Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 23|1967

Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik

19. bis 25. November 1967

Auf dieser Tagung, die unter der Leitung der Herren Professor Dr. Collatz (Hamburg) und Professor Dr. Unger (Bonn) stand, zeigten sich die funktionalanalytischen Methoden wieder in vielen Gebieten der numerischen Mathematik, insbesondere in der Approximationstheorie, bei Differentialgleichungsproblemen und bei Iterationsverfahren zur Lösung von Operatorgleichungen, als sehr erfolgreich.

Einige der Vorträge befaßten sich mit der Intervallanalysis, die Verfahrens- und Rundungsfehler berücksichtigt und somit neben einer näherungsweisen Lösung auch zugleich untere und obere Fehlerschranken liefert. Ferner wurde noch in einem Vortrag ein Problem der Optimierungstheorie behandelt.

Neben den lebhaften Diskussionen im Anschluß an die Vorträge fand noch eine allgemeine Diskussion statt, in der besonders darauf hingewiesen wurde, daß die Mathematik in der Beziehung zu den Nachbarwissenschaften und in ihrer Stellung in der Öffentlichkeit noch sehr isoliert ist. In der Diskussion wurde auch auf den weiten Weg von der abstrakten Theorie bis zur numerischen Rechnung auf dem Computer hingewiesen. Sowohl für den Aufbau der Theorie als auch für die Aufbereitung der theoretischen Ergebnisse für die Numerik ergeben sich noch große Aufgaben.

Es wurde auch über die Ausbildung auf dem Gebiet Computing Science gesprochen und die Notwendigkeit weitgehender Förderung dieses Gebiets herausgestellt.

Die durch den Neubau gegebenen Möglichkeiten haben sehr dazu beigetragen, die harmonische Oberwolfacher Atmosphäre noch zu steigern.

Teilnehmer

H. Ade, Clausthal-Zellerfeld
J. Albrecht, Berlin
H. Amann, Freiburg
K. Ansorge, Clausthal-Zellerfeld
J. Blatter, Bonn
W. Börsch-Supan, Mainz
E. Bohl, Hamburg
E. Bredendiek, Hamburg
B. Brosowski, München
L. Collatz, Hamburg
B. Dejon, Rüschlikon (Schweiz)
U. Dieter, Karlsruhe
L. Elsner, Hamburg
H. Engels, Aachen
F. Fazekas, Budapest (Ungarn)
I. Galligani, Ispra (Italien)
K. P. Hadeler, Hamburg
G. Hämmerlin, München
H. P. Helfrich, Freiburg
K.-H. Hoffmann, München
B. Hubbard, Wien (Österreich)
H. van Iperen, Delft (Holland)
E. Kreyszig, Düsseldorf
U. Kulisch, Karlsruhe
P. Laasonen, Helsinki (Finnland)
H. Lange, Freiburg
P. J. Laurent, Grenoble (Frankreich)
H. Leipholz, Karlsruhe
M. Lenhard, Karlsruhe
G. Meinardus, Clausthal-Zellerfeld
R. Mennicken, Köln
G. Merz, Clausthal-Zellerfeld
R. Moore, Stockholm (Schweden)
W. Niethammer, Bochum
J. Nitsche, Freiburg
H.-J. Ortolf, Bonn
D. Oswald, Freiburg
G. Pantelidis, Bonn
W. Schäfke, Köln
E. Schock, Bonn
J. Schröder, Köln
P. C. Sikkema, Delft (Holland)
W. Sippel, Clausthal-Zellerfeld
H. J. Stetter, Wien (Österreich)
H. J. Stoss, Köln
H. Unger, Bonn
W. Velte, Würzburg
W. Walter, Karlsruhe
H. Werner, Münster
W. Wetterling, Hamburg

Vortragsauszüge

H. LEIPHOLZ: Einige Bemerkungen zum Verfahren von Grammel

Es wird gezeigt, daß die Grammelschen Gleichungen zum Typ der Rieß-Schauderschen gehören. Dann lassen sich die ursprünglichen Voraussetzungen von Grammel verallgemeinern. - Das Grammelsche Verfahren verlangt die Angabe einer Greenschen Funktion. Das kann unter Umständen Schwierigkeiten sowohl

wegen der Struktur der Dgl. als auch der Randbedingungen bereiten. Es wird erörtert, unter welchen Bedingungen das Arbeiten mit der Greenschen Funktion eines "benachbarten Ersatzproblems" möglich ist.

E. BOHL: Iterationsverfahren mit monotonen Folgen

Sei X ein normierter Raum, welcher durch einen abgeschlossenen Kegel K mit inneren Punkten halbgeordnet sei. Sei $T = T_1 - T_2$ ein auf K definierter Operator (T_1 und T_2 monoton). Wenn es ein $y_o \geqslant \theta$ gibt mit

$$\theta \leqslant T_1\theta - T_2 y_o \qquad\qquad T_1 y_o - T_2\theta \leq y_o ,$$

dann kann man in bekannter Weise monotone Folgen konstruieren, die unter geeigneten Bedingungen eine Lösung von $x = Tx$ einschließen.

Es ist ein Verfahren angegeben worden, welches ein solches Element $y_o \geqslant \theta$ konstruiert. Gleichzeitig wurden Beispielklassen genannt, die stets auf die beschriebene Weise behandelt werden können. Die Methode ist numerisch erprobt.

Ist $T_1 x = Ax + b$ (A ein linearer monotoner Operator, $b \in X$) und T_2 = Nulloperator, so kann das Verfahren stets verwendet werden, Konvergenzaussagen ergeben sich schon unter sehr schwachen Voraussetzungen. Unter geringfügigen zusätzlichen Bedingungen sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Das Iterationsverfahren $x_{n+1} = Ax_n + b$ konvergiert für jedes $b \in X$ und jedes Anfangselement $x_o \in X$ gegen die eindeutige Lösung x^* der Gleichung $(I - A)x = b$.

b) $(I - A)^{-1}$ existiert und ist monoton.

c) Es gibt ein $y \in K$, so daß $(I - A)y$ innerer Punkt von K ist.

R. MOORE: Funktionalanalysis für Rechenanlagen

Die Hilfsmittel der Intervall-Analysis gestatten es, gewisse Teile der Funktionalanalysis so auf Rechenanlagen zu übertragen, daß Resultate sicher eingeschlossen werden können.

Zum Beispiel bilden Intervallpolynome ein wirkliches Hilfsmittel zur Übertragung von Funktionen auf Rechenanlagen. Kontrahierende Operatoren P sind leicht auf

Intervallpolynome anwendbar, insbesondere unter Ausnutzung des Prozesses der "Vergröberung".

Als Beispiel wird das Randwertproblem $y'' = e^{-y}$, $y(0) = y(1) = 0$ durch Konstruktion eines kontrahierenden Operators P für die zugeordnete Integralgleichung in einfacher Weise intervallanalytisch gelöst.

E. SCHOCK: Beste Approximation von Elementen eines nuklearen Raumes

Sei $\mathfrak{U}(E)$ Fundamentalsystem von absolutkonvexen abgeschlossenen Nullumgebungen des lokalkonvexen Raumes E. Für zwei Teilmengen $U, V \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V \subset U$ und einem i-dimensionalen Teilraum E_i von E sei
$\delta(V, U, E_i) = \inf\{\delta > 0,\ V \subset \delta U + E_i),\ \delta_i(V, U)\} = \inf\{\delta(V, U, E_i), E_i \subset E, \dim E_i = i\}$.
Eine Menge $\Delta_n(E)$ von Zahlenfolgen $\delta = \{\delta_i\}$ heißt diametrale Dimension von E, wenn für alle $U \in \mathfrak{U}(E)$ ein $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V \subset U$ existiert, so daß für alle $i \geqslant 0$ gilt $\delta_i(V, U) \leq \delta_i$. Dann ist der diametrale Folgenraum $\Lambda_n(E)$ die Menge aller komplexen Zahlenfolgen $\{\xi_i\}$ mit $\sum_i |\xi_i| \delta_i^{-1} < \infty$ für alle $\delta \in \Delta_n(E)$.
Ist $\| \ \|_U$ eine stetige Halbnorm auf E, so sei für eine beschränkte Menge A von E und einen i-dimensionalen Teilraum E_i $\rho(A, \| \ \|_U, E_i) = \sup\{\inf\{\|x - y\|_U, y \in E_i\}, x \in A\}$.

Satz 1: Ist E ein nuklearer Raum, $\| \ \|_U$ eine stetige Halbnorm, $A \subset E$ beschränkt, so gibt es eine Folge von Teilräumen E_i von E mit $\dim E_i = i$, so daß gilt: $\{\rho(A, \| \ \|_U, E_i)\} \in \Lambda_U(E)$.

Satz 2: Hat der nukleare (F)-Raum E eine reguläre Basis $\{x_i\}$ im Sinne von DRAGILEW, ist $E_i = \text{spann}\,[x_1, x_2, \ldots, x_i]$, so gilt: Für jede stetige Halbnorm $\| \ \|_U$ und für jede beschränkte Teilmenge A von E ist $\{\rho(A, \| \ \|_U, E_i)\} \in \Lambda_U(E)$. Es werden für viele Fälle Beispiele angegeben, die einige klassische Resultate erweitern.

E. BREDENDIEK: Charakterisierung und Gewinnung einer besten Approximation in einer konvexen Teilmenge eines normierten Raumes

Dans la première partie on étude un problème général d'approximation dans un espace vectoriel normé, le domaine des approximants étant l'intersection d'un sousespace vectoriel fermé translaté avec un convexe d'interieur non vide

(contraintes de type inégalité). Les théorèmes de caractérisation et d'unicité ainsi que le problème dual sont énoncés. Dans le cas où le domaine est contenu dans un sousespace de dimension fini les fonctionelles qui caractérisent la solution peuvent être precisées davantage (de type extrémal).

Dans la deuxième partie, une méthode de croissance, qui consiste en fait à résoudre le problème dual, est proposée. Cette méthode peut être considérée comme une généralisation de l'Algorithme de Rémès. Sous certaines hypothèses sa convergence est démontrée.

H. van IPEREN: <u>Über die beste Approximation mit Potenzen von verallgemeinerten Bernstein-Operatoren</u>

Es sei $L_{n,\alpha}$ definiert durch

$$L_{n,\alpha} f = L_{n,\alpha}\{f(t);x\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} \varphi_{n,\alpha}^{(k)}(x) f(\tfrac{k}{n})$$

mit $\varphi_{n,\alpha}(x) = (1-x)^n + (-1)^{n-1}(1-\alpha)x^n$ für $n = 1,2,\ldots$; $\alpha \in (-\infty,\infty)$;
$x \in [0,1]$; $f \in C[0,1]$.

Wir definieren Potenzen des Operators $L_{n,\alpha}$ wie üblich durch

$$L^1_{n,\alpha} f = L_{n,\alpha} f$$

$$L^m_{n,\alpha} f = L_{n,\alpha}(L^{m-1}_{n,\alpha} f) \; ; \quad m = 1,2,\ldots \; .$$

Es sei $\|f\| = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f|$; $\omega_f(\delta) = \sup\limits_{|x_1 - x_2| \leq \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$; dann wird -

unter Beobachtung des Resultates

$$\sup_{\substack{f \in C[0,1] \\ f \text{ nicht konstant}}} \frac{\|B_n f - f\|}{\omega_f(\frac{1}{\sqrt{n}})} = 1{,}0898873\ldots \; ; \quad n = 1,2,3,\ldots \quad -$$

bestimmt

$$K_{n,m,\alpha} = \sup_{\substack{f \in C[0,1] \\ f \text{ nicht konstant}}} \frac{\|L^m_{n,\alpha} f - f\|}{\omega_f(\frac{1}{\sqrt{n}})} \; ; \quad n=2 \; ; \quad m = 1,2,3,\ldots \quad \alpha \in (-\infty,\infty) \; .$$

mit Hilfe einer Methode, die es gestattet, auch in anderen Fällen solche Konstanten zu bestimmen.

P. LAASONEN: Abschätzung der Diskretisierungsfehler elliptischer Gleichungen

Wenn eine elliptische Gleichung gemäß dem Netzverfahren approximativ gelöst wird, so ist der Fehler der derart erhaltenen diskretisierten Lösung wesentlich von der Form $O(h^{\kappa})$, wo h die Netzkonstante ist. Im Falle des ebenen DIRICHLETschen Problems der LAPLACEschen Gleichung mit stückweise analytischen Randwerten ist κ ausschlaggebend von dem größten Winkel der Berandung abhängig. Diese Abhängigkeit wird gegeben und mit empirischen Resultaten verglichen.

(Der Vortrag wird in etwas erweiterter Form in den Vortragsberichten von IV. IKM, Weimar, Sommer 1967, veröffentlicht; die Sätze mit Beweisen: Ann. Acad. Scient. Fenn. A I 408 (1967).)

H. J. STETTER: Bemerkungen zur absoluten Stabilität gewisser Diskretisierungsverfahren

Für das Extrapolationsverfahren nach Gragg-Bulisch-Stoer (GBS) zur Lösung des Systems $y' = f(t,y)$, $y(0) = y_0$, ist die übliche formale Definition des absoluten Stabilitätsgebietes nicht anwendbar. Es wurde deshalb eine Definition vorgeschlagen, die auf einem Vergleich zwischen der ungünstigsten Fehlerfortpflanzung beim GBS-Verfahren mit einer konstanten Fehlerfortpflanzung beruht, und das sich hieraus ergebenede Stabilitätsgebiet bestimmt, das noch von der Anzahl der Extrapolationsschritte abhängt. Praktische Rechnungen mit "stiff equations" haben bestätigt, daß diese Gebiete den wirklichen Verhältnissen entsprechen.

Das Prinzip, durch geeignete Kombination verschiedener (möglicherweise instabiler) Näherungen für denselben Wert zu einer gut absolut stabilen Näherung zu kommen, wurde an zwei Beispielen erläutert. Bei den Runge-Kutta-Verfahren kann man bei der Konstruktion statt optimaler Approximationsordnung optimale Stabilität anstreben. Bei den Predictor-Corrector-Verfahren kann man durch Linear-Kombination verschiedener Iterierten die Stabilität beträchtlich erhöhen.

K.-H. HOFFMANN: Über ein Eindeutigkeitskriterium bei der rationalen Tschebyschew-Approximation

Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit der verallgemeinerten rationalen besten Tschebyschew-Approximierenden für eine

stetige Funktion gegeben. Das Kriterium verlangt das Bestehen einer Ungleichung zwischen den Normen der zu approximierenden Funktion und der approximierenden Funktionen. Als Spezialfall folgt in der linearen Theorie ein kürzlich von J. Ikebe bewiesener Satz.

H.-P. HELFRICH: Ein modifiziertes Newtonsches Verfahren

Zur Lösung nichtlinearer Operatorgleichungen wird ein Iterationsverfahren angegeben, bei dem sich, grob gesprochen, ein Iterationsschritt aus einem des vereinfachten Newtonschen und einem des Verfahrens von G. Schulz zur Inversion von Matrizen zusammensetzt. Die Berechnung der Inversen eines linearen Operators bei jedem Iterationsschritt wird hierdurch vermieden. Es wird gezeigt, daß das Verfahren unter ähnlichen Voraussetzungen, wie sie in der Literatur über das Newtonsche Verfahren gemacht werden, quadratisch konvergiert. Ein numerisches Beispiel steht zur Verfügung.

H. AMANN: Iterationsverfahren für die Hammersteinsche Gleichung

Auf einem Hilbertraum H sei ein lipschitzstetiger, (im Sinne von BROWDER-MINTY) streng monotoner Operator A definiert. Ferner sei B ein positiv definiter, selbstadjungierter Operator auf H. Dann konvergiert das Iterationsverfahren

$$u_o = 0$$

$$u_{n+1} = u_n - t \cdot BA(u_n) \,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

für alle genügend kleinen $t > 0$ gegen die eindeutig existierende Lösung der Gleichung $A(u) = 0$ (Beweisskizze). Unter verschiedenen Voraussetzungen an K und F wird die Hammersteinsche Gleichung

$$u + KF(u) = 0$$

auf eine Gleichung vom obigen Typ zurückgeführt. Auf diesem Wege werden Existenzsätze und Iterationsverfahren für die Hammersteinsche Gleichung hergeleitet.

W. WALTER: Zum Iteraticnsverfahren bei linearen Gleichungssystemen

Es wir ein neuer, elementarer Beweis für den bekannten Satz gegeben, daß bei linearen Gleichungssystemen das sogenannte schwache Zeilensummenkriterium für die Konvergenz von Iterationsverfahren ausreicht. Der Beweis benutzt nur die einfachsten Tatsachen über Matrizen, insbesondere nicht die Jordansche Normalform. Außerdem kann der Satz gegenüber bisherigen Formulierungen versch verschärft werden. Vgl. Numerische Math. 10, 80-85 (1967).

H. WERNER: Der Existenzsatz für das Tschebyscheffsche Approximationsproblem bei Exponentialsummen

Da bekanntlich die Tschebyscheffsche Approximationsaufgabe in der Klasse der Exponentialsummen $y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j x}$, c_j, λ_j reell, nicht immer lösbar ist, so erweitert man diese Klasse zu der der verallgemeinerten Exponentialsummen $\tilde{E}_n = \left\{ y(x) \,|\, y(x) = \sum_{j=1}^{k} P_j(x) \cdot e^{\lambda_j x} \text{ mit } k \leq n, \ \sum_j (\partial P_j + 1) \leq n \right\}$.

Es wird gezeigt, daß bezüglich fast überall punktweiser Konvergenz die so erhaltene Funktionenfamilie abgeschlossen ist. Zum Beweis wird die Tatsache verwendet, daß alle betrachteten Funktionen Lösungen von homogenen linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind, deren charakteristisches Polynom reelle Wurzeln besitzt. Diese Eigenschaft führt zu Schranken für die Anzahl der Nullstellen dieser Funktionen und ihrer Ableitungen und zu Apriori-Abschätzungen für die Ableitungen in geeigneten Teilintervallen. Diese Abschätzungen ermöglichen die Auswahl konvergenter Teilfolgen aus beschränkten Funktionenmengen, womit die Kompaktheit bezüglich des obigen Konvergenzbegriffes gezeigt ist. Aus der Kompaktheit schließt man ohne Mühe auf die Lösbarkeit des τ-Approximationsproblems für jede stetige Funktion.

W. NIETHAMMER: Iterationsverfahren und allgemeine Euler-Verfahren

Ausgangspunkt ist die Frage, wie weit sich eine Verbindung zwischen Limitierungs- bzw. Summierungsmethoden und Iterationsverfahren herstellen läßt. Beide Gebiete sind weitläufig; deshalb beschränkt sich der Vortrag auf die

iterative Lösung linearer Matrizengleichungen $AX = X - BX = C$. Theoretisch liefern alle Matrix-Summierungsverfahren, die die geometrische Reihe auf dem Spektrum von B summieren, ein konvergentes Iterationsverfahren. Als Beispiel dient das Euler-Knopp-Verfahren, das der Relaxation in Gesamtschritten entspricht. Als Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit der transformierten Reihe wird der Konvergenzfaktor eingeführt. Ein über ein Summierungsverfahren gewonnenes Iterationsverfahren wird dann besonders brauchbar sein, wenn sich bei vorgegebener Matrix B ein möglichst optimaler Konvergenzfaktor sowie Rekursionsformeln für die Berechnung der Näherungen angeben lassen. Schließlich interessiert noch, ob eine Beziehung zu bekannten Verfahren besteht. Für die Klasse der allgemeinen Euler-Verfahren werden diese Fragen untersucht. Zu den auf diese Weise konstruierbaren Iterationsverfahren gehört auch die "Successive-Over-Relaxation" bei Matrizen mit "Property A". Es läßt sich so ein Satz über den optimalen Relaxationsfaktor δ_0 ableiten, der auch bei Matrizen mit komplexen Eigenwerten und damit komplexen δ_0 gilt.

B. BROSOWSKI: <u>Einige Bemerkungen zum verallgemeinerten Kolmogoroffschen Kriterium</u>

Das aus der Theorie der nicht-linearen T-Approximation bekannte Kolmogoroffsche Kriterium wird mit Hilfe von Fundamentalsystemen linearer Funktionale auf lineare normierte Räume verallgemeinert. Dieses verallgemeinerte Kriterium ist stets hinreichend, jedoch im allgemeinen nicht notwendig. Ferner wird ein für beliebige Teilmengen V eines linearen normierten Raumes R gültiger Einschließungssatz für die Minimalabweichung dargestellt. Schließlich werden die Teilmengen $V \subset R$ charakterisiert, für die das verallgemeinerte Kolmogoroffsche Kriterium stets notwendig ist- Es wird u. a. gezeigt: Für jede beste Approximation bezüglich einer Teilmenge $V \subset R$ ist das verallgemeinerte Kolmogoroffsche Kriterium genau dann notwendig, wenn V eine Sonne ist. Die allgemeinen Ergebnisse wurden auf L_p-Approximationen, $1 \leq p < \infty$, angewandt.

K. P. HADELER: Inverse Eigenwertprobleme

Es werden folgende Probleme gestellt:

I. Zu einer vorgegebenen reellen symmetrischen Matrix A der Ordnung $n \geq 2$ und n reellen Zahlen $s_1, \ldots, s_n$ ist eine reelle Diagonalmatrix V zu finden, so daß $A + V$ die Eigenwerte $s_1, \ldots, s_n$ besitzt.

II. Zu einer vorgegebenen reellen, positiv definiten Matrix A und positiven Zahlen $s_1, \ldots, s_n$ ist eine positive Diagonalmatrix V gesucht, so daß VA die Eigenwerte $s_1, \ldots, s_n$ hat. Für beide Probleme werden Existenzsätze gezeigt sowie Iterationsverfahren zur Berechnung von Lösungen angegeben. Die Konvergenz dieser Verfahren wird bewiesen.

III. Ein von Kolmogorov 1938 gestelltes und von Dmitriev, Dynkin und Karpelevic gelöstes Problem besteht darin, die Menge aller Eigenwerte der stochastischen Matrizen einer festen Ordnung $n \geq 2$ zu bestimmen. Ein nahe verwandtes Problem wird erläutert, einige geometrische Vorstellungen zur Lösung und partielle Resultate werden angegeben.

B. HUBBARD: Difference Methods for Boundary Value Problems with isolated singularities

One considers the boundary value problem $L_n(x) = f(x)$, $x \in R$ and $u(x) = g(x)$, $x \in LR$ for $x \in E^n$. For a class of discrete analogs with mesh spacing L the uniformly elliptic operator L (with smooth coefficients) is replaced by a discrete operator such that $L_h u(x,h) = \hat{f}(x)$, $x \in R_h$ and $u(x,h) = g(x)$, $x \in LR_h$ when

a) L_h is a local $O(h^2)$ approximation L except near the boundary,

b) the matrix of the discrete problem has a non-negative inverse.

A class of problems with isolated singularities are then considered and detailed estimates for the rate of convergence obtained.

R. ANSORGE: Zur Existenz verallgemeinerter Lösungen nichtlinearer Anfangswertaufgaben

Bei der Approximation von Anfangswertaufgaben mit partiellen Differentialgleichungen durch Differenzenverfahren interessiert die Frage, ob die Lösung

der Differenzengleichung für gegen null strebende Maschenweite auch dann konvergiert, wenn zu der vorgegebenen Aufangsfunktion nur eine verallgemeinerte Lösung der Anfangswertaufgabe existiert. Weiterhin wird dann natürlich erwartet, daß die Grenzfunktion mit dieser verallgemeinerten Lösung übereinstimmt.

Für nichtlineare Aufgaben erscheint die Frage der Existenz verallgemeinerter Lösungen weitgehend ungeklärt, obschon sie für die Anwendungen von Bedeutung ist.

Gemäß der Tatsache, daß die Existenz echter Lösungen gelegentlich mit Hilfe von Differenzenverfahren nachgewiesen werden kann, liegt der Gedanke nahe, auch die Existenz verallgemeinerter Lösungen dem Differenzenverfahren selbst zu entnehmen. Dies gelingt in der Tat, wenn die iterierten Differenzenoperatoren eines gegen die echten Lösungen konvergierenden Einschrittverfahrens die (auch numerisch wünschenswerte) Eigenschaft besitzen, auf einer Menge von Anfangselementen gleichgradig stetig zu sein, die in gewisser Weise umfangreicher ist als die Menge der Anfangselemente, für die echte Lösungen existieren.

G. PANTELIDIS: <u>Konvergente Iterationsverfahren für flach-konvexe Banachräume</u>

Ist E ein reeller normierter Raum und sind A, B abgeschlossene Teilräume von E, so ist $P_A(x) = \{ a_o \in A \; ; \; \|x-a_o\| = \inf_{a \in A} \|x-a\| \; , \; x \in E \}$ die Menge der Elemente bester Approximation von x durch Elemente von A. $\pi_A(x)$ sei ein beliebiges Element aus $P_A(x)$.

<u>Theorem 1.</u> Sei E endlich dimensional und flach konvex. Für zwei gegebene Teilräume A, B gibt es ein $k \in (0,1)$, so daß für alle $x \in A$

$$\|\pi_B(x) - \pi_A \pi_B(x)\| \leq k \|\pi_B(x) - x\| \; .$$

<u>Theorem 2.</u> Ist E endlich dimensional, so konvergiert jede Folge (x_i) mit $x_1 \in P_B(x)$, $x_2 \in P_A(x_1)$, ..., $x_{2n-1} \in P_B(x_{2n-2})$, $x_{2n} \in P_A(x_{2n-1})$, ... , gegen ein Element von $A \cap B$ für jedes $x \in E$ und jedes Paar A, B genau dann, wenn E flach konvex ist.

<u>Theorem 3.</u> Ist E endlich dimensionaler flach konvexer Banachraum und sind A, B Teilräume von E, so gilt

$$\overline{\lim}\,\{x_i\} \subset x - P_{\mathrm{span}(A,B)}(x)\,,$$

mit $x_1 \in (I-P_B)x$; $x_2 \in (I-P_a)x_1$, ... , $x_{2n-1} \in (I-P_B)x_{2n-2}$, $x_{2n} \in (I-P_A)x_{2n-1}$,

wobei $\overline{\lim}\{x_i\}$ im Sinne von Kuratowski zu verstehen ist.

F. FAZEKAS: Verallgemeinerungen des Vialzentrum-Problems nebst funktionalanalytischen Beziehungen

Neue Bücher und Aufsätze über dieses Thema. Das Grundproblem im Komplexen:

$$0 \leqslant u(z) = \sum_k p_k d_k = \sum_k p_k \sqrt{(z-\zeta_k)(\bar{z}-\bar{\zeta}_k)} = \mathrm{Min}\,! \quad ; \quad \hat{z} = ?\,,\ \hat{u} = u(\hat{z}) = ?$$

Mit komplexer Potentialfunktion: $0 \leqslant u(z) = \mathrm{Re}\ln(\omega-\omega_k)^{p_k}$, $|\omega-\omega_k| \geqslant 1$.

[Hinweise auf das verwandte Steiner-Problem: $s(z) = \sum_k p_k d_k^z = \mathrm{Min}\,!$]

Konvexitätsbemerkungen. Bedingungsgleichung für lok. (und glob.). Minimum: $\mathrm{grad}\, u(\hat{z}) \equiv \sum_k p_k e^{i\hat{\gamma}_k} = 0$, oder $\hat{z} = \frac{1}{\hat{Q}} \sum_k \hat{q}_k \zeta_k \equiv \varphi(\hat{z})$

$\left[\hat{q}_k = p_k/\hat{d}_k\,,\ \hat{Q} = \sum_k \hat{q}_k\right]$; Iteration: $\hat{z}^{(j+1)} = \hat{z}^{(j)} - \frac{1}{\hat{Q}^{(j)}} \sum_k \hat{q}_k^{(j)} (z^{(j)} - \zeta_k)$;

geometrische Interpretationen. Kuhns und Hosszus Untersuchungen, Konvergenzbeweis von letzterem. Der Fall einer gegebenen Zentralkurve $z(t)$; Bedingungsgleichung : $\dot{g}(\hat{t}) = \hat{\rho} \cdot \sum_k p_k \cos(\hat{\gamma}_k - \hat{\delta}) = 0$, $\ddot{g}(\hat{t}) > 0$. Technische, ökonomische Anwendungen.

Weitere betrachtete Fälle: ein verbotener Bereich für $\hat{z}$; kurvenartig und flächenartig, stetige Gewichtsverteilung; diskrete und stetige Gewichtsverteilung, behandelt mit Stieltjes-Integral; mehrere Vialzentren bei allgemeiner Gewichtsverteilung und bei Annäherung längs eines Stassennetzes; Bemerkungen über das verallgemeinerte Problem: $v(z) = \sum_k p_k d_k^n = \mathrm{Min}\,!$

H. J. ORTOLF: Verallgemeinerung des Intervallbegriffs mit Anwendungen

Der Intervallbegriff wird dahingehend verallgemeinert, daß die Menge der Intervalle eingebettet wird in einen linearen Raum, den Raum der Punktpaare. Es ergeben sich neue Verknüpfungen δ und i. Mit diesen Verknüpfungen kann nach

Einführung einer Halbordnung im Raum der Punktepaare ein "Gegenstück" zum Subdistributivitätsgesetz der Intervallrechnung formuliert werden. Es wird eine Norm definiert. Die Betrachtungen lassen sich auf Punktpaarmatrizen ausdehnen.

Als Beispiel werden mit dem Banachschen Fixpunktsatz Abschätzungen zum Verfahren zur Inversion einer Intervallmatrix $\underset{\sim}{A}$: $T\underset{\sim}{Y} = X \oplus (E \ominus X\underset{\sim}{A})\underset{\sim}{Y}$ (nach Krickeberg) angegeben. Entsprechende Betrachtungen für den Rundungsfehler werden angefügt.

J. BLATTER: Approximative Kompaktheit verallgemeinerter rationaler Funktionen

Für einen kompakten Hausdorff-Raum X und ein positives reguläres Borel-Maß μ auf X werden verallgemeinerte rationale Funktionen $R_p \subset L_p(X,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, definiert, wobei im allgemeinen $R_q \subsetneq R_p$ für $1 \leq p < q \leq \infty$. Es wird bewiesen, daß für $1 < p < \infty$ die Menge R_p schwach folgenabgeschlossen - und daher insbesondere approximativ kompakt - ist in $L_p(X,\mu)$. Das wichtigste Korollar zu diesem Ergebnis ist, daß für $1 < p < \infty$ die Menge R_p im allgemeinen (nämlich immer dann, wenn sie nicht konvex ist) keine Chebychev-Teilmenge von $L_p(X,\mu)$ ist. Es wird weiter bewiesen, daß $R_1 \subset L_1(X,\mu)$ und $R_\infty \subset L_\infty(X,\mu)$ nur noch approximativ kompakt im Maß μ sind, woraus aber noch folgt, daß R_1 und R_∞ Existenzmengen sind. Schließlich wird bewiesen, daß der Pólya-Algorithmus für den beschriebenen Fall der Approximation durch verallgemeinerte rationale Funktionen im Maß μ konvergiert.

E. Bredendiek