Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Geometrie

16.9. bis 22.9.1967 / 21

Die diesjährige Oberwolfacher Geometrietagung stand wieder unter der Leitung von Professor Leichtweiß (Berlin) und Professor Weise (Kiel).

Die Tagung hatte ihren besonderen Akzent darin, daß sie nach Fertigstellung der Institutsneubauten erstmals im erweiterten räumlichen Rahmen stattfinden konnte.

Das Vortragsangebot der Geometrietagung war ausgesprochen umfangreich. Die Tagung wurde von den folgenden Teilnehmern besucht:

Teilnehmer:

Aumann, G., München
Barner, M., Freiburg
Bieri, H., Bern
Bilinski, S., Zagreb
Bol, G., Freiburg
Burau, W., Hamburg
Busemann, A., Los Angeles
Decker, H., Darmstadt
Degen, W., Karlsruhe
Deicke, A., Southampton
Doden, K., Kronshagen
Emde, H., Darmstadt
Ewald, G., Bochum
Frank, H., Oberwolfach
Freudenthal, H., Utrecht
Fröhlich, G., Aachen
Giering, O., Stuttgart
Havel, V., Brno
Heil, E., Darmstadt
Hoschek, J., Darmstadt
Kind, B., Bochum
Kreyszig, E., Graz
Laugwitz, D., Darmstadt
Leichtweiß, K., Berlin
Lingenberg, R., Darmstadt
Münzer, H.F., Berlin
Nimmo-Smith, N.I., Durham
Pendl, A., Freiburg

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Rahn, G., Bochum
Roether, D., Berlin
Rumberger, R., Kiel
Schaal, H., Stuttgart
Schmitt, K.A., Bochum
Simon, U., Berlin-Zürich
Stephanidis, N.K., Berlin
Strubecker, K., Karlsruhe
Tölke, J., Karlsruhe
Viesel, H., Karlsruhe
Vogel, W.O., Hannover
Volk, O., Würzburg
Voss, K., Zürich
Walter, R., Freiburg
Wegner, B., Berlin
Weise, K.H., Kiel
Willmore, T.J., Durham
Wunderlich, W., Wien

Vortragsauszüge

BOL, G.: Zur MÖBIUS-Geometrie der Kugelkongruenzen

Ein Formelsystem zur Behandlung der konformen Geometrie der zweiparametrigen Kugelsysteme wurde aufgestellt und diskutiert, in dem als Sonderfall die Formeln der Euklidischen Flächentheorie nach W. Blaschke, "Einführung in die Differentialgeometrie" enthalten sind.

Benutzt wird eine halbinvariante Fassung der Theorie der alternierenden Differentialformen nach E.Cartan, die sich schon in der Projektiven Differentialgeometrie bewährt hat. Wesentliches Hilfsmittel ist weiter das Hessesche Korrespondenzprinzip, das hier dadurch eine besonders konkrete Form annimmt, daß der Kommerellsche Kegelschnitt der Bildfläche der Kugelkongruenz im P_4 der Abbildung zugrundegelegt wird. Dieser Kegelschnitt wird bekanntlich erzeugt von den Schnittpunkten einer Normalebene der Fläche mit den infinitesimal benachbarten in beliebigen Richtungen, er artet genau dann in ein Geradenpaar aus, wenn eine Kugelkongruenz von Ribaucour vorliegt.

Eine wichtige Rolle spielen auch Schichtbarkeits-(Stratifizierungs) Fragen, auch hier spielen die Systeme von Ribaucour eine besondere Rolle. Wenn eine Kongruenz von Kreisen eine einparametrige Schar von Orthogonalflächen besitzt, so sind bekanntlich je zwei dieser Flächen Hüllflä-

chen einer Ribaucourschen Kugelkongruenz, deren Kugeln die Flächen in Punkten des gleichen Kreises der Kreiskongruenz berühren. In dieser Weise erhält man schon die allgemeinste Kongruenz von Ribaucour.

In der vorgeführten Weise lassen sich große Teile der Euklidischen Flächentheorie in die Konformgeometrie einordnen, insbesondere läßt sich ein Analogon der Gaußschen Formel für die Variation der Oberfläche eines Flächenstücks leicht angeben.

