Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 2/68

Arbeitsgemeinschaft über Korrespondenzentheorie

Leitung: Prof. Dr. P. ROQUETTE
27. bis 30. Januar 1968

Ziel der Arbeitsgemeinschaft war es, die Korrespondenzentheorie für algebraische Funktionenkörper einer Variablen in der Sprache der Schemata zu formulieren. Einmal wurde so eine Einführung in diese neue Sprache der algebraischen Geometrie an einem konkreten, heute als klassisch zu bezeichnenden Problemkreis gegeben.-In den Vorträgen und in anregenden Diskussionen kamen die Vorteile zum Ausdruck, die diese Sprache durch ihre Allgemeinheit besitzt. Die klassische Korrespondenzentheorie kam darüber aber nicht zu kurz, nach dem Aufbau des Grundgerüstes wurde die Riemannsche Vermutung in Angriff genommen und im wesentlichen bewiesen (nach Weil-Roquette und Mattuck-Tate). Besonderen Reiz bekam die Tagung durch den Vortrag von Herrn Tamme, der über seine Untersuchungen der Korrespondenzen von Kurven des Geschlechtes 2 berichtete. Daß über dieses Tagungsprogramm hinaus fruchtbare Gespräche geführt und persönliche Kontakte geschlossen wurden, braucht wohl kaum betont zu werden, ebenso ist es klar, daß Darstellung und Inhalt der Vorträge einige Fragen aufwarfen, die sich in der Diskussion nicht lösten und zum eigenen Nachdenken von den Teilnehmern mitgenommen werden konnten.

Teilnehmer

Frey, G., Heidelberg
Geyer, W.D., Heidelberg
Göhner, H., Heidelberg
Göhner, U., Tübingen
Hahnel, P., Heidelberg
Irion, K., Heidelberg
Leicht, J., Heidelberg
Lorenz, F., Heidelberg
Martens, G., Heidelberg
Maulbetsch, R., Tübingen
Radbruch, K., Tübingen
Roquette, P., Heidelberg
Schmale, W., Tübingen
Tamme, G., Hamburg
Wolff, M., Tübingen

Vortragsauszüge

MARTENS, G.: Abbildungen zwischen den Cartierschen Divisorengruppen zweier Schemata

Sei $g: X \to Y$ ein Morphismus noetherscher Schemata. $\mathfrak{D}(Y)$ seien die ganzen (Cartierschen) Divisoren von Y, $\mathfrak{D}'(Y) := \{\vartheta \in \mathfrak{D}(Y); \operatorname{supp}(\vartheta) \cap g(\operatorname{Ass}(X)) = \emptyset\}$. Dabei ist $\operatorname{sup}(\vartheta) = \{y \in Y;\ f_y$ keine Einheit in $O_y\}$ (f_y sei die lokale Gleichung von ϑ in y), $\operatorname{Ass}(X) = \{x \in X$; das maximale Ideal von O_x besteht nur aus Nullteilern$\}$.

Das i n v e r s e B i l d $g^*(\vartheta)$ läßt sich dann für einen Divisor $\vartheta \in \mathfrak{D}'(Y)$ erklären durch das Faserprodukt von g mit der Einbettung von ϑ in Y (ϑ aufgefaßt als abgeschlossenes Teilschema von Y).

Ist g ein flacher Morphismus, dann ist $\mathfrak{D}(Y) = \mathfrak{D}'(Y)$.
Ist g sogar endlich und flach, so ist $g_*(O_X)$ lokal frei über O_Y, das heißt: Zu jedem $y \in Y$ gibt es eine affine offene Umgebung $U \subseteq Y$, so daß $B = \Gamma(g^{-1}(U), O_X)$ freier (endl.) $\Gamma(U, O_Y)$-Modul ist. Für alle $\beta \in B$ ist dann die Norm $N(\beta)$ in üblicher Weise definiert, sie führt Nichtnullteiler in Nichtnullteiler über.

Sei nun $\vartheta \in \mathfrak{D}(X)$. Man kann eine offene affine Überdeckung

$U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ von Y finden, so daß ϑ auf ganz $g^{-1}(U_i)$ durch eine lokale Gleichung $ß_i$ beschrieben wird. $(N(ß_i))$ definiert dann einen ganzen Divisor von Y, der das d i r e k t e B i l d $g_*(\vartheta)$ genannt wird.

LORENZ, F.: Definition und erste Eigenschaften von Korrespondenzen

Ein Schema X heißt eine Kurve, wenn X ein 1-dimensionales projektives Schema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist und wenn die Menge der assoziierten Punkte von X gleich der Menge der generischen Punkte ist.

Seien E und F singularitätenfreie Kurven. Eine Korrespondenz $\mathfrak{X}$ ist eine Abbildung von $\mathfrak{D}(E)$ in $\mathfrak{D}(F)$, die bestimmt ist durch ein Tripel (X, φ, ψ), wobei X eine Kurve und φ, ψ endliche (und dann auch flache) Morphismen von X in E bzw. F sind:

$$\mathfrak{X} : \mathfrak{D}(E) \xrightarrow{\varphi^*} \mathfrak{D}(X) \xrightarrow{\psi_*} \mathfrak{D}(F).$$

Als grad($\mathfrak{X}$) wird der grad φ definiert, der konstant ist, da E zusammenhängend ist.

Ist X' ebenfalls eine Kurve und $\chi: X' \to X$ generisch flach vom konstanten Grad n, dann ist $\mathfrak{X} = n\,\mathfrak{X}'$ $(\mathfrak{X}', \varphi\chi, \psi\chi)$).

Mit Hilfe dieses Satzes führt man alle Korrespondenzen zurück auf Korrespondenzen, die durch irreduzible, reduzierte Kurven auf $E \times F$ vermittelt werden. $E \times F$ ist singularitätenfrei und faktoriell, die Cartierschen und die Weilschen Divisoren stimmen überein. Wenn $D \in \mathfrak{D}(E \times F)$ ein Primdivisor ist, dann entspricht ihm eineindeutig eine reduzierte irreduzible Kurve auf $E \times F$ mit den Projektionen φ auf E und ψ auf F. Ist φ nicht endlich, dann wird ϑ = Nullabbildung als die zu (D, φ, ψ) gehörende Korrespondenz definiert und grad $\vartheta = o$ gesetzt. D heißt ausgeartet über E.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Ist φ endlich, aber ψ nicht endlich, dann wird für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{D}(E)$ definiert $\vartheta(\mathfrak{a}) = \text{grad}\,\varphi \cdot \text{grad}\,\mathfrak{a}\,.\ f_o$ mit $f_o = \psi(D) \in F$.

Durch lineare Fortsetzung erhält man für beliebiges $X \in \mathfrak{D}(E \times F)$ eine Abbildung $\mathfrak{X}: \mathfrak{D}(E) \dashrightarrow \mathfrak{D}(F)$ und es gilt: $\mathfrak{X}$ ist die Nullabbildung nur, wenn X ausgeartet über E ist.

$\mathfrak{X}$ ist ein arithmetischer Homomorphismus:

i) $\mathfrak{X}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \mathfrak{X}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{X}(\mathfrak{b})$,

ii) Wenn $\mathfrak{a}$ und X ganz sind, ist auch $\mathfrak{X}(\mathfrak{a})$ ganz,

iii) aus $\mathfrak{a} \sim o$ folgt $\mathfrak{X}(\mathfrak{a}) \sim o$ und

iv) $\text{grad}(\mathfrak{X}(\mathfrak{a})) = \text{grad}\,\mathfrak{X} \cdot \text{grad}\,\mathfrak{a}$.

GEYER, W.-D.: Hauptsatz, Produkte von Korrespondenzen, Rosatischer Antiautomorphismus

Sei $\mathfrak{X}$ eine Korrespondenz, die $\mathfrak{D}(E)$ in $\mathfrak{D}(F)$ abbildet.

Da bei dieser Abbildung Hauptdivisoren in Hauptdivisoren überführt werden, induziert $\mathfrak{X}$ eine Abbildung $\bar{\mathfrak{X}}: \mathfrak{C}(E) \to \mathfrak{C}(F)$, wobei $\mathfrak{C}(E)$ und $\mathfrak{C}(F)$ die Divisorklassen von E bzw. F sind.

SATZ: Sei $X \in \mathfrak{D}(E \times F)$. Es ist $\bar{\mathfrak{X}} = o$ genau dann, wenn X äquivalent zu einem über E ausgearteten Divisor ist.

PRODUKT VON KORRESPONDENZEN: Seien E, F, G singularitätenfreie irreduzible Kurven über k. Sei $\mathfrak{X}: \mathfrak{D}(E) \to \mathfrak{D}(F)$ bestimmt durch (X, φ_1, ψ_1); $\mathfrak{Y}: \mathfrak{D}(F) \to \mathfrak{D}(G)$ bestimmt durch (Y, φ_2, ψ_2).

Dann ist $X \underset{F}{\times} Y \xrightarrow{\rho_2} Y$ endlich flach, ebenso ist $X \underset{F}{\times} Y \xrightarrow{\rho_1} X$ endlich flach, $X \underset{F}{\times} Y$ ist wieder eine Kurve über k und das Tripel $(X \underset{F}{\times} Y,\ \varphi_1 \circ \rho_1,\ \psi_2 \circ \rho_2)$ bestimmt eine Korrespondenz, die $\mathfrak{D}(E)$ in $\mathfrak{D}(G)$ abbildet und die mit $\mathfrak{Y} \circ \mathfrak{X}$ bezeichnet wird.

Die Menge der nichtausgearteten und nichtkonstanten Korrespondenzen von E in F wird durch die Abbildung: $\mathfrak{X} = (X, \varphi, \psi) \to (X, \psi, \varphi)$

Gefördert durch
Deutsche
Forschungsgemeinschaft

auf die entsprechende Korrespondenzenmenge von F in E abgebildet. Diese Abbildung wird als Rosatischer Antiauromorphismus ' bezeichnet. Es gilt:

$$(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y})' = \mathfrak{X}'+\mathfrak{Y}', \quad \mathfrak{X}'' = \mathfrak{X}, \quad (\mathfrak{X}\circ\mathfrak{Y})' = \mathfrak{Y}'\circ\mathfrak{X}' .$$

IRION, K: Definition der Schnittzahl und der σ-Metrik

Die Schnittzahl $i(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ zweier ganzer Korrespondenzen zwischen E und F ohne gemeinsame Komponenten wurde definiert als Länge des artinschen Schemas $X \cap Y = X \times_{E\times F} Y$. Dann wurde gezeigt, daß die Schnittzahl eine Funktion der linearen Äquivalenzklassen von Divisoren ist und daß sich bei Überlagerungen von E (oder F) vom Grade n die Schnittzahl mit n multipliziert.

Nun wurde $E = F$ vorausgesetzt. Für die identische Korrespondenz Δ wurde $i(\Delta,\Delta) = 2-2g$ berechnet, wobei g das Geschlecht der Kurve E ist, indem der Zusammenhang mit dem Grad der kanonischen Klasse von E hergestellt wurde.

Für grad $\mathfrak{B} = 1$ folgte wegen $i(\mathfrak{B},\mathfrak{B}') = i(\mathfrak{B}\circ\mathfrak{B}',\Delta)$ und $\mathfrak{B}\circ\mathfrak{B}' = \text{grad}\,\mathfrak{B}'\cdot\Delta$: $i(\mathfrak{B},\mathfrak{B}) = (2-2g)\,\text{grad}\,\mathfrak{B}'$.

Schließlich wurde für die Spurfunktion der gröberen Äquivalenzklassen von Korrespondenzen, die definiert wird durch:

$$\sigma(\alpha) = \text{grad}\,\mathfrak{A} + \text{grad}\,\mathfrak{A}' - i(\mathfrak{A},\Delta) ,$$

wo α eine Korrespondenzklasse und $\mathfrak{A}$ ein Vertreter daraus ist, gezeigt:

$$\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha)+\sigma(\beta), \quad \sigma(\alpha\circ\beta) = \sigma(\beta\circ\alpha) \text{ und:}$$

Bei Überlagerungen vom Grad n von E multipliziert sich $\sigma(\alpha)$ mit n.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

GÖHNER, H.; FREY, G.: Die Ungleichung von Castelnuovo

Seien E, F irreduzible, singularitätenfreie Kurven über k. Sei α eine gröbere Divisorklasse von $E \times F$, $A \in \mathfrak{D}(E \times F)$ ein Vertreter aus α und $\mathfrak{A}$ die dazugehörende Korrespondenz. ' bedeutet Anwendung des Rosatischen Antiautomorphismus.

SATZ: Sei $\alpha \neq o$. Dann ist $\sigma(\alpha \circ \alpha') > o$, wobei $\sigma(\alpha \circ \alpha') =$
$= 2 \operatorname{grad}\mathfrak{A} \cdot \operatorname{grad}\mathfrak{A}' - i(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ ist.

Zum Beweis: Es gilt folgendes

LEMMA: Zu α gibt es einen Vertreter A, so daß A ganz und $\operatorname{grad}\mathfrak{A} = g$ ist. (g = Geschlecht von E).

Aus diesem Lemma folgt die Behauptung für $g = o, 1$.

Sei jetzt $g \geq 2$. Man wählt einen Primdivisor $\mathfrak{q} \in \mathfrak{D}(F)$ und einen Vertreter $A \in \alpha$, so daß $A = \sum_{i=1}^{m} P_i$ ist mit $m \leq g$, $\operatorname{grad}\mathfrak{P}_i' = 1$ und $\mathfrak{A}'(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}_1 + \ldots + \mathfrak{p}_m$ gilt. Dabei sollen die $\mathfrak{p}_i$ Primdivisoren aus $\mathfrak{D}(E)$ sein, die in einem nichtspeziellen Primdivisorensystem $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m, \ldots, \mathfrak{p}_g$ enthalten sind. (Es ist $\mathfrak{P}_i$ bzw. $\mathfrak{A}$ die durch P_i bzw. A vermittelte Korrespondenz von E in F).

Dann wird gezeigt, daß $\sigma(\alpha \cdot \alpha') > o$ gleichbedeutend ist mit $i(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) < d(m+g-1)$, wenn $d = \operatorname{grad}\mathfrak{A}$ ist.

P_i induziert einen Isomorphismus von dem Funktionenkörper K von E in den Funktionenkörper von F. Dieser Isomorphismus werde ebenfalls mit P_i bezeichnet.

Man beweist jetzt: Für geeignete Elemente $w_1, \ldots, w_m \in K$ gilt:

$i(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) \leq \operatorname{grad}(\text{Nenner}(\det(P_j(w_i)))) < d(m+g-1)$.

FOLGERUNG: Sei $E = F$, sei k absolut algebraisch mit $\operatorname{char}(k) = p > o$. Dann ist E schon definiert über einem endlichen Körper k_n, dessen Elementeanzahl p^n sei. Sei N_1 die Anzahl der Primdivisoren von E, die rational über k_n sind.

Dann folgt aus der positiven Definitheit von $\sigma(\alpha \circ \alpha')$:
$|1+p^n - N_1| \leq 2g \cdot p^{n/2}$. Diese Ungleichung führt zur Riemannschen Vermutung für den Funktionenkörper K_n/k_n von E über k_n.

TAMME, G.: Multiplikatorenringe von Funktionenkörpern vom Geschlecht $g = 2$.

Sei K/k ein Funktionenkörper vom Geschlecht $g = 2$, $\mathfrak{M}(K)$ sein Multiplikatorenring. Zum Studium von $\mathfrak{M}(K) \otimes_Z Q =: \mathfrak{M}_Q(K)$ untersucht man die elliptischen Teilkörper von K.

DEFINITION: Seien E und E' zwei elliptische Teilkörper von K, beide seien vom Index n. Dann heißen E und E' komplementär, wenn gilt:

$$N_{K/E}(\mathfrak{x}) + N_{K/E'}(\mathfrak{x}) \sim n\mathfrak{x} \quad (\text{in } K)$$

für alle Divisoren $\mathfrak{x}$ vom Grad o aus K.

Es gilt der

SATZ: K/k besitzt entweder keinen (Fall 0) oder zwei (Fall I) oder unendlich viele (Fall II) maximale elliptische Teilkörper.

Im Falle 0 ist $\mathfrak{M}_Q(K)$ eine Divisionsalgebra über Q.
Seien im Fall I E und E' die beiden einzigen maximalen elliptischen Teilkörper von K/k, so sind E und E' zueinander komplementär, nicht isogen, und es gilt: $\mathfrak{M}_Q(K) = \mathfrak{M}_Q(E) + \mathfrak{M}_Q(E')$.

Im Fall II sind je zwei elliptische Teilkörper von K/k isogen, und ist E ein beliebiger elliptischer Teilkörper von K/k, so gilt:
$\mathfrak{M}_Q(K) = (\mathfrak{M}_Q(E))_2$.

GÖHNER, U.: Beweis der Ungleichung von Castelnuovo mit Hilfe des Riemann-Rochschen Satzes für Flächen

Seien E, F irreduzible, singularitätenfreie Kurven über k.

Sei $D \in \mathfrak{D}(E \times F)$, ϑ sei die zugehörige Korrespondenz. Aus dem Riemann-Rochschen Satz erhält man: $\sigma(\vartheta \cup \vartheta') \geq o$ genau dann, wenn $\dim(D) - \delta + \dim(K-D) \leq (d+1-g')(d'+1-g)$ ist.

Dabei ist $\delta \geq o$, K ein kanonischer Divisor von $E \times F$, g = Geschlecht von E, g' = Geschlecht von F, $d = \text{grad}\,\vartheta$, $d' = \text{grad}\,\vartheta'$.

Durch geeignete Abänderung von D um konstante Divisoren über E bzw. F erreicht man, daß man den Vielfachenmodul $\mathfrak{L}(D)$ einbetten kann in einen k-Modul M mit $\dim_k M = (d'+1-g)(d+1-g')$, und daraus folgt die Behauptung.

G. Frey (Heidelberg)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft