Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 4/68

Spezielle Probleme der Analysis

18. bis 24. Febr. 1968

Die Leitung der Tagung hatten Prof. Dr. Schäfke, Prof. Dr. Jehne, Prof. Dr. Meyer, Prof. Dr. Dombrowski.

Die Vorträge behandelten vor allem spezielle Probleme der Analysis aus den verschiedensten der in Köln gepflegten Gebieten, z. B. Integrationstheorie, spezielle Funktionen, Differentialgeometrie, Approximationstheorie und nichtarchimedische Funktionentheorie. Ferner wurde über einige algebraische Fragen vorgetragen, z. B. über Modulzerlegungstypen, quadratische Formen und kubische Zahlkörper.

Teilnehmer (alle aus Köln)

Bodendiek, R.	Krekel, D.	Nießen, H. D.
Diener, K.-H.	Lang, H.	Pawliska, H.-D.
Dombrowski, P.	Liesegang, G.	Pawliska, D.
Esser, J.	Löffler, K.-R.	Plewe, K.
Ferus, D.	Maurer, H.	Reuther, R.
Halin, R.	Mauve, R.	Schäfke, F. W.
Henke, W.	Mennicken, R.	Schertz, R.
Jehne, W.	Meyer, D.	Schmidt, D.
Kann, C.-H.	Michel, R.	Schneider, A.
Klingen, N.	Müller, G.	Schönhage, A.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Stender, H.-J. | Wegner, H.
Volkenborn, A.-G. | Wiechert, W.
Wagenführer, E. | Wippermann, H.
Weber, H. | Wolf, G.

Vortragsauszüge

FERUS, D.: Störung verallgemeinerter Morse-Funktionen

Für C^∞-Mannigfaltigkeiten M und C^∞-Abbildungen $f: M \to R$ sei $K(f)$ die Menge der kritischen Punkte von f, $i_f: K(f) \to Z$ der Index.

SATZ: Sei M eine kompakte C^∞-Mannigfaltigkeit, $f, g: M \to R$ differenzierbar, f eine verallgemeinerte Morse-Funktion (nur nicht-deg. kritische Untermannigfaltigkeiten) und $\bar{g} := g | K(f)$ eine Morse-Funktion. Dann ist für kleine $\partial > o$ $f_\partial := f + \partial g$ eine Morse-Funktion, und es gibt eine bijektive Abbildung $k_\partial : K(\bar{g}) \to K(f_\partial)$ mit $i_{f_\partial} \circ k_\partial = i_f + i_{\bar{g}}$.

ANWENDUNG: Aus einem Unverknotetheitssatz des Verfassers und aus Resultaten von BRIESKORN u.a. folgt mit obigem Satz:

Ist $S \in bP_{4n+2}$ $(n \geq 1)$ und setzt man $\tau(S,2) := \inf\{K(f) | F: S \to R^{4n+3}$ Einbettung und $f = F_1\}$ so gilt $\tau(S,2) = 2.$ Ordnung von S in bP_{4n+2}.

HALIN, R.: n-fach zusammenhängende Graphen

Nach einer kurzenEinführung in die Theorie der n-fach zusammenhängenden Graphen wird der folgende Satz bewiesen:

Jeder endliche n-fach zusammenhängende Graph, der nach Streichung einer beliebigen Kante (n-1)-trennbar wird, besitzt eine Ecke n-ten Grades.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

HENKE, W.: Tensorprodukte von C^*-Algebren

Seien A_1, A_2 C^*-Algebren. Dann ist $A_1 \otimes A_2$, das algebraische Tensorprodukt von A_1 und A_2, zunächst in kanonischer Weise eine $\mathbb{C}$-Algebra mit Involution. Betrachtet werden sogenannte verträgliche (compatible) Normen auf $A_1 \otimes A_2$, das sind Normen $\| \ \|$ auf der $\mathbb{C}$-Algebra $A_1 \otimes A_2$ derart, daß

1) Die Vervollständigung von $A_1 \otimes A_2$ bzl. $\| \ \|$ ist in kanonischer Weise eine C^*-Algebra,
2) $\| \ \|$ ist Kreuz-Norm (cross-norm), d.h. $\|a_1 \otimes a_2\| = \|a_1\| \cdot \|a_2\|$ für $a_i \in A_i$.

Es existiert stets eine kleinste verträgliche Norm $\| \ \|_*$ und eine größte verträgliche Norm $\| \ \|_v$ auf $A_1 \otimes A_2$. Die Vervollständigung von $A_1 \otimes A_2$ bzgl. Schatten's Kreuz-Norm $\| \ \|_\gamma$ auf $A_1 \otimes A_2$ ist in kanonischer Weise eine $\mathbb{C}$-Banach-Algebra mit isometrischer Involution und mit Fasteins, deren einhüllende C^*-Algebra im Sinne von Dixmier die Vervollständigung von $A_1 \otimes A_2$ bzgl. $\| \ \|_v$ ist. Schatten's Kreuz-Norm $\| \ \|_\lambda$ auf $A_1 \otimes A_2$ ist genau dann eine verträgliche Norm, wenn wenigstens eine der Algebren A_1, A_2 kommutativ ist.

KREKEL, D.: Zu einem Koexistenzproblem bei der Laméschen Differentialgleichung

Es wurde untersucht, für welche Parameterpaare (n,h) zwei linear unabhängige periodische Lösungen der Differentialgleichung

$$(1-k^2\cos^2 x)\,u'' + k^2 \sin x \cos x\, u' + (h - n(n+1)k^2\cos^2 x)\,u = o \qquad (o<k<1)$$

koexistieren.

Zu natürlichem n gibt es eine Schranke K, so daß die Existenz einer periodischen Lösung zu einem charakteristischen Wert h genau dann hinreichend für die Koexistenz ist, wenn $h \geq K$ ist.

MÜLLER, G. N.: Quadratische Formen

Die Clifford-Algebra liefert nicht nur einen Funktor C von der Kategorie der "Quadratischen R-Moduln" in die Kategorie der "Z_2-graduierten R-Algebren", sondern auch einen Homomorphismus C von der "Witt-Gruppe" W(K) eines Körpers K (char(K) $\neq$ 2) in die von C.T.C. Wall eingeführte "Z_2-graduierte Brauer-Gruppe". Für das homomorphe Bild C(W(K)) ergibt sich:

C(W(K)) ist eine 2-Gruppe vom Exponenten e (a) $e = 2$ (b) $e = 4$ (c) $e = 8$ dann und nur dann, falls der Körper K die Stufe s(K) (a) $s = 1$ (b) $s = 2$ (c) $s \geq 4$ (bzw. formalreell) besitzt.

Für den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (bzw. komplexen Zahlen $\mathbb{C}$) gilt:

$C(W(\mathbb{R}))$ (bzw. $C(W(\mathbb{C}))$ ist isomorph zur zyklischen Gruppe der Ordnung 8 (bzw. 2). Dies ergibt eine algebraische Interpretierung und Verallgemeinerung der "Bott-Periodizität". Die Struktur dieser Gruppen läßt sich leicht z.B. für die p-adischen Zahlkörper $\mathbb{Q}_p$ bestimmen.

NIESSEN, H.-D.: Zum Satz vom abgeschlossenen Graphen

Es wurden einige Sätze vom abgeschlossenen Graphen für nichtlineare Relationen bewiesen, u.a.

SATZ: Sei f eine gleichmäßig faststetige Relation eines metrischen Raumes in einen vollständigen metrischen Raum. Dann ist f gleichmäßig stetig, wenn der Graph von f abgeschlossen ist.

Dabei heißt die Relation f des uniformen Raumes E (mit der Uniformität $\mathfrak{U}$) in den uniformen Raum F (mit der Uniformität $\mathfrak{V}$) gleichmäßig faststetig, wenn zu jedem $V \in \mathfrak{V}$ ein $U \in \mathfrak{U}$ existiert derart, daß für jedes y aus dem Wertebereich von f

$$U(f^{-1}(y)) \subset \overline{f^{-1}(V(y))}. \quad (U(A) := \bigcup_{x \in A} U(x) \quad (A \subset E)).$$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Dieser Satz verallgemeinert die Banach'schen Sätze vom abgeschlossenen Graphen und von der offenen Abbildung. Dazu beachte man, daß jede lineare Abbildung eines tonnelierten Raumes in einen lokalkonvexen Raum gleichmäßig faststetig ist.

PLEWE, K.: Zerlegungstypen von Moduln

Eine direkte Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ eines R-Linksmoduls heiße

(a) hyperdirekt, wenn für jeden Untermodul $L \subset M$ stets
$L = \bigoplus_{i \in I} (L \cap M_i)$ gilt,

(b) zweiseitig, wenn $M_i \cdot \mathrm{End}\, M \subset M_i$ für alle $i \in I$ gilt.

Während eine hyperdirekte Zerlegung stets zweiseitig ist, wird an einem Beispiel gezeigt, daß die Umkehrung dieser Aussage i.a. falsch ist:

$$\mathbb{Z}^M = \left\{ \frac{a}{p^i} \in \mathbb{Q} \,/\, i \in \mathbb{N} \cup \{o\} \right\} \oplus \left\{ \frac{a}{q^i} \in \mathbb{Q} \,/\, i \in \mathbb{N} \cup \{o\} \right\};$$

hierbei seien p, q zwei verschiedene Primzahlen. Ferner werden Moduln angegeben, welche zwar eine hyperdirekte Zerlegung in hyperdirekt unzerlegbare Komponenten besitzen, eine solche zweiseitige jedoch nicht. Schließlich werden Moduln ohne hyperdirekte Zerlegung in hyperdirekt unzerlegbare Komponenten konstruiert.

SCHÄFKE, F.W.: Integrationstheorie

Es wird der Aufbau einer Integrationstheorie skizziert, die einerseits alle wichtigen Integralbegriffe und deren Eigenschaften liefert und andererseits so einfach ist, daß sie selbst für die Spezialfälle noch wesentliche methodische Vorteile bietet.

1. Prinzip der Integralerweiterung.

Seien $\mathfrak{R} \neq \emptyset$; $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ B-Räume; $\mathfrak{F} = \{ f: \mathfrak{R} \to \mathfrak{B}_1 \}$; $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{E}$ Unterraum und $i: \mathfrak{E} \to \mathfrak{B}_2$ lineare Abbildung ("einfache Funktionen" bzw. "elementares Integral"). Dann wird $\| \;\|$ als "Integralnorm" bezeichnet, wenn

(1) $\| \;\|: \mathfrak{F} \to [o, \infty]$,

(2) $\| \alpha f \| = |\alpha| \, \| f \| \quad (o \cdot \infty = o)$,

(3) $|f(x)| \leq \sum_{v=1}^{n} |f_v(x)| \quad (x \in \mathfrak{R}) \leadsto \|f\| \leq \sum_{v=1}^{n} \|f_v\|$,

(4) $|i(f)| \leq \|f\| \quad (f \in \mathfrak{E})$. $\| \;\|$ ist Pseudonorm und erzeugt eine Pseudometrik für $\mathfrak{F}$. Ist dann $I = \bar{\mathfrak{E}}$, so gibt es auf I genau eine Fortsetzung $\bar{i}$ von i, die linear ist und $\| \bar{i}(f) \| \leq \|f\| \quad (f \in I)$ erfüllt. ("Integrable Funktionen", "Integralerweiterung").

Auf diesem Grundgedanken aufbauend werden weiter behandelt:

2. Starke Integralnormen
3. Halbadditivität
4. Konstruktion von Integralnormen
5. Mengen mit Inhalt. Meßbare Mengen
6. Einfache Funktionen auf Semiringen
7. Klassische Maße.

SCHMIDT, D.: <u>Biorthogonalentwicklungen FLOQUETscher Lösungen der HEUNschen Differentialgleichung nach hypergeometrischen Funktionen</u>

Zunächst wurde ein Entwicklungssatz analytischer Funktionen nach dem speziellen Biorthogonalsystem hypergeometrischer Funktionen

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(z) = z^{\xi+n} \, {}_2F_1(-\xi-n,\ 1-\gamma-\xi-n;\ 2-\gamma-\delta-2\xi-2n;\ \frac{1}{z}) \\ u_n^*(z) = z^{1-\gamma-\delta-\xi-n} \, {}_2F_1(\delta+\xi+n,\ \gamma+\delta-1+\xi+n;\ \gamma+\delta+2\xi+2n;\ \frac{1}{z}) \end{array} \right. \quad (n \in \mathbb{Z})$$

bewiesen. Das Entwicklungsgebiet ist durch $\{z \in \mathbb{C} : z \notin [o, 1]\}$ gegeben. Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf einen allgemeinen

Entwicklungssatz von E. MENNICKEN und A. SATTLER, Math. Z., Bd. 93, 1966.

Mit Hilfe des gewonnenen Entwicklungssatzes wurden die multiplikativen (FLOQUETschen) Lösungen der HEUNschen Differentialgleichung

$$(z-a)(z-1)z\{Y''+(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{\epsilon}{z-a})Y'\}+(\alpha\beta z+p)Y=o$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, p \in \mathbb{C}$, $\alpha+\beta+1 = \gamma+\delta+\epsilon$ und $a \in \mathbb{C}$, $a \notin [o,1]$

im Gebiet

$$\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{1-(1-{}^{1}/_{a})^{1/2}}{1+(1-{}^{1}/_{a})^{1/2}}\right| < \left|\frac{1-(1-{}^{1}/_{z})^{1/2}}{1+(1-{}^{1}/_{z})^{1/2}}\right| < 1\}$$

untersucht.

Im Hinblick auf die HEUNsche Differentialgleichung stellen die vorgetragenen Resultate eine Verallgemeinerung der von A. ERDELYI in Quart. J. Math. Oxford Ser. 15, 1944 betrachteten Entwicklungen dar.

SCHÖNHAGE, A.: <u>Schranken für Polynomableitungen</u>

w_o sei stetig und $>o$ über $[a,b]$,

$P_n(w_o)$ = Menge aller reellen Polynome f vom Grade $\leq n$ mit $|f(x)| \leq w_o(x)$ für $a \leq x \leq b$.

$w_k(z) = \max\limits_{f \in P_n(w_o)} |f^{(k)}(z)|$ ist dann stetig für $k = 1,2,\ldots$

In Verallgemeinerung des von Markoff behandelten Spezialfalls $w_o(x) = 1$ erhält man:

(1) Die extremalpolynome, d.h. die $f \in P_n(w_o)$ mit $|f^{(k)}(z)| = w_k(z)$ an einer Stelle z, sind genau die zu w_o gehörigen verallgemeinerten Solotareffpolynome; diese sind eindeutig bestimmt, wenn w_o differenzierbar und $n \geq 3$ ist.

(2) Die Zuordnung $w_o \mapsto w_k$ gibt einen Operator $M_{n,k}(w_o) = w_k$.

Dafür gilt $M_{n,k_1+k_2}(w) = M_{n-k_2,k_1}(M_{n,k_2}(w))$.

(3) Es gibt Punkte z mit $M_{n-1,k}(w_o)(z) = M_{n-k}(w_o)(z)$.

STENDER, H.-J.: Die Grundeinheit in speziellen reinen kubischen Zahlkörpern

Für die reinen kubischen Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(w)$ mit

(1) $w = \sqrt[3]{D^3+d}$, $d, D > o$ ganz, d/D, $D \geq d$

(2) $w = \sqrt[3]{D^3-d}$, $d, D > o$ ganz, d/D, $D \geq 4d$

(3) $w = \sqrt[3]{D^3+3D}$, $D \geq 2$ ganz

gewinnt man aus einem periodischen Jacobi-Perron-Algorithmus jeweils folgende Einheit ε:

Zu (1): Für $d = 1$: $\varepsilon = w-D$; für $d > 1$: $\varepsilon = \dfrac{(w-D)^3}{d}$

Zu (2): Für $d = 1$: $\varepsilon = D-w$; für $d > 1$: $\varepsilon = \dfrac{(D-w)^3}{d}$

Zu (3): $\varepsilon = \dfrac{(w-D)^3}{3D}$.

Vorgetragen und für den Fall (1) vollständig bewiesen wurde der folgende

SATZ:

Für $\begin{cases} D = 3, & d = 1 \\ D = d = 2 \end{cases}$ ist ε Quadrat der Grundeinheit $\eta = \begin{cases} \frac{1}{3}(-1-w+\frac{w^2}{2}) \\ \frac{1}{3}(-7-w+2w^2) \end{cases}$ in K.

In allen anderen Fällen ist ε selbst Grundeinheit in K.

VOLKENBORN, A.: Zur nicht-archimedischen Funktionentheorie

Viele Aussagen der klassischen Funktionentheorie für Laurent-Reihen lassen sich auf nicht-archimedisch bewertete vollständige

algebraisch abgeschlossene Körper K übertragen. Man erhält aber z. T. von der klassischen Theorie abweichende Ergebnisse.

Z.B. hat eine Laurent-Reihe

$$o \neq f = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i X^i \qquad (a_i \in K),$$

die auf der Sphäre $\{x \in K \mid |x| = r > o\}$ konvergiert, d.h. für die $\lim_{|i| \to \infty} |a_i| r^i = o$ gilt, genau

$$\max_j \{j \in \mathbb{Z} \mid |a_j| r^j = \max_i \{|a_i| r^i\}\} - \min_j \{j \in \mathbb{Z} \mid |a_j| r^j = \max_i \{|a_i| r^i\}\}$$

viele Nullstellen vom Betrage r (mehrfache mehrfach gezählt).

Hiermit kann man die Anzahl der Nullstellen einer Laurent-Reihe in einem Kreisring bestimmen.

Als wesentliches Hilfsmittel erweist sich das für Potenzreihen bekannte Lemma von Hensel, dan man hierzu auf Laurent-Reihen erweitern muß.

WIECHERT, W.: <u>Bilineare Integration</u>

Es wird eine Integrationstheorie unter folgenden Voraussetzungen gegeben:

X, Z B-Räume, Y linearer Raum, auf $X \times Y$ eine bilineare Abbildung mit Werten in Z. R eine nicht leere Menge, $\mathbb{R}$ ein Ring von Mengen aus R, $\mu: \mathbb{R} \to Y$ additiv.

Für eine einfache Funktion $f: R \to X$ werden Integral und Integralnorm gebildet, mit Hilfe der auf alle Mengen von R ausgedehnten Goweerin' schen Semivariation wird Konvergenz dem Maße nach definiert. Eine Funktion $f: R \to X$ heißt integrabel, wenn es einfache Funktionen gibt, die der Integralnorm nach C-konvergent sind und die dem Maße nach gegen f konvergieren. Es gelten Konvergenz-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

sätze (Vitali, Lebesgue), wenn man unter Approximation die Konvergenz dem Maße nach versteht.

Wird $x\mu$ für alle $x \in X$ als σ-additiv vorausgesetzt, so erhält man Vollständigkeit der integrablen Funktionen und Satz von Levi. Mit dem Satz von Egoroff zeigt man, daß "Halbadditivität der Semivariation bzgl. $\mathbb{R}$" notwendig und hinreichend ist für die Sätze von Vitali und Lebesgue.

WOLF, F.: Ein Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen

Analog zum "Außenraumadditionstheorem" von F.W. Schäfke (M.Z. 58, 1953) wird eine Formel für den "Innenraum" hergeleitet, die eine Verallgemeinerung auf komplexe Parameter der Formel von Saermark (ZAMD 10, 1959) sowie eine Berichtigung des Gültigkeitsbereichs bringt.

Betrachten wir aus

$$e^{\pm i\alpha} c_o \cosh(z_o \pm it_o) = \rho\, e^{\pm i\psi} + c \cosh(z \pm it)$$

die Funktionen z_o, t_o in $\mathfrak{B} = \{(z,t) \mid |\Re n(z \pm it)| < A^{\pm}\}$ mit optimalen A^+ und A^-, wobei

$$|\rho|\, e^{\pm \Im m\, \psi} > |c_o|\, e^{\pm \Im m\, \alpha} + |c|$$

erfüllt sei, dann gilt in $\mathfrak{B}$ für zu o und 1 normale Werte h^2 das Additionstheorem für $j = 1,2,3,4$ und $h_o = \frac{k.c_o}{2}$ bzw. $h = \frac{kc}{2}$:

$$M_\gamma^{(j)}(z_o;h_o)\, me_\gamma(t_o;h_o^2) = B_{\gamma,o}^{(j)} M_o^{(1)}(z;h)\, me_o(t;h^2) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \{B_{\gamma,m}^{(j)} M_m^{(1)}(z;h)\, me_m(t;h^2) +$$
$$+ B_{\gamma,-m}^{(j)} M_{-m}^{(1)}(z;h)\, me_{-m}(t;h^2)\}$$

mit den absolut konvergenten Reihen

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$B^{(j)}_{\nu,m} = \sum_{c,\,s=-\infty}^{\infty} c^{\gamma}_{2s}(h_o^2)\, e^{-i(\nu+2s)\alpha}\, c^{m}_{2(s-e)}(h^2)\,(-1)^{e}\, z^{(j)}_{\nu+2l-m}(h_\rho)\, e^{i(\nu+2l-m)\vartheta}$$

H. D. Nießen (Köln)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft