergebnis über die archimedischen Bewertungen des reellen Zahlkörpers $\mathbb{R}$ erlauben eine Charakterisierung des [illegible] Betrages $|x| = \sqrt{N(x)}$ der klassischen reellen (Hamiltonschen) Quaternionen $\mathfrak{Q}$ und Cayleyschen Zahlen $\mathfrak{G}$: $\Phi(x) = |x|$ ist die einzige Bewertung von $\mathfrak{Q}$ bzw. $\mathfrak{G}$, für die $\Phi(-1) = 2$ ist. — Weiter wird bewiesen: Jede multiplikative Funktion mit Definitionsbereich $\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{G}$ und Wertebereich in einer beliebigen kommutativen Halbgruppe ist eine multiplikative Funktion allein des Betrages $|x|$ (und nicht der Richtung) von x: $f(x) = f(|x|)$. Als Anwendung dieses Satzes ergibt sich die folgende Charakterisierung der Algebren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{Q}$ [illegible] ... $\mathfrak{G}$ ist die einzige assoziative bzw.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

nichtassoziative alternative endlichdimensionale reelle Algebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement e, die die folgende Eigenschaft hat: Für jede multiplikative Abbildung $f : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ gilt $f(x) = f(\tau(x)e)$ mit universellem $\tau : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$, wobei $\tau(x) > 0$ für $x \neq 0$ ist.

GLENNIE, C.M.: Jordan Identities and the Symmetric Group

Let $\mathfrak{A}^{(n)}$ be the free associative algebra on n generators $a_1,\dots,a_n$, $\mathfrak{J}_o^{(n)}$ the free special Jordan algebra on $a_1,\dots,a_n$, both over a field F of characteristic $\neq 2$. Every multilinear Jordan relation $p(x_1,\dots,x_n) = 0$ for which $p(a_1,\dots,a_n) = 0$ can be written as the sum of certain relations holding in $\mathfrak{A}^{(n)}$. To each of these relations corresponds a relation on the symmetric group S_n written in terms of the generators R = (12...n) and S = (1n). Conversely the Jordan identities can be enumerated using the defining relations on R and S which are well known.

GRAY, A.: Some applications of non-associative algebras to differential geometry

A vector cross product P on a vector space V over a field F is a multilinear map $P : V^r \to V$ such that $\langle P(a_1,\dots,a_r),a_i\rangle = 0$ $(1 \leq i \leq r)$ and $\|P(a_1,\dots,a_r)\|^2 = \det \langle a_i,a_j\rangle$. Here $\langle\ ,\ \rangle$ is a nondegenerate bilinear form on V. Let dim V = n. All vector cross products have been classified (R.Brown and A.Gray, to appear in Comm.Math.Helv.); they exist for the cases (i) n even, r = 1, (ii) r = n-1, (iii) n = 7, r = 2, (iv) n = 8, r = 3. If M is a differentiable manifold we say that M has a vector cross product if on each tangent space of M a vector cross product is defined, and all these vector cross products vary continuously or differentiably over M. It is well known that S^6 has a vector cross product of type (i) (i.e., an almost complex structure), and S^7 has a vector cross product of type (iii) because it is parallelizable. We show that S^8 does not have a continuous vector cross product of type (iv). Vector cross products of type (iv) are used to generate a new class of 6-dimensional almost complex manifolds.

HELWIG, K.-H.: Modifikationen reeller Jordan-Algebren

Es sei α eine Involution einer reellen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ endlicher Dimension. Vermöge $2(a \circ b) := ab + (\alpha a)b + a(\alpha b) - \alpha(ab)$ erhält der

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Vektorraum $\mathfrak{A}$ die Struktur einer Jordan-Algebra $\mathfrak{A}_\alpha$, welche nach M. Koecher eine Modifikation von $\mathfrak{A}$ heißt. Es gilt: Ist $\mathfrak{A}$ halbeinfach und $c_1,\ldots,c_r$ ein vollständiges Orthogonalsystem primitiver Idempotente, dann existiert eine Involution α von $\mathfrak{A}$, so daß $\mathfrak{A}_\alpha$ formal-reell ist und $\alpha c_i = c_i$, $1 \leq i \leq r$, gilt. – Folgerungen:

(1) Zu je zwei vollständigen Orthogonalsystemen primitiver Idempotente $c_1,\ldots,c_r$ und $d_1,\ldots,d_s$ von $\mathfrak{A}$ existiert ein innerer Automorphismus φ von $\mathfrak{A}$ mit $\varphi\{c_1,\ldots,c_r\} = \{d_1,\ldots,d_s\}$. Insbesondere ist $r = s$.

(2) Jede halbeinfache komplexe Jordan-Algebra ist die Komplexifizierung einer formal-reellen.

Diese Ergebnisse verallgemeinern frühere Resultate (Invent.math. 1, 18 - 35 (1966)).

HIRZEBRUCH, U.: Eine Verallgemeinerung des Rayleigh-Quotienten

$\mathfrak{A}$ sei eine einfache formal-reelle Jordan-Algebra vom Grad r mit reduzierter Spur λ, J_1 sei die Menge der primitiven Idempotente von $\mathfrak{A}$. Als Verallgemeinerung des Rayleigh-Quotienten betrachtet man für $x \in \mathfrak{A}$ die Funktion $f_x : J_1 \to \mathbb{R}$, die für $c \in J_1$ durch $f_x(c) := \lambda(xc)$ definiert ist. Faßt man J_1 als Riemannsche Mannigfaltigkeit auf (vergl. Math. Zeitschrift 90, 339 - 354, 1965), dann erhält man $(\operatorname{grad} f_x)_c = x_{\frac{1}{2}}(c)$, wobei $x_{\frac{1}{2}}$ die $\frac{1}{2}$-Komponente von x in der Peirce-Zerlegung bezüglich c bezeichnet. Es gilt

$$f_{xy} = f_x f_y + \tfrac{1}{2}\lambda(\operatorname{grad} f_x, \operatorname{grad} f_y)$$

und die Funktionen f_x, $x \in \mathfrak{A}$, sind genau die Lösungen einer gewissen linearen Differentialgleichung.

Bezeichnet man mit $\alpha_1(x) \geq \alpha_2(x) \geq \ldots \geq \alpha_r(x)$ die Eigenwerte von $x \in \mathfrak{A}$ und mit A_c für $c \in J_1$ die zu c orthogonalen primitiven Idempotente, dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_1(x) &= \max_{c\in J_1} f_x(c)\\
&\vdots\\
\alpha_k(x) &= \min_{d_1,\ldots,d_{k-1}\in J_1} \ \max_{c\in A_{d_1}\cap A_{d_2}\cap\ldots\cap A_{d_{k-1}}} f_x(c)\\
&\vdots\\
\alpha_r(x) &= \min_{c\in J_1} f_x(c) \quad .
\end{aligned}$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Vektorraum W die Struktur einer Jordan-Algebra W_c, welche nach M. Koecher eine Modifikation von W heißt. Es gilt: Ist W halbeinfach und $c_1,\dots,c_r$ ein vollständiges Orthogonalsystem primitiver Idempotente, dann existiert eine Involution α von W, so daß W_c formal-reell ist und $\alpha c_i = c_i$, $1 \leq i \leq r$, gilt. – Folgerungen:

(1) Sind zwei vollständige Orthogonalsysteme primitiver Idempotente $c_1,\dots,c_r$ und $d_1,\dots,d_s$ von W, so existiert ein innerer Automorphismus φ von W mit $\varphi\{c_1,\dots,c_r\} = \{d_1,\dots,d_s\}$. Insbesondere ist $r = s$.

(2) Jede halbeinfache komplexe Jordan-Algebra ist die Komplexifizierung einer formal-reellen.

Diese Ergebnisse verallgemeinern frühere Resultate (Invent. math. 1, 18 - 35 (1966)).

HIRZEBRUCH, U.: Eine Verallgemeinerung des Rayleigh-Quotienten

W sei eine einfache formal-reelle Jordan-Algebra vom Grad r mit reduzierter Spur λ, J_1 sei die Menge der primitiven Idempotente von W. Als Verallgemeinerung des Rayleigh-Quotienten betrachtet man für $x \in W$ die Funktion $f_x : J_1 \to \mathbb{R}$, die für $c \in J_1$ durch $f_x(c) := \lambda(xc)$ definiert ist. Faßt man J_1 als Riemannsche Mannigfaltigkeit auf (vergl. Math. Zeitschrift 90, 339 - 354, 1965), dann erhält man $(\operatorname{grad} f_x)_c = x_{\frac{1}{2}}(c)$, wobei $x_{\frac{1}{2}}$ die $\frac{1}{2}$-Komponente von x in der Peirce-Zerlegung bezüglich c bezeichnet. Es gilt

$$f_{xy} = f_x f_y + \tfrac{1}{2}\lambda(\operatorname{grad} f_x, \operatorname{grad} f_y)$$

und die Funktionen f_x, $x \in W$, sind genau die Lösungen einer gewissen linearen Differentialgleichung.

Bezeichnet man mit $\alpha_1(x) \geq \alpha_2(x) \geq \dots \geq \alpha_r(x)$ die Eigenwerte von $x \in W$ und mit A_c für $c \in J_1$ die zu c orthogonalen primitiven Idempotente, dann gilt

$$\alpha_1(x) = \max_{c \in J_1} f_x(c)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_k(x) = \min_{c_1,\dots,c_{k-1}} \; \max_{c \in A_{c_1} \cap \dots \cap A_{c_{k-1}}} f_x(c)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_r(x) = \min_{c \in J_1} f_x(c)$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

JACOBSON, N.: Cartan Subalgebras of Jordan Algebras

Let $\mathfrak{J}$ be a Jordan algebra. Then $\mathfrak{J}$ is a Lie triple system relative to the associator composition $[a,b,c] = (ab)c - a(bc)$. Call $\mathfrak{J}$ associator nilpotent if $\mathfrak{J}$ as Lie triple system is nilpotent, that is, there exists an odd integer N such that $[\ldots[a_1,a_2,a_3],\ldots,a_{N-1},a_N] = 0$. Put $R_{a,b} = R_aR_b - R_{ab}$ where R_a is $x \to xa$ and let $J_a = R_{a,a}$. Associator nilpotence is equivalent to the existence of a K such that $R_{a_1,b_1} R_{a_2,b_2} \ldots R_{a_K,b_K} = 0$, $a_i,b_i \in \mathfrak{J}$. Now assume $\mathfrak{J}$ finite dimensional with 1. Call $\mathfrak{J}$ purely inseparable if $\mathfrak{J}$ contains a nil ideal $\mathfrak{N}$ such that $\mathfrak{J}/\mathfrak{N}$ is an associative purely inseparable field extension of the base field. $\mathfrak{J}$ is associator nilpotent if and only if $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \oplus \mathfrak{J}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{J}_n$ where the $\mathfrak{J}_i$ are ideals such that $\mathfrak{J}_i$ contains a subfield Γ_i of its center containing the identity element such that $\mathfrak{J}_i/\Gamma_i$ is purely inseparable. One has the following analogue of Engels theorem: $\mathfrak{J}$ is associator nilpotent if and only if every J_a is nilpotent. Let $U_1(\mathfrak{J})$ be the universal unital multiplication envelope of $\mathfrak{J}$. Then $\mathfrak{J}$ is associator nilpotent if and only if the Lie algebra $U_1(\mathfrak{J})^-$ is nilpotent. This implies that if $\mathfrak{K}$ is an associator nilpotent subalgebra (with 1) of $\mathfrak{J}$ then the Lie algebra $\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{K})$ of linear transformations in $\mathfrak{J}$ generated by all $R_{a,b}$, $a,b \in \mathfrak{K}$ is nilpotent. If $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 + \mathfrak{J}_1$ is the Fitting decomposition relative to $\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{K})$ then $\mathfrak{J}_0$ is a subalgebra and $\mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{J}_0 \subseteq \mathfrak{J}_1$. We have $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{J}_0$ and $\mathfrak{K}$ is called a Cartan subalgebra if $\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{K}$. The standard results of Lie theory carry over. For example, if we define a to be associator regular if dim $\mathfrak{Z}_a$ is minimal where $\mathfrak{Z}_a = \{ z \mid zJ_a^n = 0 \}$ and the base field is infinite then $\mathfrak{Z}_a$ is a Cartan subalgebra.

JACOBSON, N.: Remarks on Exceptional Jordan Algebras

The first result we note is that the restriction characteristic $\neq 3$ which is customary in this theory is removed. For this purpose one needs to replace the usual linearization of the generic norm n by $(a,b,c) = \frac{1}{2} \Delta_a^c(\Delta^b n)$ where $\Delta_b^a f$ is the directional derivative of f at b in the direction a. One has the identities $(a,b,c) = t(axc,b) =$ $= \frac{1}{2}[n(a+b+c) - n(a+b) - n(b+c) - n(a+c) + n(a) + n(b) + n(c)]$ and $4[Q(a^{\prime 2}) - Q(a)^2] = t(a)[2t(a^{\prime 3}) - t(a)t(a^{\prime 2}) + n(a)]$ where $Q(a) = \frac{1}{2}t(a^{\prime 2})$ (Springer). A second result we note is the following analogue of the invariant factor theorem: Two elements of a split exceptional finite dimensional Jordan algebra $\mathfrak{J}$ have the same orbit

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

under Aut $\mathfrak{J}$ if and only if they have the same generic minimum polynomial and same minimum polynomial. Using a result of Albert - Jacobson this is proved by showing that any element a of $\mathfrak{J}$ can be imbedded in a subalgebra of the form Φ_3^+. The problem of determining conditions for conjugacy for reduced algebras has been considered also quite recently by John Faulkner. His results are not quite complete at this time.

JONKER, P.: Lie Algebras (restricted) over a Field of Characteristic 2

Restricted Lie algebras over fields of characteristic > 7 (resp. > 3) have been studied by J. B. Seligman. He assumes the existence of a p-representation which has non-degenerate trace-form; moreover in these cases the rootspaces are still one-dimensional and one can treat these algebras in a way similar the characteristic 0-case though with a lot of additional calculations. Now such an approach is impossible in the characteristic 2-case since e.g. there exist very few algebras which have a restricted representation with non-degenerate trace-form. One part of the investigations is related to the structure of algebras which have a degree ≤ 2 (degree of $\mathfrak{A} \equiv \max_{x \in \mathfrak{A}} \dim k[x]$ where k is the groundfield and k[x] the restricted subalgebra generated by x). This is a complete theory. The results obtained from this theory can be used to general restricted Lie algebras which satisfy a relation: $Q(x^2) = Q^2(x)$ where Q is a non-defective or even non-degenerate quadratic form (non-degenerate means that the associated bilinear form of Q may have a radical R but for $r \in R$, $r \neq 0$, one has $Q(r) \neq 0$) (so no representation comes in); some side conditions have to be added. Then this a very large class including e.g. all Lie algebras associated to algebraic groups (exceptional etc.).

KNOPFMACHER, J.: On the Isomorphism Problem for Lie Algebras

The main purpose of this talk is to discuss some invariants of the isomorphism type of a Lie algebra $\mathfrak{A}$, which may be derived from any finite presentation of $\mathfrak{A}$ in terms of generators and relations, and easily used to distinguish between many different non-isomorphic algebras. The invariants are analogous to the elementary ideals and knot polynomials used in studying certain finitely-presented groups. They may also be applied to special Jordan algebras, and of course to word problems for algebras.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

order and [illegible] only if they have [illegible]
mial [illegible]
[illegible]
imbedded in [illegible]
conditions [illegible]
also quite [illegible]
complete [illegible]

[illegible], R.: [illegible] (restricted) over a field of characteristic [illegible]

Res[illegible] fields of characteristic > [illegible]
have been studied by [illegible] A. Selig[illegible]
[illegible] non-degenerate [illegible]
then [illegible] are still one-dimensional and [illegible]
[illegible] very similar [illegible] characteristic [illegible]
with a lot of additional calculations. Now such an approach [illegible]
possible [illegible] 2-forms since [illegible] There [illegible] few
algebras [illegible] representations [illegible]
[illegible] representations [illegible] structure
of algebras [illegible] (degree [illegible]) [illegible] where
K is the [illegible] the restriction [illegible] generated
[illegible]. This is [illegible] theory. The [illegible] find from this
[illegible] introduced [illegible] which satisfy
a relation: $Q(x)$ [illegible] is a non-degenerate or even non-de-
generate quadratic form (non-degenerate means that the restricted bi-
linear form of Q may have [illegible] one [illegible]
$Q(x) \neq 0$) [illegible] representations [illegible] some side conditions [illegible]
to be added. Then [illegible] a very large class including all Lie
algebras associated [illegible] (exceptions [illegible]).

[illegible], [illegible]

The main [illegible]
homomorphisms [illegible] the
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
They [illegible] algebras, [illegible]
[illegible] the same [illegible].

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

KOECHER, M.: Durch Jordan-Algebren definierte Lie-Algebren und algebraische Gruppen

Sei $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra mit Einselement e über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2$. Mit $L : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, $L(a)b = ab$, wird die linksreguläre Darstellung von $\mathfrak{A}$ bezeichnet und $L(\mathfrak{A}) = \{L(a);\ a \in \mathfrak{A}\}$ gesetzt. Neben der Struktur-Algebra

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Der}\ \mathfrak{A} \oplus L(\mathfrak{A}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Inder}\ \mathfrak{A} \oplus L(\mathfrak{A})$$

werden die Lie-Algebren

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{A}) \oplus \mathfrak{A} \oplus \overline{\mathfrak{A}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{H}(\mathfrak{A}) \oplus \mathfrak{A} \oplus \overline{\mathfrak{A}}$$

betrachtet und insbesondere deren Derivationsalgebra bestimmt. Bekanntlich ist die Lie-Algebra der sog. Strukturgruppe $\Gamma(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ gleich $\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$.

Für eine endlich dimensionale Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ sei $\Xi(\mathfrak{A})$ die Gruppe, die für ein generisches Element x durch die birationalen Abbildungen

$$t_a(x) = x+a \ (a\in\mathfrak{A}),\ Wx \ (W\in\Gamma(\mathfrak{A})) \text{ und } j(x) = -x^{-1}$$

erzeugt wird. Man erhält hierfür folgende Ergebnisse:

(a) $\Xi(\mathfrak{A})$ ist eine algebraische Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$.

(b) Die Elemente von $\Xi(\mathfrak{A})$ können durch eine Differentialgleichung charakterisiert werden.

(c) Jedes Element f von $\Xi(\mathfrak{A})$ schreibt sich als

$$f = W\circ t_a\circ j\circ t_b\circ j\circ t_c \quad \text{mit } W \in \Gamma(\mathfrak{A}) \text{ und } a,b,c \in \mathfrak{A}.$$

(d) Es gibt eine treue Darstellung $X : \Xi(\mathfrak{A}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\ \mathfrak{K}(\mathfrak{A})$.

Die Frage nach der Eindeutigkeit einer Darstellung (c) führt auf eine neue Äquivalenzrelation in Jordan-Algebren.

MARTINDALE, W.S.: Rings with Involution and Polynomial Identities

A recent result of Herstein is generalized as follows: Let $\mathfrak{A}$ be an algebra with involution containing no nonzero nilpotent ideals, whose Jordan ring of symmetric elements satisfies a polynomial identity of degree n. Then $\mathfrak{A}$ satisfies a standard identity of degree at most 4n.

McCRIMMON, K.: Was sind und was sollen die Jordan-Algebren

What are the Jordan algebras? Over fields of characteristic $\neq 2$ the basic examples are the algebras (1) $\mathfrak{A}^+$ for $\mathfrak{A}$ associative, (2) $\mathfrak{H}(\mathfrak{A},*)$ for $\mathfrak{A}$ associative with involution, (3) the Jordan algebra $\mathfrak{J}(Q)$ of a quadratic form Q, and (4) the exceptional algebra $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3)$ for $\mathfrak{C}$ the Cayley algebra. What should a Jordan algebra be? Two reasonable

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

requirements for any axiomatization of the concept of a Jordan ring or algebra over an arbitrary field are (i) it should include the above four types of algebras, and (ii) it should not include much more – any simple algebra (in a suitable sense) should be essentially one of the above types.
The usual definition in terms of a commutative multiplication xy satisfying the Jordan identity $(x^2y)x = x^2(yx)$ is unsuitable in characteristic 2 since it includes the "wrong" algebras (nodal ones) and excludes the "right" ones (the above four types). Recent investigations suggest we define a unital Jordan algebra over an arbitrary scalar ring Φ as a triple $J = (X,U,1)$ such that X is a Φ-module, $x \to U_x$ is a quadratic mapping of X into Hom(X,X), and $1 \in X$ where for all $x,y \in X$ (JA0) $U_1 = I$, (JA1) $U_{U(x)y} = U_x U_y U_x$, (JA2) $\{xxy\} = x^2 \circ y$. The above four types of algebra all carry a natural structure in this sense. The usual results concerning special algebras, inverses, isotopes, structure groups, and structure algebras carry over to this general setting. If $\frac{1}{2} \in \Phi$ there is a natural 1-1 correspondence between unital Jordan algebras in this sense and in the classical sense. Thus for characteristic $\neq 2$ (where the classical theory is perfectly satisfactory) this definition involves nothing new, while in characteristic 2 (where the classical theory is unsatisfactory) we obtain a theory more in conformity with the other characteristics.

MEYBERG, K.: Die Derivationen von Freudenthalschen Tripelsystemen

Ein Vektorraum $\mathfrak{X}$ endlicher Dimension über dem Körper K heißt ein Freudenthalsches Tripelsystem (FT-System), wenn auf $\mathfrak{X}$ eine nicht ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ und eine trilineare innere Komposition $(x,y,z) \longmapsto \{xyz\}$ definiert sind mit den folgenden Eigenschaften: $\{xyz\}$ und $\langle x,\{yzu\}\rangle$ sind symmetrisch in allen Argumenten, $\langle x,\{xxx\}\rangle \neq 0$ und

$$\{\{xxx\}xy\} = \langle y,x\rangle\{xxx\} + \langle y,\{xxx\}\rangle x \quad .$$

Eine lineare Abbildung D von $\mathfrak{X}$ in sich heißt eine Derivation von $\mathfrak{X}$, wenn $D\{xyz\} = \{xy(Dz)\} + \{x(Dy)z\} + \{(Dx)yz\}$ für alle $x,y,z \in \mathfrak{X}$ gilt. In FT-Systemen sind die Transformationen $D(x,y)$, definiert durch $D(x,y)z = \{xyz\} - \langle z,y\rangle x - \langle z,x\rangle y$ Derivationen. Es wird gezeigt, daß unter einigen weiteren Voraussetzungen jede Derivation von $\mathfrak{X}$ sich als Summe von solchen $D(x,y)$ schreiben läßt und daß die Lie-Algebra aller Derivationen einfach ist. Im Falle Char K = 0 (oder > dim $\mathfrak{X}$)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

wird die Dimension dieser Lie-Algebra berechnet und damit gezeigt, daß in einem der vorkommenden Fälle diese Lie-Algebra einfach und vom Typ E_7 ist.

OSBORN, J.M.: Some remarks on infinite-dimensional Jordan Algebras

Results discussed include the following: Theorem 1: Let $\mathfrak{A}$ be a Jordan ring with 1 of characteristic $\neq 2$ in which every element is either invertible or nilpotent. Then the set of nilpotent elements of $\mathfrak{A}$ forms an ideal. Theorem 2: Let $\mathfrak{A}$ be an associative ring with 1 of characteristic $\neq 2$, and let $\mathfrak{A}$ have an involution such that every symmetric element is either nilpotent or invertible. Then $\mathfrak{A}$ is an extension of an involution simple ring by a nil ideal. Theorem 3: Let $\mathfrak{A}$ be a simple associative algebra finite-dimensional over a field Φ of characteristic $\neq 2$, and let $\mathfrak{J}$ be a Jordan subalgebra of $\mathfrak{A}$ whose elements generate $\mathfrak{A}$ under the associative product. Then either (i) $\mathfrak{J} = \mathfrak{A}^+$, (ii) $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{A},*)$ with some involution *, or (iii) $\mathfrak{J}$ is simple of degree 2 and $\mathfrak{A} = S_1(\mathfrak{J})$. Theorem 4 (Morgan): Let $\mathfrak{A}$ be a Jordan algebra of characteristic $\neq 2$ with DCC on quadratic ideals. Then $\mathfrak{A}$ contains a unique maximal ideal $\mathfrak{N}$ without idempotents, and $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ has no absolute zero divisors and has identity element.

RESNIKOFF, H.L.: Jordan algebras and automorphic forms

Let $\mathfrak{A}$ be a compact real Jordan algebra with reduced trace σ and unit c. Denote the gradient with respect to σ by ∇, and the structure algebra of $\mathfrak{A}$ by $G(\mathfrak{A})$. If k is a non-negative integer, define $D_{2k+1} = \sigma([P(y)P(\nabla)]^k y, \nabla)$ and $D_{2k+2} =$ $= \sigma([P(y)P(\nabla)]^k P(y)\nabla, \nabla)$, where $(P(y)\nabla)f$ is understood as $2y(\nabla yf) - \frac{1}{2}(y^2\nabla f + \nabla y^2 f)$ for scalar functions f.

Theorem: $\forall i$: D_i is a $G(\mathfrak{A})$-invariant linear differential operator. $\{ D_i \mid 1 \leq i \leq \operatorname{rank} \mathfrak{A} \}$ generate the ring R of $G(\mathfrak{A})$-invariant linear differential operators.

Theorem: $D_2 = \sigma(P(y)\nabla, \nabla)$ is the Laplace-Beltrami operator of $\exp\mathfrak{A}$ relative to the natural metric $\sigma(P^{-1}(y)dy, dy)$.

Let $c = e_1 + \ldots + e_r$ be a decomposition of c into primitive orthogonal idempotents and put $c_k = \sum_{i=1}^{k} e_i$. If $x \in \mathfrak{A}$, denote the $\mathfrak{A}_1(c_k)$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

mit d die Dimension dieser Lie-Algebra bezeichnet und damit gezeigt, daß in einem der vier [illegible] -Algebra einfach und von E_7 ist.

[illegible], R.D.: [illegible] Jordan Algebras

[illegible] following: Theorem 1: Let [illegible] ring [illegible] characteristic ≠ 2 in which every element [illegible] nilpotent. Then the set of nilpotent elements [illegible] ideal. Theorem 2: Let R be an associative ring with 1 of characteristic ≠ 2, and let R have an involution [illegible] such that every [illegible] is either nilpotent or invertible. Then R is [illegible] simple ring [illegible] ideal. Theorem 3: Let [illegible] associative algebra finite-dimensional [illegible] of characteristic ≠ 2, and let J be a Jordan subalgebra [illegible] which [illegible] generates A under the associative product. Then either (i) [illegible], (ii) [illegible] with some involution *, [illegible] simple of degree 2 and [illegible]. Theorem 4 (Morgan): Let [illegible] Jordan algebra of characteristic ≠ 2 with DCC on quadratic ideals. Then J contains [illegible] maximal ideal M without idempotents, [illegible] zero divisors and an identity element.

[illegible]NIKOV, [illegible] L.: Jordan algebras and automorphic forms

Let J be a compact real Jordan algebra with reduced trace [illegible] denote the gradient with respect to [illegible], and [illegible] G(J). If [illegible] is a non-negative integer, [illegible] where [illegible] is understood as [illegible] for scalar functions f.

Theorem [illegible] G(J)-invariant linear differential operators [illegible] generate the ring [illegible] G(J)-invariant linear differential operators.

Theorem [illegible] Laplace-Beltrami operator of [illegible] natural metric [illegible].

[illegible] decomposition of [illegible] primitive ortho-[illegible]

[illegible] denote the [illegible]

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

reduced norm of $P(c_k)x \in \mathfrak{A}_1(c_k)$ by $|x|_k$.

Theorem: For every $s = (s_1,\ldots,s_r) \in \mathbb{C}^r$, $y^{(s)} \equiv \prod_{k=1}^{r} |y|_k^{s_k}$ is an eigenfunction of the ring R.

These eigenfunctions can be used to construct generalized Mellin transforms (with respect to certain discrete unimodular groups Γ_n) of the form $\mathfrak{M}(f) = \int_{\exp\mathfrak{A}/\Gamma_n} f(y)\varepsilon_y(s)|y|^t \frac{dy}{|y|^q}$, where

$\varepsilon_y(s) = \sum_{w\in\Gamma_n} \prod_k |w_y|_k^{-s_k}$ is a Γ_n-invariant eigenfunction of R, and $q = \dim \mathfrak{A}/\text{rank } \mathfrak{A}$. For the well known examples of modular groups, the operator $\mathfrak{M}$ can be used to associate Dirichlet series with automorphic forms, generalizing the method of Hecke.

SAGLE, A.A.: Homogeneous spaces, holonomy and non-associative algebras

K. Nomizu established a correspondence between invariant connections on a reductive homogeneous space G/H = M and non-associative algebras defined on the tangent space M_p ($p = H \in M$) with H acting as an automorphism group of the algebra. Thus algebrically if $\underline{g}$ (resp. $\underline{h}$) is the Lie algebra of G (resp. H), there is a subspace m of g with $\underline{g} = \underline{m} + \underline{h}$ (direct sum) and $[\underline{m}\ \underline{h}] \subset \underline{m}$. Furthermore for each invariant connection on G/H there is a bilinear multiplication $\alpha(x,y)$ on m with $ad_{\underline{m}}\,\underline{h}$ derivations of α. The canonical connection of the first kind on G/H is when 1-parametor subgroups in G project into geodesics in G/H; this condition is given by $\alpha(x,y) = \frac{1}{2}[XY]$ = projection of $[XY]g$ into $\underline{m}$ for $X,Y \in \underline{m}$. Let G/H have the connection of the first kind, then there is a correspondence between holonomy irreducible nonsymmetric spaces G/H and simple algebras $\underline{m}$ with multiplication $XY = [XY]_m$. In case G/H is pseudo-Riemannian and irreducible, the Lie algebra of the holonomy group is generated by the maps $l(X) : \underline{m} \to \underline{m}$: $Y \to XY$ and is a semi-simple Lie algebra. When the general connection multiplication $\alpha(X,Y)$ is considered, the irreducibility of G/H yields $(\underline{m},\alpha)$ is a simple algebra but the holonomy algebra is only contained in the Lie algebra generated by the maps $\alpha(X)Y = \alpha(X,Y)$ and $\beta(X)Y = \alpha(Y,X)$. The general connection (given by

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

$\alpha(X,Y)$) can be compared with the connection of the first kind by a 1-1 correspondence to invertible elements in a Jordan algebra and irreducibility of G/H studied by this Jordan algebra.

SCHAFER, R.D.: Standard Algebras

In 1948 A. A. Albert defined a standard algebra $\mathfrak{A}$ by the identities $(x,y,z) + (z,x,y) - (x,z,y) = 0$ and $(x,y,wz) + (w,y,xz) + (z,y,wx) = 0$. Standard algebras include all associative algebras and commutative Jordan algebras. The radical $\mathfrak{N}$ of any finite-dimensional standard algebra $\mathfrak{A}$ is its maximal nilpotent ideal. It is known that any semisimple standard algebra is a direct sum of simple ideals, and that any simple standard algebra is either associative or a commutative Jordan algebra.

In this paper we study Peirce decompositions and derivations of standard algebras. We prove the Wedderburn principal theorem for standard algebras of characteristic $\neq 2$: If $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ is separable, then $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{N}$ where $\mathfrak{B}$ is a subalgebra of $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{N}$. For standard algebras of characteristic 0 we prove analogues of the first Whitehead lemma and the Malcev-Harish-Chandra theorem, and we determine when the derivation algebra of $\mathfrak{A}$ is semisimple.

SCHWEIGER, F.: Erweiterungen nichtassoziativer Algebren

Eilenberg (Ann.Soc.Polon.Math.21) untersuchte Erweiterungen $0 \to C \to B \to A \to 0$ nichtassoziativer Algebren der Klasse C(S), die die Bedingung $C^2 = 0$ erfüllten. Die Äquivalenzklassen bilden einen Vektorraum $H^2(A,C)$. Es werden nun allgemeine Typen untersucht, wobei lediglich verlangt wird, daß der Annullator N von C in B ein Ideal bleibt. Es stellt sich heraus, daß ähnliche Erweiterungen durch $H^2(A,N)$ beschrieben werden, wie dies Hochschild für assoziative Algebren gezeigt hat.

SPRINGER, T.A.: Jordan algebras and algebraic groups

The purpose of this talk is to indicate how one can obtain the classification of simple Jordan algebras from the Killing-Cartan-Chevalley classification of simple algebraic groups and their representations. Let $\mathfrak{A}$ be a Jordan algebra with identity e over a field k of characteristic not 2. For simplicity of the exposition

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

k is assumed to be algebraically closed. Let G be the structure group of $\mathfrak{A}$, i.e. the group of invertible linear transformations T of $\mathfrak{A}$, such that there exists an invertible T' with $(Tx)^{-1} = T'(x^{-1})$. G is an algebraic group. Here are some steps of the argument:

(a) If $\mathfrak{A}$ is simple, G acts irreducibly in $\mathfrak{A}$, from which one concludes that the identity component G_o of G is the product of a semi-simple group H and the group of scalar multiplications.

(b) If $\mathfrak{A}$ is simple, then H is either quasi-simple or isogeneous to the product of 2 simple groups.

(c) Let $\mathfrak{A}$ be simple, let H be a simple algebraic group. Using a primitive idempotent of $\mathfrak{A}$, one constructs a 1-dimensional subtorus S of H such that in the representation of S in $\mathfrak{A}$ at most 3 distinct characters occur, which can be ordered such that the highest has multiplicity 1. These simple H can be classified.

One has a similar situation in the case that H is not simple.

STØRMER, E.: Jordan algebras of self-adjoint operators

The main results obtained so far on weakly closed Jordan algebras of bounded self-adjoint operators on complex Hilbert spaces - JW-algebras - will be discussed. In particular, all irreducible JW-algebras will be characterized, the result being exactly what should be expected from the finite dimensional case.

TAFT, E.J.: Automorphisms and derivations of Jordan algebras and non-associative algebras

1) An example of a finite group G of automorphisms of a Jordan algebra $\mathfrak{A}$ of characteristic 0 which respects all Wedderburn decompositions of $\mathfrak{A}$, but no two Wedderburn factors are isomorphic via an automorphism of $\mathfrak{A}$ expressible in terms of fixed points of G.
2) A proof of the Whitehead first lemma and the Malcev theorem for Jordan algebras of characteristic 0, using a construction of M. Koecher and the analogous results for Lie algebras.
3) An example of a commutative Jordan algebra without unit element, which is admissible, but which has a homomorphic image which is not admissible.
4) Let $\mathfrak{A}$ be an associative or Lie algebra of characteristic 0, $\mathfrak{R}$ the radical, $\mathfrak{L}$ a completely reducible Lie algebra of derivations of $\mathfrak{A}$. Then $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \dotplus \mathfrak{R}$, $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{R}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{B}$, and any two such $\mathfrak{B}$ are

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

[illegible] topologically closed. Let G be the structure group [illegible] of invertible linear transformation T of U, [illegible] invertible T' with $(Tx)^{-1} = T'(x^{-1})$. G is [illegible] steps of the argument:

(a) [illegible] G acts irreducibly in U, from which [illegible] concludes [illegible] component G_o of G is the product [illegible] group [illegible] of scalar multiplication.

(b) If K is simple, then [illegible] either [illegible] isomorphic to the product of 2 simple groups.

(c) Let U be simple, let K be a simple [illegible] group. [illegible] primitive idempotent [illegible], or [illegible] of U such that [illegible] purposes [illegible] subtorus S [illegible] occur, which can be [illegible] distinct multiplicity 1. These [illegible] classified. [illegible] in the case that K is not simple.

[illegible] 2. Jordan algebras of self-adjoint operators

The main results obtained so far on weakly closed Jordan algebras of [illegible] self-adjoint operators on complex Hilbert space - [illegible] - will be discussed. In particular, all irreducible [illegible] will be characterized, the result being exactly what [illegible] be expected from the finite dimensional case.

[illegible] 4.1: Automorphisms and derivations of Jordan algebras and non-associative algebras

[illegible] group G of automorphisms of a [illegible] which respects all Wedderburn de- [illegible] no two Wedderburn factors are isomorphic [illegible] expressible in terms of fixed points of G. [illegible] first lemma and the Malcev theorem for [illegible] characteristic 0, using a construction of M. [illegible] results for Lie algebras.

[illegible] commutative Jordan algebra without unit element, [illegible] which has a monomorphic [illegible] is [illegible].

[illegible] characteristic 0. [illegible] the [illegible] algebra of derivations of U. [illegible], and any two such [illegible] are isomorphic via exp(Ad x), x an $\mathcal{L}$-constant in $\mathcal{R}$. A similar result holds for associative algebras of characteristic p, provided $\mathcal{R}\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}$.

THEDY, A.: Mutationen und polarisierte Fundamentalformel

Let $\mathfrak{A}$ be a finite dimensional algebra over a field of char $\neq 2$ with product ab. Denote $(a,b,c) := (ab)c - a(bc)$ and $Z(a,b,c) := (a,b,c) + (b,c,a) + (c,a,b)$. Give the vector space $\mathfrak{A}$ a new multiplication $\perp_f$ by choosing $f \in \mathfrak{A}$ fixed and defining $u \perp_f v := u(fv) - (v,u,f)$. The resulting algebra $\mathfrak{A}_f$ is called the (right) mutation of $\mathfrak{A}$ with respect to f. Define the linear transformation $P(u,v) : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ by $P(u,v)f := u \perp_f v$ and put $P(u) := P(u,u)$. The algebras satisfying the fundamental formula $P(x)P(u,v)P(x) = P(P(x)u, P(x)v)$ and having a unit element are non-commutative Jordan algebras satisfying $Z(a,b,c) = 0$. Their mutations have the known properties of mutations of Jordan algebras. By $Z(a,b,c) = 0$ the alternative algebras of char $\neq 3$ are ruled out. Nevertheless mutations of alternative algebras are non-commutative Jordan algebras having nice properties without being necessarily alternative.

TITS, J.: Exceptional simple Jordan algebras

(I) Denote by k a field of characteristic not 2, by $\mathfrak{A}$ a central simple algebra of degree 3 over k, by $n : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ and $tr : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ the reduced norm and reduced trace, and by $* : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ the symmetric bilinear product defined by $(x{*}x)x = n(x)$. For $x \in \mathfrak{A}$ set $\tilde{x} = \frac{1}{2}((tr x)1 - x)$. Let $c \in k^* = k - \{0\}$. In the space $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, sum of three copies of $\mathfrak{A}$, define a product by the following table (with obvious notational conventions):

	x_0	y_1	z_2
x'_0	$\frac{1}{2}(xx'+x'x)_0$	$(\tilde{x}'y)_1$	$(z\tilde{x}')_2$
y'_1	$(\tilde{x}y')_1$	$c(y{*}y')_2$	$(\widetilde{y'z})_0$
z'_2	$(z'\tilde{x})_2$	$(\widetilde{yz'})_0$	$\frac{1}{c}(z{*}z')_1$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

(II) Denote by l a quadratic extension of k, by $\mathfrak{B}$ a central simple algebra of degree 3 over l, and by $\sigma : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ an involution of the second kind such that $k = \{x \in l \mid x^\sigma = x\}$. Set $\mathfrak{B}^{sym} = \{x \in \mathfrak{B} \mid x^\sigma = x\}$. Let $b \in \mathfrak{B}^{sym}$ and $c \in l^* = l - \{0\}$ be such that $n(b) = c^\sigma c$. In the space $\mathfrak{B}^{sym} + \mathfrak{B}_*$, sum of $\mathfrak{B}^{sym}$ and a copy $\mathfrak{B}_*$ of $\mathfrak{B}$, define a product by the following table:

	x	y
x'	$\frac{1}{2}(xx'+x'x)$	$(\tilde{x}'y)_*$
y'	$(\tilde{x}y')_*$	$\overline{(yby'^{\sigma}+y'by^{\sigma})} + (c^{\sigma}(y^{\sigma} * y'^{\sigma})b^{-1})_*$

Theorem 1. The 27-dimensional algebras described under (I) and (II) are exceptional simple Jordan algebras over k. Every such algebra is obtained by at least one of the two constructions.

Theorem 2. The algebra (I) is split if $c \in n(\mathfrak{A})$ and division otherwise. The algebra (II) is reduced if $c \in n(\mathfrak{B})$ and division otherwise.

Theorem 3. There exists an algebra of type (II) which does not split on any cyclic extension of degree 2 or 3 of k. (Notice that such an algebra is necessarily division and not of type (I)).

(For more details, see N. Jacobson, Jordan Algebras, a forthcoming book).

TSAI, C.: Prime Radical in Jordan Rings

Similar results about Brown-McCoy type radical can be obtained in Jordan rings by defining an ideal I in J to be a prime ideal if for any ideals A and B in J such that $A \cup B \subseteq I$ then $A \subseteq I$ or $B \subseteq I$. If A is an ideal in J, the radical of A is the intersection of all prime (semi-prime) ideals in J containing A. The radical J(R) of J is defined to be the radical of the zero ideal of J. It can be proved that $J(R/J(R)) = 0$.
$R(J) = 0$ iff J is the subdirect sum of prime rings and if d.c.c. holds for prime ideals in J, then $R(J) = 0$ iff $J = J_1 \oplus \dots \oplus J_k$ where J_i are prime rings.
For any J, R(J) is a nilideal in J containing all nilpotent ideals in J. If J is finite dimensional over its center, R(J) is the usual radical in a finite dimensional Jordan algebra.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

(II) Denote by [illegible] quadratic extension of K, by B a central simple algebra of degree 3 over [illegible], and by σ : B → B an involution of the second kind such that [illegible] = {x ∈ [illegible] | x^σ = x}. Set $B^{\sigma\nu}$ = {x ∈ B | x^σ = x}. [illegible] $b \in B^{\sigma\nu}$ and c ∈ [illegible] - {0} be such that N(b) = [illegible]. On the space $B^{\sigma\nu} + B_*$, sum of $B^{\sigma\nu}$ and a copy B_* of B, [illegible] product [illegible] by the following table:

	x	y
x'	[illegible]	$(x'y)_*$
y'_*	[illegible]	$\overline{(yy'^{\sigma}+y'y^{\sigma})} + (c^{\sigma}(y^{\sigma} * y'^{\sigma})b^{-1})_*$

Theorem 1. The 27-dimensional algebras [illegible] constructed under (I) and (II) are exceptional [illegible] Jordan [illegible] over K. Every such algebra is obtained by [illegible] of these two constructions.

Theorem 2. The algebra (I) [illegible] if m(B) = 3 and division otherwise. The algebra (II) is reduced [illegible] m(B) [illegible] and division otherwise.

Theorem 3. There exists an algebra of type (II) which does not split over any cyclic extension of degree 2 or 3 of K. (Notice that such an algebra is necessarily division and not of type (I)).

(For more details, [illegible] N. Jacobson, Jordan Algebras, a forthcoming book).

TSAI, C.: Prime Radical in Jordan Rings

Similar results about Baer-McCoy type radical can be obtained in Jordan rings by defining an ideal I in J to be a prime ideal if for any ideals A and B in J such that A ∪ B ⊆ I then A ⊆ I or B ⊆ I. If A is an ideal in J, [illegible] radical of A is the intersection of all prime (and-prime) ideals in J containing A. The radical R(J) of J is defined to be the radical of the zero ideal of J. It can be proved that [illegible] = [illegible].

R(J) = 0 iff J is the subdirect sum of prime rings and the d.c.c. holds for prime ideals [illegible] then R(J) = 0 iff J = $J_1 \oplus \ldots \oplus J_k$ where J_i are prime rings.

For any J, R(J) is [illegible] containing all nilpotent ideals in J. If J is finite dimensional over its center, R(J) is the usual radical in a finite dimensional Jordan algebra.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

VELDKAMP, F.D.: On the plane geometry over split octaves

Let $\mathfrak{C}$ be a split octave algebra over a field K, $\mathfrak{A}$ the Jordan algebra of 3×3 Hermitian matrices with entries in $\mathfrak{C}$. A kind of plane can be constructed whose points and lines are the primitive idempotents and the x with $x^2 = 0$ (up to scalars in K) in $\mathfrak{A}$. Two lines may have more than one point of intersection, and dually.
A certain subgroup of the group of collineations is a split group of type E_6. A simple geometric proof of the simplicity of this group can be given.
The unitary groups relative to the nonlinear polarities are the forms of E_6 which are split by a quadratic extension of K. Thus, in case of a finite field K all forms of E_6 are found in this way.

WEINERT, H.J.: Zur Einbettung von Ringen in Oberringe mit Einselement

Es sei $R = \{a,b,\dots\}$ ein nicht notwendig assoziativer Ring und $\Gamma = \{\alpha,\beta,\dots\}$ der Ring der ganzen Zahlen. Bekanntlich erhält man zu R einen Oberring R* mit Einselement, indem man in der direkten Modulsumme $R^* = \Gamma \oplus R = \{\gamma + r\}$ eine Multiplikation gemäß $(\gamma+r)(\delta+s) = \gamma\delta + \gamma s + \delta r + rs$ einführt. Für die meisten Ringe R gibt es jedoch weitere und für Untersuchungen über R oft geeignetere Oberringe S mit Einselement e, wobei wir natürlich nur solche zu betrachten brauchen, die von R und e erzeugt werden. Wie im assoziativen Falle (vgl. H.J. Weinert, Acta Sci. Hung., Szeged, 22 (1961)) erhält man alle diese Ringe gerade als die (als Oberringe von R aufgefaßten) Restklassenringe $S = R^*/\mathfrak{a}^*$ nach allen Idealen $\mathfrak{a}^*$ mit $\mathfrak{a}^* \cap R = (0)$. Diese Ideale sind gerade die Hauptideale $\mathfrak{a}^* = (\alpha - a)$, wobei a ein α-Element von R ist, d.h. $ar = ra = \alpha r$ für alle $r \in R$ erfüllt (ausgenommen den Fall $\alpha = 0$, $a \neq 0$). Insbesondere nennen wir einen solchen Einselementoberring S von R streng, wenn dabei $\mathfrak{a}^*$ so groß wie möglich gewählt wird. In Verallgemeinerung eines Satzes von J. Szendrei (Acta Sci. Math., Szeged, 13 (1949/50)) gilt: Zu jedem alternativen Ring ohne Nullteiler existiert genau ein Einselementoberring S von R, der ebenfalls nullteilerfrei ist, nämlich der dann eindeutig bestimmte strenge Einselementoberring. Für flexible Ringe R gilt dieser Satz nur mit "höchstens ein", wobei der strenge Einselementoberring S von R entweder nullteilerfrei ist oder spezielle α-Elemente ($ab = ba = \alpha b$ für gewisse, aber nicht für alle $b \in R$) enthält, die dann gemäß $(\alpha e - a)b = b(\alpha e - a) = 0$ sämtliche Nullteiler von S liefern.

M. Koecher, München

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

©

VELDKAMP, F.D.: On the plane geometry over split octaves

Let 𝔊 be a split octave algebra over a field K, 𝔍 the Jordan algebra of 3×3 Hermitian matrices with entries in 𝔊. A kind of plane can be constructed whose points and lines are the primitive [illegible] elements x with $x^2 = 0$ (up to scalars in K) in 𝔍. Two lines may have more than one point of intersection, and dually.

[illegible] subgroup of the group of collineations is a split group of type E_6. A simple geometric proof of the simplicity of this group can be given.

The unitary groups relative to the nonlinear polarities are the forms of E_6 which are split by a quadratic extension of K. Thus, in case of a finite field K all forms of E_6 are found in this way.

WEINERT, H.J.: Zur Einbettung von Ringen in Oberringe mit Einselement

Es sei R = {a, b, ...} ein nicht notwendig assoziativer Ring und Γ = {γ, δ, ...} der Ring der ganzen Zahlen. Bekanntlich erhält man zu R einen Oberring R* mit Einselement, indem man in der direkten Modulsumme R* = Γ ⊕ R = {γ + r} eine Multiplikation gemäß (γ+r)(δ+s) = γδ + γs + δr + rs einführt. Für die meisten Ringe R gibt es jedoch [illegible] und für Untersuchungen über R oft geeignetere Oberringe S mit Einselement e, wobei wir natürlich nur solche zu betrachten brauchen, die von R und e erzeugt werden. Wie im assoziativen Falle (vgl. H.J. Weinert, Acta Sci. Math., Szeged, 22 (1961)) erhält man alle diese Ringe gerade als die (bis auf [illegible] alle Oberringe von R [illegible]) Restklassenringe R*/a* nach allen Idealen a* mit a* ∩ R = (0). Diese Ideale sind gerade die Hauptideale a* = [illegible], wobei a ein o-Element von R ist, d.h. [illegible] = ra = ar für alle r ∈ R erfüllt (ausgenommen den Fall a = 0, a ≠ 0). Insbesondere nennen wir einen [illegible] Einselementoberring [illegible] von R [illegible], wenn dabei a* so [illegible] gewählt wird.

In Verallgemeinerung eines Satzes von J. Szendrei (Acta Sci. Math., Szeged, 13 (1949/50)) gilt: Zu jedem [illegible] Ring ohne Multiplikator [illegible] genau ein Einselementoberring [illegible] von R, der ebenfalls multiplikatorfrei ist, nämlich der [illegible] Einselementoberring. Für flexible Ringe R gilt dieser Satz nur mit "höchstens ein", wobei der etwa [illegible] Einselementoberring S von R nicht multiplikatorfrei ist oder [illegible] (ab = ba = [illegible] für gewisse, aber nicht für alle [illegible]) erfüllt, die dann [illegible] (ca−a)b = b(ca−a) ≠ 0 [illegible] Multiplikator von S liefern.

M. Koecher, [illegible]

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft