Mathematisches Forschungsinstitut

Oberwolfach

Tagungsbericht 6/68

Ringe und Moduln

4. bis 9. März 1968

Unter der Leitung der Herren Professoren Dr. F. Kasch (Universität München) und Dr. A. Rosenberg (Cornell University, Ithaca) fand im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach in der Woche vom 4. bis 9. März 1968 eine Tagung über Ringe und Moduln statt. Neben dem reichen Vortragsprogramm kam es zu zahlreichen persönlichen Kontakten und wissenschaftlichen Gesprächen unter den Teilnehmern. Besonders erfreulich war das große Interesse, das die Tagung international gefunden hat und das dazu führte, daß sich Wissenschaftler aus sehr vielen Ländern bei der Tagung zusammenfanden.

Teilnehmer

Bass, H., New York
Baumgartner, K., Giessen
Betsch, G., Tübingen
Chase, St., Ithaca
Divinsky, N., Vancouver
Eckstein, F., Münster
Fields, K., Berkely
Fried, E., Budapest
Fröhlich, A., London
Ginn, S., Leeds
Goldie, A., Leeds
Gwynne, D., Leeds
Hoobler, R., New York
Hart, R., Leeds
Harrison, D., Eugene
Hauger, G., Ulm
Holcombe, I., Leeds
Kasch, F., München
Kertesz, A., Debrecen
Kupisch, D., Saarbrücken
van Leeuwen, Delft
Lenzing, H., Berlin

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

McConnell, I., Leeds
Michler, G., Tübingen
Müller, B., Hamilton
Nöbauer, D., Wien
Onodera, T., München
Osofsky, B., New Brunswick
Pareigis, B., München
Plewe, K., Köln
Rentschler, R., Strasbourg
Rim, D., Philadelphia
Robson, I.C. Leeds
Rosenberg, A., Ithaca
Small, L., Berkeley
Smith, P., Leeds
Smits, Th.H.M., Delft
Stephenson, W., London
Stroker, J., Utrecht
Taft, E., Princeton
Villamayor, O.,(Montpellier)Buenos Aires
Wallace, D., Aberdeen
Webber, D., Leeds
Würfel, T., München
Zelinsky, D., Evanston
Zimmermann, W., München

Vortragsauszüge

BASS, H.: Reciprocity laws over Dedekind rings

Let A be a Dedekind ring and let $G = SL_n(A)$ with $n \geq 3$. One can ask for a classification of all subgroups of G. The main theorem is that this problem is equivalent to the determination of all "reciprocity laws" on A. The latter are defined axiomatically for an arbitrary Dedekind ring A, but the definition encompasses, for example, the classical power reciprocity laws in number fields as well as certain geometric reciprocity laws on algebraic curves. Moreover, the main theorem can be used to establish the existence of some non-classical reciprocity laws on curves, in contrast with the case of number fields, where they are all classical.

CHASE, S.U.: Hopf-Algebras and Galoistheory

A Galoistheory of commutative R-algebras S with 1 is developed, in which the role of the finite group of automorphisms of the clas-

Gefördert durch
Deutsche
Forschungsgemeinschaft

sical theory is played by a commutative Hopf algebra A with antipode, which is a finitely generated projective R-module. A weak form of the fundamental theorem of Galois theory holds in the sense that there is a one - one lattice inverting correspondence between Hopf subalgebras of the dual of A (satisfying a mild condition) and certain subalgebras of S. For the case in which A is both commutative and cocommutative, the set of isomorphism classes of Galois A-objects is made into an abelian Group X(A) and one obtains, via sheaf theory, a cohomological description of X(A), which generalizes work of Hasse and his students on Galois algebras and a theorem of D.K. Harrison. For the case of a field k the theory provides a description of the abelian extensions of k, of exponent prime to the characteristic of k, in terms of cyclotomic extensions.

DIVINSKY, N.: Radicals and chains

It is known that the construction of the lower radical property for associative rings terminates at ω_o, the first limit ordinal, for alternative rings it terminates at ω_o^2.

Rjabuchin has recently shown that it does not terminate at any given ordinal for nonassociative rings in general. For hereditary classes of associative rings it terminates at $n = 3$. An example was given which shows that the construction for associative rings may not terminate untin ω_o and thus the theorem of termination at ω_o is the best possible.

ECKSTEIN, F.: Halbgruppenmethoden in der Ringtheorie

Im ersten Teil wurde über das Hochheben von Idempotenten modulo dem Radikal gesprochen. Es wurde gezeigt, daß die Existenz von Idempotenten gleichbedeutend ist mit der Existenz eines minimalen

Ideals in gewissen in natürlicher Weise gegebenen Halbgruppen. Dies wurde im zweiten Teil ausgenützt, um den Malcev'schen Satz über die Konjugiertheit von Komplementen des Radikals zu beweisen.

FRIED, E. Präideale in Moduln

Ist S ein kommutativer Ring und $\underline{M}$ ein S-Modul, so heißt $\underline{N} \subset \underline{M}$ ein Präideal, falls $\underline{N}$ für jede Ringstruktur auf $\underline{M}$ ein Ideal ist. Aus der Kenntnis der Präideale kann man auf die Struktur des Ringes schließen. So kann man die Klasse derjenigen Ringe (auf $\underline{M}$) untersuchen, für die

a) jeder Untermodul Präideal ist,
b) nur die vollinvarianten Untermoduln Präideale sind,
c) nur die trivialen Untermoduln Präideale sind.

FRÖHLICH, A.: Hermitian forms

These are defined over a ring R with involution $x \to \bar{x}$ (not necc. commutative) plus a slight generalization "λ-Hermitian forms" where λ is an element of the center and $\lambda\bar{\lambda} = 1$.

1) Such a non-singular form defines an involution on the endomorphism ring E of the underlying module V. This one can use
   (i) to describe the orthogonal splitting of V,
   (ii) to classify the isometry classes of formes on V.
2) If h is a λ-Hermitian form over R on a module ${}_RV$, and k is a μ-Hermitian form over another ring S, with involution, on a module ${}_SU_R$ (where R, S are C-algebras, C a commutative ring and $\lambda, \mu \in C$), we define a product (subject to obvious conditions) $k \cdot h$, a $\lambda \cdot \mu$-Hermitian form. This is applied
   (i) to "Hermitian" Morita-theory,
   (ii) to the definition of pairings of Witt groups.

GOLDIE, A.W.: Quotient Rings

A very short proof was given of the theorem that a semiprime ring with right quotient conditions has a semi-simple quotient ring. The proof is obtained by considering the intersection of an arbitrary essential right ideal with those of the form $a^n R \oplus r(a^n)$, (the latter type was shown to be essential). Some ideas were considered for studying quotient rings in general. Thus for any subset S of a ring a transfer ideal T of S has the property $S+T = S$ and a unique maximal transfer ideal of S exists. If S is the group of units, then T is the Jacobson Radical. We take $S = \mathfrak{C}(o)$ the set of regular elements of the ring and suppose that H is the largest transfer ideal of $\mathfrak{C}(o)$. In commutative rings, H is a semiprime ideal being the intersection of the maximal primes in a normal primary decomposition of (o). In general if R has maximum condition and a right quotient ring Q, then H is a semi-prime ideal, HQ = Jacobson-Radical of Q, and $\mathfrak{C}(o) \subseteq \mathfrak{C}(H)$. Equality occurs in the latter if Q/J is a semi-simple (artinian) ring. The reasonable possibility occurs that $\mathfrak{C}(o) = \mathfrak{C}(H)$ will give a sufficient condition for a quotient ring to exist, but the obvious method works only when $H = N$ (the nil radical).

HARRISON, D.K.: An Arithmetic for rings

Purely ideal theoretic methods seem limited for certain problems for rings. For R a ring with 1, a prime is defined as a maximal non-empty subset, closed under $+, \cdot$ and not containing 1. Certain commutativity theorems are given. A method is given for going from a commutative ring with prime to a field with prime. A "completion" is given for a commutative ring at a prime. Given a ring complete at a prime a calculation is given for when a quadratic form represents an element in that ring.

HAUGER, G.: Präradikale und verallgemeinerte Torsionstheorien

Einem Präradikal (Unterfunktor des identischen Funktors) wird der Kern als Klasse von Morphismen zugeordnet. Die so auftretenden Morphismenklassen wurden charakteresiert und der Zusammenhang zu Torsionstheorien im Sinne von Dickson aufgezeigt.

HOOBLER, R.: A Cohomological Interpretation of the Brauer Group

The main theorem is: For a noetherian ring R of positive charakteristic or containung Q, $Br(R) \simeq H^2(R_f, \underline{G}_m)$ where $H^2(R_f, \underline{G}_m)$ is the $2^{\underline{nd}}$ cohomology group of Spec(R) with coefficients in the sheaf of units taken in the grothendieck topology on Spec(R) where coverings are {Spec(S) → Spec(R)}, S a finite, faithfully flat R-algebra. Immediate corollaries are the exact sequence of Chase-Rosenberg and the isomorphism $Br(R) \to Br(R/\mathfrak{n})$, $\mathfrak{n}$ = nilradical of R. The proof is broken into two parts:

1) If Λ is an Azumaya algebra over R, then there exists a finite, faithfully flat R-algebra such that $[\Lambda \otimes_R S] = o$ in Br(S).
2) $H^2(R_f, \underline{G}_m)$ is isomorphic to $\lim\{Ker(Br(R) \to Br(S)) \mid S$ a finite faithfully flat R-algebra$\}$.

KERTESZ, A.: Offene Fragen der Ringtheorie

KUPISCH, H.: Unzerlegbare Moduln endlicher Gruppen mit zyklischer p-Sylowgruppe

Über einem Gruppenring KG, wobei G eine endliche Gruppe mit zyklischer p-Sylowgruppe und K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p ist, werden die endlich dimensionalen, unzerlegbaren, nicht projektiven Moduln charakteresiert und deren Anzahl mit Hilfe der Cartan-Invarianten bestimmt.

LENZING, H.: Direkte Produkte von freien Moduln

Sei A ein Ring mit Einselement, der kommutativ ist, oder dessen Jacobsonradikal J als Rechtsideal endlich erzeugt ist. Dann sind äquivalent:

(1) Jedes Produkt von freien A-Linksmoduln ist frei.

(2) A ist linksperfekt und der A-Linksmodul $A^{\mathbb{N}}$ ist frei.

(3) A ist rechtsartinsch (somit A/J Produkt von einfachen Ringen A_i, $i = 1, \ldots, n$,) und es gilt $\mathrm{card}(A_1)^{\aleph_0} = \ldots = \mathrm{card}(A_n)^{\aleph_0}$.

MICHLER, G.: Semiperfect, hereditary orders in semisimple rings

In order to determine the structure of the semiperfect, hereditary orders in a semisimple ring, it is enough to determine the structure of the semiperfect, hereditary, noetherian prime rings by a theorem of Levy.

The structure of such a prime ring is given by

THEOREM: The ring R is a semiperfect, hereditary, noetherian prime ring if and only if

$$R \simeq \begin{pmatrix} D(m_1 \times m_1) & M(m_1 \times m_2) & \cdots & M(m_1 \times m_k) \\ D(m_2 \times m_1) & D(m_2 \times m_2) & \ddots & M(m_2 \times m_k) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & M(m_{k-1} \times m_k) \\ D(m_k \times m_1) & \cdots & \cdots & D(m_k \times m_k) \end{pmatrix}$$

where D is a (not necessarily commutative) discrete rank one valuation ring with maximal ideal M, and where $D(m_i \times m_j)$ resp. $M(m_i \times m_j)$ denotes all $m_i \times m_j$ matrices over D resp. M. Furthermore the numbers k and m_i are uniquely determined by R.

COROLLARY: Each proper epimorphic image of a noetherian, hereditary, semiperfect ring is artinian.

MORITA, E.: Ein Satz über Frobeniuserweiterungen

Da Prof. Morita leider nicht wie beabsichtigt an der Tagung teilnehmen konnte, teilte Dr. Pareigis den Inhalt des vorgesehenen Vortrags mit:

SATZ: Ist A eine Frobeniuserweiterung von B (A und B Ringe mit Einselement), so ist A eine Frobeniuserweiterung von L für jeden Unterring L von A, derart, daß

$$B_o \subset L \subset B' .$$

Dabei sind B' und B_o folgendermaßen definiert:

B' ist der Bikommutator von A_B, B_o ist der Unterring von B, der vom Einselement von B und allen Elementen der Form $f(a)$, $a \in A$, $f \in \mathrm{Hom}(A_B, B_B)$, erzeugt wird.

Es gibt Beispiele, bei denen $B_o \underset{\neq}{\subset} B \underset{\neq}{\subset} B'$.

MÜLLER, B.J.: Über Morita-Dualität

Eine kovariante Äquivalenz (Dualität) von Kategorien von S-, R-Moduln ist, falls die Kategorien hinreichend groß sind, stets äquivalent zu einem Funktor $\mathrm{Hom}(-, U)$ mit einem Bimodul ${}_SU_R$ mit den Eigenschaften, daß ${}_SU$, U_R injektive Kogeneratoren sind und daß S, R die Endomorphismenringe von U_R, ${}_SU$ sind.

Es geht um die Frage, für welche Ringe R solche Dualitäten existieren. Notwendig dafür ist, daß R semiperfekt ist (Osofsky) sowie, daß U_R endliche direkte Summe aller Isomorphietypen injektiver Hüllen einfacher R-Moduln und S der Endomorphismenring von U_R sind.

Unter diesen Annahmen existiert dann eine Dualität, falls

1. ${}_SU$ injektiver Kogenerator ist,

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

2. U_R die Bikommutatorbedingung erfüllt. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn R vollständig in einer gewissen uniformen Struktur ist, die von den vollständig verbindungsirreduziblen Idealen erzeugt wird und auch mittels der üblichen endlichen Topologie von Endomorphismenringen beschrieben werden kann. Vollständigkeit in dieser Uniformität ist für beliebige Ringe notwendig und hinreichend dafür, daß alle Kogeneratoren die Bikommutatorbedingung erfüllen. Ferner wurde eine gewisse Erweiterung der bekannten Dualität für vollständige kommutative lokale noethersche Ringe und eine Methode zur Konstruktion von Beispielen behandelt.

NÖBAUER, W.: <u>Über die Kompositionsoperation in Polynom- und Potenzreihenringen</u>

Es sei R der Polynomring in einer Unbestimmten über einem kommutativen Ring r mit Einselement. Neben der Addition und Multiplikation hat man in R eine weitere natürliche zweistellige Operation, die Komposition. Es wurde ein Überblick über verschiedene in Zusammenhang mit dieser Operation stehende Untersuchungen gegeben. Diese beziehen sich auf folgende Fragen:

Eindeutigkeit der Darstellung eines Polynoms als Kompositum von bezüglich Komposition unzerlegbaren Polynomen. Vertauschbarkeit von Polynomen bezüglich Komposition. Ideale von R, deren Kongruenzrelation mit der Komposition verträglich ist. Auch im Ring aller formalen Potenzreihen in einer Unbestimmten über r ohne konstantes Glied ist die Komposition eine zweistellige Operation, und man kann die im Polynomring behandelten Fragen auch hier betrachten.

ONODERA, T.: <u>Über Kogeneratoren</u>

SATZ: Für einen Ring R mit Einselement sind folgende Bedingungen

äquivalent:

(1) R ist zweiseitiger Kogenerator (d.h. ${}_R R$ und R_R sind Kogeneratoren).

(2) Jeder endlich erzeugte Links- und Rechts-R-Modul ist torsionslos.

(3) Jeder endlich erzeugte Links- und Rechts-R-Modul ist reflexiv.

(4) Jeder treue Links- und Rechts-R-Modul ist Generator.

(5) R ist S-Ring (d.h. $r(\ell) \neq o$, $l(r) \neq o$ für jedes echte Linksideal ℓ und jedes echte Rechtsideal r von R) und ${}_R R$, R_R sind injektiv.

(6) $(R)_2$ (der zweidimensionale vollständige Matrizenring über R) ist abgeschlossen (d.h. $l(r(\ell)) = \ell$, $r(l(r)) = r$ für jedes Linksideal ℓ und jedes Rechtsideal r von $(R)_2$).

OSOFSKY, B.L.: Cardinality and Homological Dimension

A lemma of Auslander is used to calculate an upper bound on the homological dimension of some modules associated with a cardinal $\aleph_k$, $k \in \omega$.

THEOREM: Let R be a right $\aleph_k$-noetherian ring. Then every flat R-module is a directed union of $\aleph_k$-generated flat submodules and r.gl.d(R) $\leq$ w.gl.d.(R) + k + 1.

THEOREM: Let M be a direct limit of modules of homological dimension $\leq n$. If the directing set has cordinality $\aleph_k$, then hd(M) $\leq n + k + 1$.

THEOREM: Let M be a well-ordered union of cyclic free modules, with indexing ordinal Ω_k. Then hd(M) = k + 1.

THEOREM: Let Q be the quotient field of $R = F[x_1, \ldots, x_n]$, where F is a field of cardinality $\aleph_k$. Then $hd_R(Q) = \min(n, k+1)$.

This last theorem gives an algebraic statement equivalent to the continuum hypothesis if $n \geq 3$ and F= the field of real numbers.

PAREIGIS, B.: Kohomologie endlich erzeugter, abelscher Gruppen

Die Homologie- und Kohomologiegruppen einer endlich erzeugten abelschen Gruppe mit Koeffizienten in einem trivialen endlich erzeugten Modul über dieser Gruppe werden explizit berechnet. Die Multiplikation zwischen den Erzeugenden der Kohomologiegruppen wird angegeben. Dadurch ist die Algebrenstruktur vollständig bestimmt. Es stellt sich heraus, daß die Kohomologie (und auch die Homologie) einer endlich erzeugten, abelschen Gruppe ein vollständiges Invariantensystem dieser Gruppe enthält. Bei endlichen (nicht notwendig abelschen) Gruppen mit periodischer Kohomologie sind die Kohomologiegruppen in Abhängigkeit vom Koeffizientenmodul von beschränkter Ordnung. Es stellt sich heraus, daß diese Eigenschaft charakteristisch für periodische Kohomologie ist. Dieser Satz wurde ursprünglich von F. Kasch vermutet.

PLEWE, K.: Über gewisse Typen direkter Zerlegungen von Moduln

Sei R ein Ring mit Einselement, M ein unitärer R-Linksmodul. Es sollen zwei Typen von direkten Zerlegungen $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ betrachtet werden:

(1) Die obige Zerlegung heiße zweiseitig, wenn jeder der Untermoduln M_i durch sämtliche Endomorphismen von M in sich abgebildet wird.

(2) Die obige Zerlegung heiße hyperdirekt, wenn für jeden Untermodul L von M gilt $L = \bigoplus_{i \in I} (L \cap M_i)$.

Es lassen sich Klassen von Moduln angeben, welche genau eine zweiseitige (bzw. hyperdirekte) Zerlegung mit zweiseitig (bzw. hyperdirekt) unzerlegbaren Komponenten besitzen. Jede hyperdirekte Zerlegung ist zweiseitig, aber nicht umgekehrt. Die untersuchten Begriffsbildungen verallgemeinern verschiedene in Spezialfällen be-

kannte Arten von direkten Zerlegungen, u.a. die Blockzerlegung von Artinschen Ringen.

RENTSCHLER, R.: <u>Über die Dimension von Ringen und geordneten Mengen</u>

Jeder geordneten Menge E wird eine ganze Zahl $\geq o$ oder $+\infty$ oder $-\infty$ als Dimension zugeordnet.

DEFINITION: dim E = $-\infty$, wenn E diskret (d.h. $a \leq b \Longrightarrow a = b$)

= o, wenn E artinsch (d.h. jede echt absteigende Folge ist endlich) aber E nicht diskret

= n, wenn dim E $\not\leq$ n-1 und wenn jede absteigende Folge $a_1 > a_2 > \ldots$ mit $\dim\{x \mid a_{i+1} \leq x \leq a_i\} \not\leq n-1$ nach endlich vielen Schritten abbricht,

= $+\infty$, sonst.

Sei M ein Linksmodul über einem Ring R.

DEFINITION: K - dim(M) (Krullsche Dimension von M) := dim der geordneten Menge der Untermoduln von M.

Ist R ein kommutativer noetherscher Ring mit Einselement, so gilt K-dim(R) = Supremum der Längen aller Primidealketten. Die Krullsche Dimension eines speziellen Ringes wird bestimmt. Ist k ein Körper der Charakteristik 0 und bezeichnet $A_n(k)$ die k-Algebra, erzeugt durch Elemente $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ mit den Relationen $[p_i, q_i] = 1$ und $[p_i, q_j] = [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = o$ für $i \neq j$, wobei $[a, b] = ab - ba$, so gilt K - dim$(A_n(k))$ = n.

RIM, D.: Serre sequences and Chern classes

Let X be a noetherian preschema and Σ a locally free sheaf generated by global sections. It is shown that under a mild condition on X there is $s_1, \dots, s_n$ in $\Gamma(X, \Sigma)$ sich that codim $F(s_\rho, \dots, \rho_n) \geq p$ for all $\rho = 1, 2, \dots, n$ where $F(s_\rho, \dots, \rho_n) =$ $= \{$closed points $x \in X \mid s_p(x), \dots, s_n(x)$ are linearly dependent vectors in $\Sigma(x)\}$ $n = \mathrm{rg}\ \Sigma$. Such a sequence will be called a Serre sequence. It determines a sequence $Z_1(s_1, \dots, s_n) \supset Z_2(s_1, \dots, s_n) \supset \dots \supset Z_n(s_1, \dots, s_n)$ of closed subschemes of X and it is shown to be unique up to a rational equivalence. Further it is shown that $Z_p(s_1, \dots, s_n)$ represents the p-th Chern class of Σ with values in $G_i(x)$.

ROBSON, I.C.: Non-commutative Dedekind rings

There have been many generalisations of the theory of Dedekind domains. This one deals with a right order in a general quotient ring Q. First we ask, when all the fractional twosided R-ideals form a group-R then being an Asano right order. Second we ask, when the fractional right R-ideals form a Brandt groupoid; in the special case, when Q is simple artinian, R is called a right Dedekind prime ring. R is characterized by being a right noetherian right hereditary prime ring which is also a maximal right order. Using this characterisation, we show, that $R \simeq e K_n e$, where $e^2 = e \in K_n$ and K is a domain with the same properties as R.

Many properties of commutative Dedekind demains also hold for these rings. As a consequence one can prove:

(i) A Dedekind prime ring R with $\mathfrak{Z}(R) \neq o$ is a bounded principal ideal ring.

(ii) A right Dedekind primary ring R, which is simple is also a left order in Q.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

SMALL, L.W.: Consequences of finite projective dimension

A well known of Auslander and Buchsbaum concerning noetherian regular rings is generalized. All rings well be commutative with 1.

PROPOSITION: A ring has principal ideals projective if and only if every principal ideal has a finite, finitely generated projective resolution.

DEFINITION: A ring is regular, if every finitely generated ideal has finite finitely generated projective resolution.

THEOREM: A regular ring has principal ideals projective; thus, no nilpotent elements.

COROLLARY: A regular quasilocal ring is a domain.

COROLLARY: A regular quasilocal ring with finitely many idempotents is a finite direct product of domains. The proofs use the notion of Euler characteristic.

SMITS, T.H.: Free products and skew polynomial rings

Let K be a field. Polynomials $\sum_i a^{(i)} x^{(i)}$, $a^{(i)} \in K$, are considered with a skew multiplication

$$x \cdot a = \delta_o(a) + \delta_1(a)\,x + \delta_2(a)\,x^2 + \ldots + \delta_r(a)\,x^r$$

where $\delta_i := K \to K$ are certain mappings.

This ring R appears to be the free product of two fields, or the free product of a field and the direct sum of two fields or the free product of a field and a completely primary ring etc.

If $\delta_o : K \to K$ is zero, then R is a left PID,
If $\delta_o \neq o$, then we have a prime ring.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

STEPHENSON, W.: Lattice isomorphisms and Morita equivalence

STROOKER, J.R.: Multiplicities

A simple yet general definition of multiplicities is given. A sketch of this development is presented and open problems are mentioned.

TAFT, E.J.: Automorphisms and derivations of associative algebras

Let A be an associative algebra over a field F, with radical R, $R^{2^n} \neq o$, $R^{2^{n+1}} = o$, G a group of automorphisms and antiautomorphisms of A, $\mathfrak{L}$ a Liealgebra of derivations of A. A set of sufficient conditions is listed for A to contain a subalgebra so that $A = S+R$, $S \simeq A/R$, $SG = S$. They are $H^1(G, R^{2^i}/\{x \in R^{2^i} \mid [x, S_i] \subset R^{2^{i+1}}\}) = o$, $o \leq i \leq n$, where the automorphisms in G act via their negatives and where $S_o = A$, $S_1, \ldots, S_n$ are G-invariant subalgebras constructed inductively. Then $S = S_{n+1}$ is a solution to the problem.

As a corollary, such an S exists, when the algebraic hull of G is a completely relative algebraic group, or when G is finite of order divisible by characteristic of F. Sufficient conditions for S and T, $A = S+R = T+R$, $S \simeq T \simeq A \mid R$, $SG = S$, $TG = T$ are listed to be conjugate via an element $1-x$, $x \in R$, $1-x$ a fixed point of the automorphisms in G, and inverted by the antiautomorphisms in G. They are $H^1(G, \{x \in R^{2^i} \mid [T, x] \subset R^{2^{i+1}}\} / R^{2^{i+1}}) = o$, $o \leq i \leq n$, and $H^1(G, R^{2^i}) = o$, $1 \leq i \leq n$. The same corollaries hold as before, but the result is also true if G is completely reducible and characteristic $F \neq 2$.

Turning to $\mathfrak{L}$, assume $\mathfrak{L}$ is a completely reducible Liealgebra of derivations of A. Then if characteristic F is o one can write $A = S+R$, $S \simeq A/R$, $S\mathfrak{L} \subset S$. As for uniqueness, we have the following theorem:

Gefördert durch
Deutsche
Forschungsgemeinschaft

Let $A = S+R = T+R$, $S\mathfrak{L} \subset S$, $T\mathfrak{L} \subset T$ and assume $R\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}$, then there exists $z \in R$ such that $zD = o$ for all $D \in \mathfrak{L}$ and S and T are conjugate via $1-z$. For characteristic o, a proof using algebraic groups exists. For characteristic p, an example exists to show, that the condition $R\mathfrak{L} \subset R$ cannot be removed from the hypotheses. Sufficient conditions for uniqueness can also be stated in terms of Liealgebra cohomology of $\mathfrak{L}$.

VILLAMAYOR, O.: An algebraic K-theory

WALLACE, D.A.R.: Residual properties in Group Rings

Let G be a group, let K be a field and let $K(G)$ be the group ring of G over K. Let $JK(G)$ be the Jacobson radical of $K(G)$. G is called residually finite if G has a family $\{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ of normal subgroups of finite indices such that $\bigcap_\lambda H_\lambda$ is trivial. By generalising this notion to a family of subnormal subgroups (possibly subnormal in a transfinite manner) it is possible to extend some of the work of Villamayor (1958, 1959) and Rosen (1966) on JKG.

ZELINSKY, D.: Galois theory with idempotents

Let R and S be commutative rings with 1 and $R \subset S$. Suppose S is finitely generated, projective as an R-module and separable as an R-algebra and further, that $SG = \mathrm{Hom}_R(S,S)$ where G is the group of all algebra automorphisms of S over R (equivalently, some subgroups). In particular the fixed ring under G is R and some finite subgroup of G also has fixed ring R. Then the usual correspondence is 1 - 1 between the set of all separable R-algebras in S and the set of all subgroups H of the full automorphism group G that satisfy: If $\sigma \in G$ and for all I there is a

τ_I in H such that $\sigma = \tau_I$ on S/I, then $\sigma \in H$. Here I is to be an ideal in S generated by a set of idempotents that forms a maximal ideal in the Boolean ring of all idempotents of S. This differs from Chase-Harrison-Rosenberg's Galois theory in two ways:

No restriction is placed on the number of idempotents in R or S, and the algebras in the 1-1 correspondence range over all separable extensions of R. This work is joint wort with Villamayor. The theorem was improved during the conference.

F. Kasch (München)