MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 22/1967

Zur Didaktik des mathematischen Gymnasialunterrichts

22.10. bis 26.10.1967

Die diesjährige Didaktik-Tagung, die wieder von den Herren M.BARNER und K.FLADT geleitet wurde, stand unter dem Hauptthema "Veranschaulichung im Mathematikunterricht". Der Mathematikunterricht krankt heute in vielen Disziplinen an einem Mangel der Anschaulichkeit. Gerade durch das Eindringen struktureller Aspekte, die noch nicht in genügender Weise für die Schule didaktisch aufbereitet sind, ist die Veranschaulichung mathematischer Sachverhalte besonders aktuell geworden. Andererseits erfordert die Tatsache, daß die moderne Technik Hilfsmittel hierzu bereitstellt, eine Auseinandersetzung mit diesem Thema. Da jedoch das Thema der Tagung nicht allen Teilnehmern rechtzeitig bekanntgeworden war, waren auch einige Beiträge anderen wichtigen didaktischen Problemen des mathematischen Gymnasialunterrichts gewidmet.

Teilnehmer

B.Andelfinger, Ulm
K.Arzt, Tübingen
G.Augustin, Freiburg
M.Barner, Freiburg
P.Beisswanger, Tübingen
O.Botsch, Heidelberg
H.Coers, Dortmund
F.Denk, Fürth
W.Deylitz, Berlin
van Dormolen, Oegstgeest/Holl.
A.Engel, Stuttgart
K.Fladt, Freiburg
W.Fraunholz, Koblenz
E.Freudenthal, Reinbek
H.Gall, Düsseldorf
M.Häussler, Stuttgart
G.Holland, Göttingen
K.H.Hürten, Köln
R.Huth, Luxemburg
D.Jost, Tuttlingen
L.Kieffer, Luxemburg
H.Knabe, Berlin
A.Koch, Berlin
W.Körperth, Wien
F.Kösler, Rheine
H.Kunle, Karlsruhe

O.Kuropatwa, Schweinfurt
E.Letzner, Berlin
R.Leupold, Oberlahnstein
H.Liermann, Berlin
H.Lindner, Hamburg
F.Nestle, München
F.Ostermann, Köln
H.Prade, Freiburg
K.Radbruch, Tübingen
F.Raith, Freiburg
B.Raussen, Trier
K.Rudolph, Karlsruhe
Th.Rombach, Freiburg
P.Ruopp, Schwäbisch Gmünd
J.Schmidt, Berlin
H.Schubart, Karlsruhe
K.Seebach, München
K.Sielaff, Hamburg
H.G.Steiner, Karlsruhe
H.Stever, Karlsruhe
E.J.Thiele, Hannover
W.Thöni, Ebmatingen/Schweiz
M.Toussaint, Karlsruhe
H.-J.Vollrath, Pfungstadt
A.Weiss, Zürich

<u>Vortragsauszüge</u> (in zeitlicher Reihenfolge):

OSTERMANN F.: Eine Beweisstudie zum Satz des Pythagoras

Ausgehend von der Beweisidee in der Choquet'schen Note (Der Mathematikunterricht, 13.Jahrgang Heft 1, 1967, Seite 32 Zeile 15-23) wird der metrische Hintergrund dieses klassischen Satzes aufgehellt, insbesondere also jener Sachverhalt, der zur affinen Ebene hinzugenommen werden muß. Das Resultat der Überlegungen ist ein Axiomensystem der euklidischen Ebene, das nur zum Teil dem von Choquet entspricht. Die Sachverhalte der Flächenverwandlung werden bewußt beiseite gelassen, auch wird auf die Vektorraumdarstellung der affinen Ebene verzichtet.

LEUPOLD R.: Aussagen- und prädikatenlogische Schreibweisen, ja oder nein?
- Ihr didaktischer Ertrag -

Entsprechungen zwischen Mengenverknüpfungen und Beziehungen und solchen der zugehörigen Aussageformen. Besonders: " $\Longrightarrow$ " und "$\Longleftrightarrow$" als Pendants zu " $\subset$ " und "=". Sätze, umkehrbare Sätze. Streiflicht auf die Elemente der Schaltalgebra. Zur Verwendung der Quantoren $\bigwedge_{x\in M}$ und $\bigvee_{x\in M}$; Negation von $\bigwedge_{x\in M} E(x)$ und $\bigvee_{x\in M} E(x)$. Logische Gerüste der Schlußweisen modo ponente, modo tollente, der Induktion ("n" $\longrightarrow$ "n+1"); Beispiele.

BOTSCH O.: Ein einfaches Boole-Modell für Sexta

Die von den Sextanern bei der Besprechung des Dual-Systems angefertigten Kärtchen (in verschiedenen Farben)

1	3	5	7
9	11	13	15

2	3	6	7
10	11	14	15

4	5	6	7
12	13	14	15

8	9	10	11
12	13	14	15

die dem bekannten Spiel zum Erraten einer Zahl dienen, werden für die erste Bekanntschaft mit einem Booleschen Verband nutzbar gemacht:

1. Schüler A benötigt zur Darstellung einer Zahl a ($0 \leq a \leq 15$) einige seiner vier Kärtchen. Aus den verschiedenen Kärtchen bildet er die zugehörige "Gegenzahl $\bar{a}$" (wobei $a + \bar{a} = 15$).

2.a) A und B legen mit ihren Kärtchen zwei Zahlen a und b aus. Die bei beiden gemeinsam auftretenden Kärtchen bilden die "Unterzahl" $a \cap b$.

2.b) Ebenso bilden a und B die "Oberzahl" $a \cup b$ aus allen ausgelegten Kärtchen (wobei gleichartige Kärtchen nur einmal verwendet werden dürfen). Es

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

werden Auszüge von Tabellen bei der Verknüpfung gefertigt, vorteilhaft für die zweite Verknüpfung mit den Gegenzahlen, etwa:

	9	10	11	12
6	0	2	2	4
7	1	2	3	4
8	8	8	8	8
9	9	8	9	8

	6	5	4	3
9	15	13	13	11
8	14	13	12	11
7	7	7	7	7
6	6	7	6	7

Vergleich beider Tabellen bestätigt de Morgan "Die Unterzahl eines Paares a,b und die Oberzahl des Paares der Gegenzahlen a,b sind Gegenzahlen".

3. Kommutativ-, Assoziativ- und Distributiv-Gesetze werden in entsprechender Weise erkannt. Das Zahlenmaterial ist ausreichend, die grundlegenden"Eigenschaften" eines Booleschen Verbandes kennenzulernen.

BEISSWANGER P.: Berechnung von π ohne Benutzung der arctan-Reihe und ohne die Operation des Wurzelziehens

Die Winkel α_i seien definiert durch $\tan\alpha_0 = 1$, $\tan\alpha_1 = \frac{17}{41}$, $\tan\alpha_2 = \frac{1}{5}$, $\tan\alpha_3 = \frac{1}{10}$, $\tan\alpha_4 = \frac{1}{20}$, usw. Mittels des Additionstheorems für den Tangens berechnet man:

$$\tan(2\alpha_1 - \alpha_0) = \frac{1}{1393} \qquad \tan(2\alpha_4 - \alpha_3) = \frac{1}{4030}$$

$$\tan(2\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1}{577} \qquad \tan(2\alpha_5 - \alpha_4) = \frac{1}{32060}$$

$$\tan(2\alpha_3 - \alpha_2) = \frac{1}{515} \qquad \text{usw.}$$

In diesen Gleichungen kann man - wenn man sich auf eine bestimmte Ganuigkeit beschränkt - $\tan\sigma$ jeweils durch σ ersetzen (eine Abschätzung des Fehlers wurde gegeben). Aus der entstehenden Gleichungskeitte ist $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ berechenbar auf 7 Stellen nach dem Komma.

SIELAFF K.: Elementare Klassifizierung der ganz-rationalen Funktionen ersten, zweiten und dritten Grades mithilfe geeigenter Abbildungen

Ziel: Modernisierung am Stoff, der ohnehin behandelt werden muß, in der Absicht zu zeigen, daß moderne Begriffsbildungen tragfähig sind. Die Graphen der ganzrationalen Funktionen 1.,2. u. 3.Grades werden durch Äquivalenzrelationen in Klassen geteilt, die einen unmittelbaren Überblick gestatten. Die Äquivalenzrelationen gewinnt man dadurch, daß die Gruppen der Parallelverschiebungen der Schubdehnungen (erzeugt von eulerschen Affinitäten und Parallelverschiebungen) und der Schubscherungen (bzgl. der y-Achse) auf der jeweiligen Menge operieren. Die Beweise sind elementar.

FREUDENTHAL E.: Die Rolle der Parallelogrammidentität für den Begriff "Länge eines Vektors"

Ein Vektorraum V über dem Skalarenkörper K wird durch Vorgabe einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform zu je einem metrischen Vektorraum erhoben. Diese Bilinearform heißt im Falle $K = \mathbb{R}$ (Körper der reellen Zahlen) auch Skalarprodukt und der Vektorraum dann Euklidischer Vektorraum. Durch das Skalarprodukt entsteht im Falle der Spezialisierung auf zwei gleiche Vektoren vermöge $\ell(\mathfrak{x}) = +\sqrt{\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}}$ im Vektorraum ein Längenbegriff. Für diesen Längenbegriff existieren 5 Eigenschaften, welche aus dem Skalarprodukt herausgezogen sind. Die 5.Eigenschaft ist die sog. Parallelogrammeigenschaft

$$\ell^2(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) + \ell^2(\mathfrak{x}-\mathfrak{y}) = 2\,(\ell^2(\mathfrak{x}) + \ell^2(\mathfrak{y}))$$

Benutzt man ohne auf die Herleitung zurückzugreifen lediglich die ersten 4 Eigenschaften, so erhält man einen Längenbegriff, der nicht immer zum Skalarprodukt fortgesetzt werden kann. Insofern ist die Definitionsgleichung

$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = |\mathfrak{x}| \cdot |\mathfrak{y}| \cos(\sphericalangle(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))$ für das Skalarprodukt nicht ohne weiteres geeignet. Es wurde ein Beispiel für eine Länge angegeben, welche die Eigenschaft 5 nicht erfüllt. In dem Buch "Lineare Algebra" von Greub wird gezeigt, daß bei Längen, welche alle 5 Eigenschaften besitzen, die Umkehrung gilt: Längen für Vektoren, welche die Eigenschaften 1 bis 5 erfüllen, sind aus einem Skalarprodukt abgeleitet.

STEINER H.G.: Endliche Verknüpfungsgebilde und Legespiele

Einfache Verknüpfungsgebilde $(M, *)$ (Gruppoide) und zweifache Verknüpfungsgebilde $(M, *_1, *_2)$ bilden die Grundlage für eine abstrahierende Einführung in Begriffe wie Gruppe, Ring, Körper, Verband etc. Vor der Einführung dieser Begriffe liegen konkrete Beschäftigungen mit den Gebilden, zu denen u.a. folgende Aktivitäten gehören:

a) Rechnen in den Gebilden, Rechenbefehle und Klammerschreibweise

b) Erfüllungsmenge von Gleichungen in Gebilden

c) das n-te Erzeugnis $\mathcal{E}_n(A)$ und das volle Erzeugnis $\mathcal{E}(A)$ von Teilmengen A von M in $(M, *)$, Abgeschlossenheit von A in $(M, *)$.

d) Komplexrechnen.

Eine besondere Bedeutung in diesem Zusammenhang kommt den Gebilden mit endlichem Träger M zu. Bei nicht zu großer card M können solche Gebilde mittels Tabellen etc. erschöpfend in einfacher Weise studiert werden. Eine erste Stufe zur Erfassung der Eigenschaften von Verknüpfungsgebilden kann durch die Einführung von Spielen gegeben werden, die so beschaffen sind, daß die Spielstrategie in natürlicher Weise von der Struktur des Gebildes abhängt. Es wird ein Legespiel vorgeführt, das im Prinzip auf jedes endliche (nicht zu große) Verknüpfungsgebilde anwendbar ist. Die Elemente von M werden auf

einem Spielfeld repräsentiert, wobei Ordnungsstrukturen, die auf M in natürlicher Weise vorliegen, bei der Darstellung berücksichtigt werden. Als Gebilde und entsprechende Felder wurden vorgeführt: $(Z_n, +_n)$, $(Z_n^{(2)}, \oplus_n)$, $(Z_2^{(n)}, \oplus_2)$, $(T_n, \sqcap)$, $(T_n, \sqcup)$ (wobei $T_n = \{x \in N \mid x \mid n\}$ und $\sqcap, \sqcup$ g.g.T. und k.g.V. ; $\mathcal{P}(\{a,b,c,d\})$ mit $\cap, \cup, \setminus$ und Δ als Verknüpfungen. Ferner die symmetrische Division in T_n, definiert gemäß

$$a \# b =_{df} \frac{a \sqcup b}{a \sqcap b}$$

(Bemerkung: ist n reines Primzahlprodukt, so ist $(T_n, \#)$ eine Gruppe). Ein weiteres Spielfeld liefert das System der Symmetrien eines Quadrates. Die Entdeckung der Isomorphie wird vorbereitet durch drei Gruppen von Spielen. Es sind isomorph:

$$\left(T_{210}, \begin{matrix}\sqcap \\ \sqcup \\ \#\end{matrix}\right) \text{ zu } \left(\mathcal{P}(\{a,b,c,d\}), \begin{matrix}\cap \\ \cup \\ \Delta\end{matrix}\right) \text{ zu } \left(Z_2^{(4)}, \begin{matrix}\textcircled{\downarrow} \\ \textcircled{\uparrow} \\ \oplus_2\end{matrix}\right)$$

wobei $\downarrow, \uparrow$ die Verknüpfungen minimum, maximum und $\textcircled{\downarrow}$, $\textcircled{\uparrow}$ die entsprechenden Verknüpfungen für Quadrupel aus $Z_2^{(4)}$, koordinatenweise angewendet, sind.

SCHUBART H.: Zahlentheoretische Probleme im gymnasialen Mathematikunterricht

Es wurden verschiedene zahlentheoretische Fragen behandelt, die fast ausschließlich in das Gebiet der analytischen Zahlentheorie gehören und sämtlich mit den Mitteln der Schulmathematik gelöst werden können. Ausgehend von "Mathematischen Problemen" mit zahlentheoretischem Hintergrund (Grundlage: eindeutige Division mit Rest, $R_m\left(\sum_{l=1}^{n} g_l\right) = R_m\left(\sum_{l=1}^{n} R_m(g_l)\right)$ wurde nach dem dem Vorgang von Finsler und Erdös u.a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ divergent, $(\pi(2n) - \pi(n) \geq 1) \Leftrightarrow p_{n+1} < 2p_n$ bewiesen. Außerdem wurden Fragen (Dichte, Konvergenz der Summe der reziproken Werte) besprochen, die sich aus der Elimination einer bestimmten Ziffer ergeben.

NESTLE: Audio-visuelle Hilfen im Mathematikunterricht

1. Die Rolle von Film-Arbeitsstreifen (mit Beispielen)
2. Standardisierte Kopfrechenübungen auf Tonband (mit Beispiel und Angaben zur Standardisierung)
3. Tonbildschau.

SEEBACH K.: Kennzeichnung der orthogonalen Gruppe im zweidimensionalen Vektorraum

Die orthogonale Gruppe im 2-dimensionalen euklidischen Vektorraum läßt sich durch die Spiegelungen an Geraden als erzeugenden Elementen aufbauen. Es gilt der Satz von den 3 Spiegelungen. Geht man vom 2-dimensionalen Vektorraum ohne euklidische Mußbestimmung aus, so lassen sich die Schrägspiegelungen

als Automorphismen mit den Eigenarten 1 und -1 charakterisieren. Für diese Schrägspiegelungen gilt nicht der Satz von den 3 Spiegelungen. Wählt man aus der Menge der Schrägspiegelungen eine Teilmenge aus, für die der Satz von den 3 Spiegelungen gilt und die in gewisser Hinsicht maximal ist, so erzeugt diese Menge eine Gruppe, die mit der orthogonalen Gruppe isomorph ist.

STEVER H.: Probleme der Programmierung mathematischen Unterrichts

Untersucht wird die Möglichkeit des Einsatzes universeller Datenverarbeitungsanlagen für die Herstellung von Lehrprogrammen. Dazu wird ein Einblick in die Theorie formaler Didaktiken (nach Frank) gegeben und auf die Realisierung Alzudi I genauer eingegangen. Zwei Alzudi-Programme werden ausschnittweise vorgeführt, ein Englisch- und ein Mathematikprogramm, mit dem jeweils in die Datenverarbeitungsanlage einzulesenden Basaltext und mit den Lehrquanten- und Verknüpferformen. Außerdem wird auf die Schwierigkeit bei der Programmierung mathematischer Sachverhalte eingegangen, die aufgrund der ungenauen Bestimmung des Informationsgehalts mathematischer Texte auftritt.

LINDNER H.: Eine vergleichende Studie über die Ergebnisse des Mathematikunterrichts in 12 Ländern

Im Rahmen der 1.Phase des "International Project for the Evaluation of Educational Achivement (IEA)" wurden 1964 in 12 Ländern die Leistungen von 13jährigen Schülern und von Abiturienten im Fach Mathematik ermittelt. Darüber erschienen im Sommer 1967 in Zeitschriften und Tageszeitungen Berichte, die im allgemeinen behaupteten, daß die Gymnasien in der BRD in dieser Vergleichsuntersuchung kläglich abgeschnitten hätten. Dieser Schluß ist jedoch nicht zulässig; er bedeutet eine falsche Interpretation der statistischen Untersuchungen:

a) Bei der Zusammenstellung des Aufgabenmaterials für die verschiedenen Tests hat die BRD nicht mitgewirkt; es ist bei der Betrachtung der Tests offensichtlich, daß die Aufgaben in vielen Fällen nicht zum Lehrstoff unserer Schulen gehören.
b) Es waren 649 Gymnasiasten von mathematisch-naturwissenschaftlichen Oberprimen aus 37 Schulen beteiligt. Es handelte sich nur um Schulen aus Hessen und Schleswig-Holstein, die daher keine repräsentative Stichprobe für die gesamte Bundesrepublik darstellen.

Es wurde noch anhand mehrerer Beispiele nachgewiesen, daß eine große Zahl von Interpretationen offensichtlich nicht ohne weiteres haltbar sind. Die Problematik internationaler Leistungsvergleiche wurde geschildert. Insbesondere läßt sich auch nicht nachweisen, daß begabte Schüler in Gesamtschulen nicht behindert werden. Ferner waren z.B. die sog. Comprehensive Schools in England den Gymnasien eindeutig unterlegen.

KIEFFER L.: Vektorielle Beweise einiger Lehrsätze der Raumgeometrie (Senkrechtstehen) in Anlehnung an frnzösische Lehrbücher

Bis jetzt gab es in unserem Geometrieunterricht keine Fusion. In "grade 11 bzw. 12" behandeln die Schüler die wichtigsten Sätze der systematischen Raumgeometrie (// und $\perp$ Geraden und Ebenen), die im mathematischen Zug auch für die Darstellende Geometrie benötigt werden. Die langwierigen euklidischen Beweise mit Hilfe der Kongruenzsätze liegen den Schülern nicht. Das französische Lehrbuch von Bréard (Verlag l'Ecole) benutzt - vielleicht auf Anregung von G.Choquet - vektorielle Beweise mithilfe des Skalarproduktes, die bei Senkrechtstehen sofort den Beweis erbringen. Da in "grade 10" das Skalarprodukt behandett wird, ist diese algebraische Beweismethode bei uns angebracht. Die Geometrie kommt nicht zu kurz (saubere Figur; aus Zeitmangel wird oft auf den euklidischen Beweis verzichtet).

ANDELFINGER B.: Didaktische Bemerkungen zur modernen Gesamtplanung

1. Die historisierende Struktur der heutigen Lehrpläne wird analysiert. Die seitherigen Modernisierungen werden als Detailverbesserungen hier eingeordnet. Einige Vor- und Nachteile dieses Modernisierungsverfahrens
2. Die Bourbaki-Struktur und ihre didaktische Auswertung wird 1. gegenübergestellt und bis zu einem lernpsychologischen Diagramm fortentwickelt. Es wird an Beispielen gezeigt, daß sich hieraus zeitlich-linear angeordnete Lehrpläne gewinnen lassen, die sich von 1. unterscheiden. Einige Vor- und Nachteile dieses Verfahrens werden betrachtet.
3. Als Beispiel einer Unterrichtsgestaltung im Sinne von 2. wird das Prinzip des mathematischen Labors herausgegriffen und in einem Fall kurz dargestellt.

JOST D.: Einführung der elementaren Funktionen in einer Arbeitsgemeinschaft der Oberprima

Ausgehend von zwei naheliegenden Parameterdarstellungen für den "punktierten Kreis" mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$, $(x,y) \neq (-1,0)$
$\left\{x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2},\ y = \frac{2z}{1 + z^2},\ -\infty < z < \infty\right\}$ und den "Hyperbelzweig" mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$, $x \geq 1$ $\left\{x = \frac{1 + z^2}{1 - z^2},\ y = \frac{2z}{1-z^2},\ -1 < z < 1\right\}$ die auch eine anschauliche Deutung erfahren sollen, drängt sich sowohl eine Definition der trigonometrischen als auch eine analoge der hyperbolischen Funktionen auf, die wiederum einen natürlich erscheinenden Weg zu Exponentialfunktionen, u.a. zu allgemeinen Potenzen, Logarithmen (Wurzeln) weisen: das anschaulich motivierte Vorgehen (in jeder Phase) gibt zugleich

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

wohl Impulse für eine zweckmäßige strenge Einführung der elementaren Funktionen; u.a. möchte der Vortrag ein auch für Schüler einfaches und doch wirksames Berechnungsverfahren für die Zahl π (analog für Logarithmen) demonstrieren, das bereits (entgegen dem sonst üblichen) Anwendung finden kann, ehe die Kenntnis der trigonometrischen Funktionen vorausgesetzt wird.

KNABE H.: Zur Begründung des Zusammenhangs zwischen Ableitung und Kurvenverlauf ohne Mittelwertsatz

Für den Referenten stellte sich das Problem, in einer Oberstufenabschlußklasse den Mathematikunterricht zu übernehmen, in der die Analysis nicht seinen Vorstellungen entsprechend unterrichtet worden war. Insbesondere ging es darum, eine möglichst wenig aufwendige Begründung der Theorie der Extremwertaufgaben zu entwickeln. Es genügt, folgenden Satz zu klären

Satz: f sei eine differenzierbare reelle Funktion und x_0 sei ein lokales Maximum bzw. Minimum von f. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Dieser Satz kann auf einen Satz über stetige Funktionen zurückgeführt werden, nämlich auf den Satz, daß jede stetige reelle Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall Maximum und Minimum annimmt. Es läßt sich weiterhin folgern, daß genau die konstanten Funktionen eine identisch verschwindende Ableitung besitzen.

LIERMANN H.: Über Abbildungen der Punktmenge $\xi^3 + \eta^3 = 1$ auf sich.

Der Graph der Relation $\xi^3 + \eta^3 = 1$ legt es nahe, drei involutorische Abbildungen zu betrachten, die "Punktspiegelungen" γ_i an den Wendepunkten W_i ($i = 1,2$) und die Spiegelung σ an der Symmetrieachse. Es zeigt sich, daß die durch γ_i und σ erzeugte Gruppe $\mathcal{R}$ isomorph zur symmetrischen Gruppe γ_3 ist. Die geometrischen Folgerungen daraus werden diskutiert. Weiter werden die durch die Kurventangente eindeutig bestimmte Abbildung τ und ihre Iterierten betrachtet. Es gilt die Beziehung $\tau \circ \omega = \omega \circ \tau$ $(\omega \in \mathcal{R})$. Auf die geometrische Konsequenz wird eingegangen. Die Abbildungen τ^n $(n \in \mathbb{N})$ ermöglichen die Bildungen von Äquivalenzrelationen: $P \,\pi\, Q \Leftrightarrow \tau^n P = \tau^n Q$

Durch $P \leq Q \Leftrightarrow \tau^n P = Q$ wird eine Halbordnung in den Klassen erklärt, die durch Hasse-Diagramme veranschaulicht wird. Stoff und Behandlung sind schulrelevant.

HOLLAND G.: Graphische Methoden in der Spieltheorie

Es werden zwei Methoden erläutert, die es gestatten, 2-Personen-Nullsummenspiele in einfachen Fällen mithilfe graphischer Methoden und mit elementaren

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Mitteln der linearen Algebra zu lösen und die grundlegenden Begriffe und Sätze der Spieltheorie zu veranschaulichen. Die erste Methode ist für solche Spiele geeignet, in denen wenigstens für einen der beiden Spieler die Anzahl der Aktionen 2 beträgt. Die Gültigkeit des Minimaxtheorems ist hier für alle auftretenden Fälle unmittelbar einsichtig. Die Lösungspsychologie der beiden Spieler, sowie der Wert des Spieles lassen sich der graphischen Darstellung entnehmen bzw. mit Mitteln der analytischen Geometrie brechnen. Die Methode führt unmittelbar zur Formulierung eines Problems der linearen Optimierung. Die zweite graphische Methode, welche für den Fall geeignet ist, in dem beide Spieler 3 Aktionen besitzen, setzt elementare Kenntnisse der darstellenden Geometrie voraus.

ENGEL A.: Spiele und Graphen für die Unterstufe

Es wurden einige einfache mathematische Zweipersonenspiele vorgestellt und gezeigt, wie man diese sinnvoll variieren kann. Ziel dieser Spiele ist es, zur Auflockerung des Unterrichts beizutragen und Ansatzpunkte für zahlentheoretische Begriffsbildungen zu liefern.

THIELE : Nicht-Standard-Modelle von $\mathbb{N}$

Die Peano-Axiome wurden in der bekannten Form mit den Grundbegriffen $\mathbb{N}$, 0_+ und der Nachfolgeabbildung " ' " angegeben. Bereits Peano hat bewiesen, daß sein Axiomensystem kategorisch ist. Dagegen wird hier eine Struktur konstruiert, die den Peano-Axiomen genügt und deren Trägermenge eine größere Mächtigkeit als $\aleph_0$ hat. Hierzu wird allerdings im naiven Sinn $\mathbb{N}$ und ω_0 vorausgesetzt.

KOCH A.: Didaktische Bemerkungen zum Schluß von n auf n+1

Bei der Einführung vom Schluß von n auf n+1 treten gekoppelt drei methodische Schwierigkeiten auf.

1. Die beim Beweisverfahren notwendige Implikation ist meist früher noch nicht behandelt worden.
2. Die Schlüssigkeit des Beweisverfahrens wird vom Schüler schwer eingesehen, da scheinbar die Behauptung vorausgesetzt wird.
3. Es handelt sich um das erste rein mathematische Beweisverfahren, das der Schüler während seiner Schulzeit kennenlernt.

Als Ausweg wird vorgeschlagen, die vollständige Induktion in folgender Form einzuführen:

$$\left[\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} m < n \Rightarrow E(m) \right) \Rightarrow E(n) \right] \Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} E(n)$$

Dieses Beweisverfahren kann unter Voraussetzung der Wohlordnung der Menge

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

der natürlichen Zahlen bewiesen werden. Die Wohlordnung der Menge der natürlichen Zahlen aber ist dem Schüler anschaulich klar.

HÜRTEN K.H.: Einige Möglichkeiten, das formale Verstehen zu entwickeln

a) Verschiebebeispiel: Ein Brettspiel für zwei Personen, bei dem der Begriff der Klassengleichheit von Pfeilen geübt wird.
b) Setop: Ein Kartenspiel für mehrere Personen, bei dem die Mengenoperationen geübt werden.
c) Isomorphe Abbildungen des Körpers der reellen Zahlen auf sich. f sei eine eineindeutige Abbildung der reellen Zahlen auf sich, die der Funktionalgleichung $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$ genügt. Nun wird eine Operation $\oplus$ erklärt: $a \oplus b = f^{-1}(f(a) + f(b))$. Die Untersuchung des Verknüpfungsgebildes $Re(\oplus; \cdot)$ gibt Analß, über die Bedeutung der natürlichen Zahlen als Eigennamen und als Funktionalnamen zu sprechen.

DENK F.: Anschauliche Gewinnung abstrakter Begriffe

1. Es ist pädagogisch verkehrt, zuerst eine abstrakte Definition zu geben und dann (als "Krücke" sozusagen) diese zu "veranschaulichen". Man muß umgekehrt vom Anschaulichen zum Abstrakten gehen.
2. Anschaulichkeit muß nicht unbedingt geometrisch sein, es gibt auch kombinatorische, physikalische, usw. Anschaulichkeit. Wesentlich ist: Greifbarkeit, Einprägsamkeit, Übersicht. Wichtig ist auch geordnetes zeitliches Nacheinander im Betrachten und um Tun ("tätige Anschaulichkeit").
3. Beispiele der Elementarmathematik: Gewinnung der Z a h l in der Geometrie (Verhältnisbegriff, Messen, usw. Trigonometrie).
4. Beispiele aus der modernen Mathematik: Abbildung, Funktion, Gruppen, Operationen, Strukturen, Topologie.
5. Was könnte uns der mathematische Film geben?

An den Abenden fanden zur Ergänzung Vorführungen von Filmen über amerikanischen Mathematikunterricht statt. Es handelte sich um Filme aus dem Madison-Projekt der Syracuse University, Syracuse N.J., mit Professor Robert Davis als Lehrer:

a) Notre Dame Second Lesson: Kinder von 9-13 Jahren. Unterricht in quadratischen Gleichungen (Einsetzung in $\square$), Aufstellen von Identitäten, Koordinatensystem, Spiele im Koordinatensystem.
b) Lesson with Secon Graders: Kinder von 7 Jahren. Unterricht im Gebrauch positiver und negativer ganzer Zahlen in Zusammenhang

mit dem Spiel "Pebbles in the Bag". Die Zahlengerade, Spiele im Koordinatengitter.

c) Bounded Monotonic Sequences: Kinder von 15 Jahren. Unterricht in Folgen mit Ziel auf Beobachtung der Konvergenz der beschränkten monotonen Folgen.

Die Filme wurden von Herrn H. G. STEINER (Karlsruhe) zur Verfügung gestellt und kommentiert.

J.Schmidt, Berlin