SIMON, U.: Symmetrische Zusammenhänge relativ normalisierter Hyperflächen

Durch die Relativnormalisierung einer Hyperfläche F im A_{n+1} werden verschiedene symmetrische Zusammenhänge auf F induziert. Die geometrischen Eigenschaften der Zusammenhänge werden untersucht, insbesondere ihre Autoparallelen und ihre total-autoparallelen (total-geodätischen) Untermannigfaltigkeiten. Das WEYLsche Lemma über die projektive Äquivalenz von symmetrischen Zusammenhängen und ein verallgemeinertes Ergebnis von DOUGLAS (Meth. Ann. 1931) über Wegeräume werden benutzt, um Quadriken in der äquiaffinen und Mittelpunktsquadriken in der zentroaffinen Geometrie zu kennzeichnen. Hauptergebnisse:

$$P_o \in A_{n+1} \text{ sei fest } (n \geq 2), \quad r \text{ sei natürlich, } \quad 1 \leq r \leq n.$$

1. F ist Mittelpunktsquadrik (Mittelpunkt P_o) genau dann, wenn die Schnitte von F mit $(r+1)$-dimensionalen linearen Unterräumen A_{r+1}, $P_o \in A_{r+1}$, zugleich r-dimensionale total-geodätische Untermannigfaltigkeiten von F (bezüglich der äquiaffinen oden zentroaffinen Metrik) sind.
2. F ist Mittelpunktsquadrik (mit Mittelpunkt P_o) genau dann, wenn die Eigenschattengrenzen von F bei Parallelbeleuchtung zugleich Schnitte von F mit Hyperebenen durch P_o sind.
3. F ist Quadrik genau dann, wenn die Eigenschattengrenzen (bei Parallelbeleuchtung) von F zugleich $(n-1)$-dimensionale total-geodätische

Untermannigfaltigkeiten von F sind (bezüglich der äquiaffinen oder zentroaffinen Metrik; im zentroaffinen Fall ist F stets Mittelpunktsquadrik).

WALTER, R.: Zur projektiven Kinematik konjugierter Systeme im P_n.

Die Figur einer Fläche des P_3, die eine Schar ebener konischer Kurven trägt, läßt sich auf Hyperflächen des P_n übertragen. Wie Herr Degen [in Math. Z. 97 (1967), 105-122] gezeigt hat, kann hierbei an die Stelle der einparametrigen Kurvenschar ein q-gliedriges System von p-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten mit $p \geq 1$, $q \geq 1$, $p+q = n-1$ treten. Die wichtigsten, aus dem P_3 bekannten Eigenschaften, der Zusammenhang mit der Konjugiertheit am Asymptotenkegel und die projektiv-kinematische Erzeugbarkeit der Figur, bleiben erhalten. Jedoch schienen bei dem differentialgeometrisch geführten Beweis die Annahme $p \geq 2$ und die Stratifizierbarkeit des mit der Figur verknüpften Kongruenzpaares notwendig zu sein. Die hier gegebene Behandlungsweise ist demgegenüber kinematisch orientiert und vermeidet diese Zusatzvoraussetzungen. Man wird in natürlicher Weise auf sie geführt, wenn man die kinematischen Grundbegriffe zunächst ohne Voraussetzung der Projektivität entwickelt und nach Eigenschaften sucht, die die Projektivität zur Folge haben. Für die Klasse der verallgemeinerten Zentralbewegungen läßt sich dies vollständig durchführen. Als Anwendung hiervon ergibt sich der Hauptsatz über die kinematische Erzeugung der obengenannten Figur. Zum Schluß wird auf weitere Zusammenhänge und offene Fragen hingewiesen.

STEPHANIDIS, N.K.: Integralformeln in der Liniengeometrie

Es bezeichnen: $\vec{OP} = P(u,v)$ die Mittenfläche, $\vec{OM} = M(u,v)$ die Mittenhüllfläche, k das Krümmungsmaß, h die mittlere Krümmung eines ein-

eindeutig abbildbaren Strahlensystems im dreidimensionalen euklidischen Raum, $e_3(u,v)$ den Richtungsvektor des Strahlensystems, F und K den Flächeninhalt und das Krümmungsmaß der Mittelhüllfläche, $II = l\,\omega_{31}^2 + 2m\,\omega_{31}\,\omega_{32} + n\cdot\omega_{32}^2$ die zweite Fundamentalform des Strahlensystems, $\omega_{31}\wedge\omega_{32}$ das Flächenelement des sphärischen Bildes G des Strahlensystems und ∂G den Rand von G. Die Zuordnung zwischen den Geraden des Strahlensystems und den Punkten der Mittenhüllfläche sei eineindeutig. Dann gelten die Formeln:

$$(1)\qquad \int_{\partial G} e_3 \times dP = \iint_G \vec{MP}\,\omega_{31}\wedge\omega_{32},$$

$$(2)\qquad \int_{\partial G} (\vec{MP},\ e_3,\ dP+dM) = 2F - 2\iint_G k\,\omega_{31}\wedge\omega_{32} + \iint_G |\vec{MP}|^2\,\omega_{31}\wedge\omega_{32},$$

$$(3)\qquad \int_{\partial G} (\vec{MP},\ e_3,\ dM) = 2F + \iint_G \frac{\bar{n}(1-n) - m(r-\bar{r})}{K}\,\omega_{31}\wedge\omega_{32}.$$

(r, $\bar{r}$ Normalkrümmungen der Kurven $\omega_{32} = 0$, $\omega_{31} = 0$, $\bar{n}$ geodätische Torsion der Kurve $\omega_{32} = 0$). Ferner gilt

$$(4)\qquad \int_{\partial G} (\vec{MP},\ e_3,\ d\,e_3) = -\iint_G (R_1 + R_2)\,\omega_{31}\wedge\omega_{32}.$$

(R_1, R_2 Hauptkrümmungsradien der Mittenhüllfläche).

Für Strahlensysteme, die auf die volle Kugel E sphärisch eineindeutig abbildbar sind, gilt

$$(5)\qquad F \leq \iint_E k\cdot\omega_{31}\wedge\omega_{32}, \qquad (6)\qquad \iint_E (R_1 + R_2)\,\omega_{31}\wedge\omega_{32} = 0.$$

Aus den erwähnten Integralformeln werden Folgerungen gezogen.

FRÖHLICH, G.: Über die Krümmung der Brennflächen bei W-Kongruenzen eines Strahlenkomplexes

Betrachtet wird eine Kongruenz in einem Strahlenkomplex. Aus der Lage der Brennpunkte des betrachteten Strahls in Bezug auf die Inflexionszentren ergeben sich Aussagen über die Art der Krümmung auf den Brennflächen der Kongruenz. Die Untersuchungen werden im einzelnen nur für W-Kongruenzen durchgeführt. Insbesondere zeigt sich, daß die Brennfläche einer W-Kongruenz eine singuläre Kurve, und zwar i.a. eine Rückkehrkante besitzt, wenn längs einer ganzen Regelschar der Kongruenz der entsprechende Brennpunkt mit einem Inflexionszentrum übereinstimmt, der andere Brennpunkt dagegen nicht.

BUSEMANN, A.: Definite, zeitartige und indefinite Metriken

Homogene Räume und indefinite Metriken sind vielfach betrachtet worden, aber der Begriff einer indefiniten Metrik an sich ist bisher nicht definiert worden. Gleichzeitig mit dieser ergibt sich die für die Relativitätstheorie interessante Aufgabe, zeitartige Räume zu studieren, z.B. die Lorentzschen Räume allein durch die zeitartigen Intervalle zu charakterisieren.

Die wesentlichen Attribute eines zeitartigen Raumes sind eine partielle Ordnung seiner Punkte ($x \leq y$) und eine für $x \leq y$ definierte Abstandsfunktion xy mit $xx = 0$, $xy > 0$ für $x < y$ und $xy + yz \leq xz$. Die Minkowskischen Räume, d.h. die zeitartigen translationsinvarianten Metriken im A^n werden besonders diskutiert. (Siehe Timelike Spaces, Diss. Math. No. 53, Warschau 1967).

Bei indefiniten Metriken wird eine Klasse von Jordanbogen mit den topologischen Eigenschaften kleiner geodätischer Bogen gegeben und dazu ein Abstand xy, der auf einem der gegebenen Bogen entweder identisch Null ist (Nullbogen) oder diesen isometrisch zu einem Intervall der reellen Achse macht (Strecke). Außerdem wird lokal verlangt, daß

sich für einen Punkt p und eine Strecke T die Funktion px, $x \in T$, qualitativ wie in einer der drei Möglichkeiten im Lorentzschen Raum verhält (s. Busemann und J.K. Beem, Axiome für indefinite Metriken, erscheint in den Palermo Rediconti).

WILLMORE, T.J.: k-harmonic riemannian manifolds

k-harmonic riemannian manifolds are defined and their relation with classical harmonic manifolds is examined. It is proved that a harmonic manifold is 1-harmonic. Also that a k-harmonic symmetric manifold is harmonic. Necessary andsufficient conditions for a metric to be 1-harmonic are found in terms of the curvature tensor and its covariant derivatives.

DEICKE, A.: Über k-symmetrische Riemannsche Räume

Ist M ein vollständiger Riemannscher Raum, I(M) die Gruppe aller isometrischen Abbildungen von M auf sich selbst, so nennen wir M k-symmetrisch (für eine ganze Zahl $k \geq 2$), falls

1) für jeden Punkt $p \in M$ existiert ein $\sigma_p \in I(M)$, so daß p ein isolierter Fixpunkt der Isometrie σ_p ist;
2) $\sigma_p^k = id_M$, $\sigma_p^r \neq id_M$ für $r = 1, 2, \ldots, k-1$.

Für $k = 2$ ist dies die Definition eines symmetrischen Riemannschen Raumes im üblichen Sinne. Der Vortrag gibt eine Übersicht über Ergebnisse und Probleme dieser Verallgemeinerung symmetrischer Räume.

SCHAAL, H.: Eine spezielle Klasse von Strahlflächen

Die Liesche Schmiegquadrik $\Omega(e)$ einer im P_3 liegenden windschiefen Strahlfläche Φ berührt Φ längs der Erzeugenden e von 2. Ordnung.

Variiert e in der Erzeugendenschar $\{e\}$ von Φ, so durchläuft Ω eine einparametrige Quadrikenschar $\{\Omega\}$, deren Exemplare untereinander zwar projektiv und intervallweise auch affin äquivalent, im allgemeinen aber nicht ähnlich sind. Die Forderung, daß $\{\Omega\}$ aus lauter ähnlichen Quadriken besteht, legt daher eine spezielle Klasse von Strahlflächen Φ im euklidischen E_3 fest in Analogie zu jenen vor allem von E. EDLINGER untersuchten Strahlflächen, für die $\{\Omega\}$ lauter Drehhyperboloide enthält. Mit Hilfe des Kruppaschen Kalküls werden diese Strahlflächen Φ im Sinne einer natürlichen Geometrie diskutiert, wobei im Gegensatz zu einer früheren Darstellung des Vortragenden jetzt eine von H. BRAUNER hergeleitete Gleichung der Lieschen Schmiegquadrik im begleitenden Dreibein von $\bar{\Phi}$ als Ausgangspunkt dient.

WUNDERLICH, W.: <u>Kinematisch erzeugbare Römerflächen</u>

Die durch die komplexe kartesische Darstellung

$$(*) \quad x + iy = ae^{2i\varphi} + be^{-2i\varphi} + re^{i\varphi}, \quad z = \frac{1}{2}r^2 \qquad (a, b = \text{const})$$

erklärte Fläche ist eine Steinersche Römerfläche mit einer Schar kongruenter Parabeln $\varphi = \text{const}$. Nach Diskussion der durch diese Schar definierten ebenen Bewegung werden alle Römerflächen gekennzeichnet, die durch Bewegung einer starren Parabel erzeugt werden können. Es sind dies:

1) Jene Flächen, die die Fernebene längs eines Kegelschnittes berühren (∞^1 Erzeugungen);
2) jene Flächen, die durch eine affine Scherung aus (*) hervorgehen (Zylinderschrotung);
3) jene Flächen, die durch Verschiebung einer Parabel längs einer anderen entstehen (∞^1 Erzeugungen).

GIERING, O.: Ein Beitrag zur Theorie der konstant gedrallten Strahlflächen

Die Frage nach algebraischen Strahlflächen 4. Grades von konstantem Drall hat H. BRAUNER 1963 unter der Voraussetzung reduzibler Fernkurven geklärt. Die bestehende Literatur kennt bisher keine solche Flächen mit irreduzibler Fernkurve. Ausgehend von der Drallbedingung und den Braunerschen notwendigen Bedingungen für konstanten Drall gelingt es, zwei Scharen konstant gedrallter Strahlflächen 4. Grades mit irreduzibler Fernquartik anzugeben, wobei jede Scharfläche bis auf Ähnlichkeiten bestimmt ist. Die Flächen der ersten Schar berühren den absoluten Kegelschnitt in vier verschiedenen, paarweise konjugiert komplexen Punkten, während er von den Flächen der zweiten Schar in zwei konjugiert imaginären Punkten hyperoskuliert wird. Beide Flächenscharen bestehen aus Strahlflächen III. Sturmscher Art und enthalten je eine Fläche XI. Art. Die Fernquartiken aller Scharflächen besitzen eine gewöhnliche Spitze sowie zwei Doppelpunkte und sind projektiv symmetrisch zur Spitzentangente. Alle Scharflächen haben eine Symmetrieachse und gestatten eine einfache Erzeugung mit Hilfe zweier projektiv aufeinander bezogenen Leitkegelschnitte.

VOLK, O.: Zum 2- und 3-Körperproblem

I. Das 2-Körperproblem:

1. Darstellung der relativen Bewegung durch eine vektorielle Differentialgleichung;
2. Regularisierung in der Zeit und Umformung mit dem Flächen- und Energieintegral;
3. Einführung von komplexen Koordinaten führt unmittelbar auf die Levi-Civita-Transformation. Man erhält die singularitätenfreie Darstellung.
4. Ausdehnung auf den Raum.

II. Die angegebenen Regularisierungen lassen sich auf das eingeschränk-

te nichtebene 3-Körperproblem ausdehnen (E. Stiefel, Crelle J. 218, 1965; Waldvogel, Diss. ETH Zürich; Bericht für die NASA 1967).

III. Die exakten Lagrangeschen Dreieckslösungen im Dreikörperproblem. Die Forderung, daß die drei Körper sich in ähnlichen Konfigurationen bewegen, ist äquivalent derjenigen, daß sich jeder Körper um den anderen nach den Regeln des 2-Körperproblems bewegt. In diesem Fall erhält man aus den angegebenen Differentialgleichungen für die Bahnen kongruente Kegelschnitte.

IV. Vorzeigen der auf der TAU in Prag (August 1967) herausgegebenen Karte für die Rückseite des Mondes, nach den photographischen Ergebnissen von Luna Orbiter I, II, III, IV (USA) gezeichnet.

VOGEL, W.O.: <u>Einbettung Riemannscher Räume in einen Riemannschen Raum</u>

In Ergänzung eines früheren allgemeinen Einbettungssatzes werden die beiden Sätze bewiesen:

SATZ 1: V_n sei ein Riemannscher Raum konstanter Krümmung k mit dem regulären Maßtensor $g_{ik}(x^l)$. V^r_m sei ein Riemannscher Raum, dessen Maßtensor auf die Form

$$(h_{ab}(u^c)) = \begin{pmatrix} h_{a'b'}(u^{c'}) & o \\ o & o \end{pmatrix}, \quad a', b', c' = 1,,, m-r \quad (m > r \geq o)$$

bzw. $\begin{pmatrix} o & o \\ o & o \end{pmatrix}$ gebracht werden kann. Die $h_{a'b'}(u^{c'})$ seien positiv definit und reelle analytische Funktionen in $u^{c'}$. Ist dann $n \geq \binom{m-r+1}{2} + 2r$, so ist V^r_m stets in V_n lokal isometrisch einbettbar.

SATZ 2: Voraussetzungen wie bei Satz 1. Außerdem mögen der Raum V_n und der zu dem regulären Maßtensor $h_{a'b'}(u^{c'})$ gehörige Raum V_{m-r} die gleiche konstante Krümmung k haben. Ist dann $n \geq m+r$, so ist V^r_m stets in V_n lokal isometrisch einbettbar.

BIERI, H.: Zwei lineare Ungleichungen in der Theorie der konvexen Rotationskörper und ihre Konsequenzen

Hadwiger hat 2 für konvexe Rotationskörper im R_n gültige Ungleichungen hergeleitet, welche alle Quermaßintegrale enthalten. Das Gleichheitszeichen gilt in der ersten für den Kappenkörper, in der zweiten für den Kegelstumpf. Diese Extremalkörper induzieren ein Maximum der ersten bzw. ein Minimum der zweiten Linearform und kommen im R_3 mit größter Wahrscheinlichkeit für ein Extremum von V bei gegebenem M und F in Frage.

EWALD, G.: Über Gale-Diegramme in der Theorie konvexer Polyeder

Neuerdings ist die Theorie konvexer Polyeder durch eine Anzahl von Arbeiten von Gale, Grünbaum, Klee, Shephard u.a. neu belebt worden. Man strebt Klassifizierungen kombinatorisch äquivalenter Typen an. Ein wertvolles Hilfsmittel ist dabei ein linearer Prozeß, der einem konvexen Polyeder bzw. irgendeiner Menge von endlich vielen Punkten im E^d eine Menge von ebensovielen Punkten im E^{n-d-1} zuordnet (n die Zahl der Punkte). Es werden Eigenschaften von derartigen "Gale-Diagrammen" solcher Punktmengen angegeben, die eine involutorische Bewegung auf sich zulassen. Damit ist eine Vorbereitung für die Klassifizierung kombinatorischer Typen von symmetrischen Polyedern mit "wenig" Ecken gewonnen.

KARZEL, H.: Zur Struktur zweiseitiger Inzidenzgruppen

Eine Menge $G(\cdot, \gamma)$, die mit einer Gruppenstruktur "$\cdot$" und einer geometrischen Struktur "γ" versehen ist, heißt zweiseitige Inzidenzgruppe, wenn für jedes $a \in G$ die Abbildungen a_l: $x \to ax$ und a_r: $x \to xa$ Automorphismen von $G(\gamma)$ sind. In unserem Fall sei $G(\gamma)$ ein geschlitzter Raum, d.h. ein projektiver Raum Π, aus dem ein projektiver Teilraum M entfernt ist: $G(\gamma) = \Pi \setminus M$.

Die Struktursätze von H. Wähling und mir über kommutative bzw. zweiseitige projektive Inzidenzgruppen lassen sich auf geschlitzte Inzidenzgruppen ausdehnen, wie Fräulein I. Pieper gerade gezeigt hat; es gilt:

Es sei $G(\cdot, \gamma)$ eine zweiseitige desarguessche geschlitzte Inzidenzgruppe, so daß $G(\gamma)$ nicht affin ist. Dann gilt:

a) Es gibt eine lokale Algebra $(L, K, \mathfrak{m})$ mit $G(\cdot, \gamma) = \mathfrak{C}/K^*$, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal, $\mathfrak{C} = L \setminus \mathfrak{m}$ und $K = \{x \in K;\ x \neq 0\}$ ist.

b) Ist $G(\cdot, \gamma)$ kommutativ, so ist $(L, K, \mathfrak{m})$ eine kommutative lokale Algebra.

VOSS, K.: <u>Geschlossene Raumkurven</u>

Außer den Kreisen gibt es noch viele andere geschlossene Raumkurven mit konstanter Krümmung k im euklidischen Raum E^3. Es wird gezeigt, daß es auch derartige Kurven mit überall positiver Windung gibt. Es werden mehrere Beispiele geschlossener Kurven mit konstantem k konstruiert, bei denen der Verlauf der Kurve im Raum genau angegeben werden kann. Das Verfahren besteht darin, daß man in einer Ebene E^2 eine periodische Kurve C vorgibt und E^2 so zu einem Zylinder verbiegt, daß C in eine Kurve mit konstantem k übergeht. Auf Grund von Symmetrieeigenschaften der Zylinderkrümmung läßt sich durch passende Wahl der Konstanten erreichen, daß sich die Zylinderleitkurve schließt.

HOSCHEK, J.: <u>Eine Verallgemeinerung der Böschungsflächen</u>

Ausgehend von der Erweiterung der Kurventheorie des dreidimensionalen euklidischen Raumes von Bilinski werden im Rahmen einer Erweiterung der natürlichen Geometrie der Regelflächen verallgemeinerte i-te Böschungsflächen untersucht, die dadurch gekennzeichnet sind, daß die i-ten Erzeugenden der Regelfläche mit einer gewissen Bezugs-

ebene einen konstanten Winkel einschließen. Neben allgemeinen Eigenschaften dieser Flächenklasse wird eine integralfreie Darstellung abgeleitet. Es zeigt sich, daß der Richtkegel einer i-ten Böschungsfläche Evolventenkegel des Richtkegels einer i-1-ten Böschungsfläche ist. Unter den 2-ten Böschungsflächen befinden sich auch die Flächen mit konischer Zentraltorse, die bereits von Krames und Brauner ausgiebig diskutiert wurden.

NIMMO-SMITH, M.I.: The total absolute curvature of a curve which lies on a sphere

Let $f: S^1 \to E^3$ be an immersion and let s signify the length parameter. We define

$$\tau(f) = \frac{1}{\pi} \oint |f''(s)|\, ds.$$

Fenchen proved that $\tau(f) \geq 2$ always. Milnor extended the result to show that $\tau(f) \leq 4$ implies that the curve is unknotted. For a general immersion $f: V^n \to E^{n+N}$ (V^n compact) we can again define $\tau(f)$, the total absolute curvature of the immersion. Ferus (Bonn) has a result that if Σ^n is a differentiable manifold which is topologically a sphere than with $f: \Sigma^n \to E^{n+2}$ $(n > 4)$ an imbedding and $\tau(f) < 4 \Longrightarrow$ that Σ^n is isotopic to the standard sphere S^n. Brieskorn has displayed simple examples of exotic structures on spheres. The disadvantage is that such a sphere Σ^n is imbedded in $S^{n+2} \subset E^{n+3}$. We would like of course extend the result of Ferus to $\tau(f) = 4$. If we call π_p the stereographic projection from $p \in S^{n+2}$

$$\langle \pi_p: E^{n+3} \setminus \{x \,|\, (n-p)\,p = 0\} \to E_p^{n+2} = \{x \,|\, xp = 0\} \rangle \quad \text{then}$$

$$\pi_p \circ f: \Sigma^n \to E_p^{n+2} \quad \text{is an immersion.}$$

We can calculate $\tau(f)$. We would like to prove that

$$\frac{1}{V(S^{n+2})} \cdot \int_{S^{n+2}} \tau(\pi_p \circ f)\, dS^{n+2} = \tau(f).$$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

In the case $n = 1$ we give an instructive geometrical proof by Banchoff. It is suggested that the method of proof extends to all dimensions and codimensions.

FREUDENTHAL, H.: Titsgeometrien

Definition der Titsschen Inzidenzgeometrien auf Graphen. Durchrechnung von Beispielen von Inzidenzketten. Verallgemeinerte Polygone. Methode der Weylklammern im Falle von Lie-Gruppen-Graphen.

BURAU, W.: Einige Betrachtungsn u. Beispiele zur Singularitätentheorie von Hyperflächen vom Standpunkt der mehrdimensionalen Geometrie aus.

Bei der bekannten Zuordnung zwischen Hyperflächen h-ten Grades f^h_{n-1} des X_n und Hyperebenen des durch eine Veronesesche V^h_n aufgespannten Raumes $\langle V^h_n \rangle$ entsprechen solche f^h_{n-1}, die in einem Punkt $P_o \in X_n$ singulär von der Vielfachheit $\geq s$ sind, derartigen Hyperebenen $H \subset \langle V^h_n \rangle$, welche den Schmiegraum s-1-ter Stufe $T^{(s-1)}(P'_o)$ im Bildpunkt P'_o von P_o auf der V^h_n enthalten. Dieser Gedanke ist bisher noch nicht weiter durchgeführt worden. Der Vortrag bringt erste Beispiele dafür bei $h = 3$, $n = 2, 3$. Durch Projektion der V^3_2 aus $T^{(1)}_2(P'_o)$ entsteht eine rationale Normregelfläche $F^{2,3}_2$ des P_6, deren P_5-Schnitte wiederum den in $P_o \in X_2$ singulären Kubiken f^3_1 bijektiv zugeordnet sind. Doppelpunkt und Spitze lassen sich daran leicht erklären- Es wird ferner analog gezeigt: Alle kubischen Flächen f^3_2 des X_3 mit fester singulärer Geraden entsprechen birational den hyperebenen Schnitten eines Normregelgebildes $F^{2,2,3}_3$ des P_9. Die allgemeine und die Cayleysche Regelfläche sind dabei solchen P_8-Schnitten zugeordnet, die rationale Normregelflächen $F^{3,4}_2 \subset P_8$ sind. Durch ähnliche Betrachtungen

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

ergibt sich vieles andere, z.B. die Tatsache, daß eine f_2^3 mit endlich vielen singulären Punkten, wovon einer uniplanar ist, nur diesen einen singulären Punkt besitzen darf.

HAVEL, V.: Über Pohlkesche n-Beine

Den Ausgangspunkt bilden folgende Sätze (die gleichzeitig die Resultate von Hadwiger, Stiefel und Naumann verallgemeinern):

SATZ 1a: Es sei $A = (a_1, \ldots, a_n)$ ein Vektor-n-Bein in E^n, wobei dim $A = m$, $n \geq 2m-1$. Dann gibt es ein gleichschenkliges normales n-Bein, das durch eine Parallelprojektion in E^n ins A übergeht; diese Projektion ist normal genau im Fall, daß alle nichtverschwindenden Gramschen Eigenwerte von A zusammenfallen.

SATZ 1b: Es sei $A = (a_1, \ldots, a_n)$ ein Vektor-n-Bein in E^n, wobei dim $A = m$, $n < 2m-1$. Dann ergibt sich A als Bild eines gleichschenkligen normalen n-Beines in einer Parallelprojektion in E^n genau dann, wenn die Gramschen Eigenwerte $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ von A die Relation

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{n-m} \geq \lambda_{n-m+1} = \ldots = \lambda_m > \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 0$$

befriedigen; diese Projektion ist normal genau im Fall

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_m > \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Hieraus leitet man dann eine Reihe von algebraischen, aber auch konstruktiven Konsequenzen ab.

TÖLKE, J.: Affine Kinematik der Ebene

Es wird ebene affine Kinematik im Sinne von W. Blaschke und H.R. Müller getrieben. Der Aufbau der Theorie erfolgt dabei in der Weise, daß die affinen Ergebnisse bei Spezialisierung auf die euklidische Kinematik in die dort bekannten übergehen.

EMDE, H.: <u>Gebietseinteilungen in Grundgebilden der projektiven Geometrie</u>

M^s sei die Elementemenge eines Grundgebildes s-ter Stufe,
T eine endliche Menge von t untereinander gleichartigen Elementen,
N_t die Teilmenge aller derjenigen Elemente aus M^s, die mit mindestens einem der Elemente aus T inzidieren.

Die Art der T-Elemente läßt sich so wählen, daß in M^s Elemente mit getrennter Lage bezüglich der N_t-Elemente existieren. Dann heißen die Elemente von T: "Trennelemente", ihre Anzahl t: "Trennzahl", die Elementemenge N_t: "Grenzgebilde" und die Komplementärmenge $M^s \setminus N_t = G_t^s$: "Gebietseinteilung im Grundgebilde s-ter Stufe". Die Anzahl $\left\lceil {s \atop t} \right.$ getrennter Elementegebiete hängt bei allgemeiner Lage der Trennelemente nur von deren Trennzahl t und von der Stufenzahl s des Grundgebildes ab. Für alle Gebietseinteilungen in Grundgebilden des dreidimensionalen projektiven Raumes, ebenso in Punktegebilden und dazu dualen Gebilden höherdimensionaler Räume gilt

(1) Rekursionsformel $\left\lceil {s \atop t} \right. = \left\lceil {s \atop t-1} \right. + \left\lceil {s-1 \atop t-1} \right.$ für $s, t \geq 1$ $\begin{cases} \text{mit } \left\lceil {m \atop o} \right. = 0 \text{ für } m=0,1,\ldots \\ \text{und } \left\lceil {o \atop n} \right. = 1 \text{ '' } n=1,2,\ldots \end{cases}$

(2) Binomialformel $\left\lceil {s \atop t} \right. = \sum\limits_{o}^{s}{}_{k} \binom{t-1}{k}$

mit Spezialfällen $\left\lceil {s \atop t} \right. = \begin{cases} 2^{t-1} & \text{für } t \leq s+1 \\ 4^s & \text{für } t = 2(s+1) \end{cases}$

Beispiele:

Grundgebilde (s)	t Trennelemente	Anzahl der Elementegebiete
Punktefeld (2)	4 Ebenen	$\left\lceil {2 \atop 4} \right. = 7$ Punktegebiete
Ebenenraum (3)	5 Punkte	$\left\lceil {3 \atop 5} \right. = 15$ Ebenengebiete
Geradenraum (4)	6 Geraden	$\left\lceil {4 \atop 6} \right. = 31$ Geradengebiete

Der von H. Knothe angekündigte Vortrag "Riemannsche Geometrie und Satelliten" wurde wegen Erkrankung von Herrn Knothe nicht gehalten. Der eingeschickte Vortragsauszug wird im folgenden abgedruckt.

KNOTHE, H.: Riemannsche Geometrie und Satelliten

In einem rotationssymmetrischen 3-dimensionalen Riemannschen Raum $g_{ik}(u^1, u^2)$ - u^3 kennzeichne den Rotationsparameter - sei ein Gravitationspotential $\varphi(u^1, u^2)$ gegeben. Für alle Massenpunkte mit gleicher Gesamtenergie und gleicher u^3-Komponente des Drehimpulses existiert eine physikalisch leicht deutbare Funktion $\psi(u^1, u^2)$, die die Bewegungsgleichungen auf eine einfache gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung reduziert. Für die geodätische Krümmung K der Bahn $u^1(t)$, $u^2(t)$ im Raum S_2 mit der Metrik g_{ik}, $i, k = 1, 2$ gilt beispielsweise

$$K = \frac{\partial}{\partial n} (\log \psi)$$

wo $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung nach der Normalen der Bahn im S_2 bedeutet. Führt man im euklidischen Fall kartesische Koordinaten $u^1 = r \cos \varphi$, $u^2 = r \sin \varphi$ ein, so ist $\psi(u^1, u^2)\, [\delta_{u^1}, \delta_{u^2}, \delta_{\varphi}]$ eine invariante alternierende Differentialform.

U. Simon (Berlin)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft