Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 7/1968

Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie
10. bis 16.3.1968

Unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. D. BIERLEIN fand nach knapp einem Jahr in Oberwolfach wieder eine Tagung über Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie statt - die erste im neuen Haus. Obwohl mehr als 40 Mathematiker, darunter 10 ausländische Gaste, teilnahmen, konnten alle im Forschungsinstitut untergebracht werden. Hierdurch ergaben sich noch bessere Kontaktmöglichkeiten als in früheren Jahren.

Die Schwerpunkte der Vorträge lagen auf den Gebieten der Maßtheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie sowie auf dem der theoretischen Statistik. Daneben beschäftigten sich jeweils einige Vorträge mit Optimierungsproblemen und Fragen der Informationstheorie. Wegen der engen Berührungspunkte zwischen den Forschungsgebieten mehrerer Teilnehmer waren die Diskussionen im Anschluß an die Vorträge meist so rege, daß sie anschließend noch privat fortgesetzt werden mußten. Probleme der angewandten Statistik und der Stochastischen Prozesse traten im Vergleich mit früheren Tagungen dagegen etwas in den Hintergrund - wohl aufgrund der zwei Wochen vorher abgehaltenen Tagung über medizinische Statistik bzw. der für den Sommer geplanten Spezialtagungen. Mit 28 Vorträgen, die einen weiten Überblick über die derzeitigen Forschungsziele gaben, war das Programm dennoch sehr reichhaltig.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Die Möglichkeit, die Mittagsstunden zu mit persönlichen und fachlichen Gesprächen angereicherten Wanderungen auszunutzen, wurde von allen Teilnehmern ausgiebig wahrgenommen. Gern erinnern sie sich auch an den durch zwei humorvolle Vorträge mit ernstem mathematischen Hintergrund eingeleiteten geselligen Abend.

Teilnehmer

Arnold, L., Stuttgart
Baumann, W., Köln
Behnen, K., Münster
Bierlein, D., Karlsruhe
Bock, H., Freiburg
Borges, R., Gießen
Dieter, U., Karlsruhe
Drygas, H., Heidelberg
Eberl, W., Wien
Eberl, W., Düsseldorf
Eicker, F., Freiburg
Fieger, W., Karlsruhe
Gänssler, P., Köln
Gebhardt, F., Darmstadt
Gerbers, W., Hannover
Hanš, O., Prag
Heyer, H., Erlangen
Hinderer, K., Hamburg
Huber, P., Zürich
Jacobs, B., Bochum
Kappos, D., Athen
Kinder, H.-P., Münster
Kloss, H., Karlsruhe
Knüsel, L., Zürich
Koutsky, Z., Prag
Krafft, O., Karlsruhe
Krause, U., Erlangen
Kurotschka, V., Freiburg
Lehmann, F., München
Morgenstern, D., Freiburg
Nedoma, J., Prag
Neuhaus, G., Münster
Nölle, G., Münster
Schmitz, N., Karlsruhe
Sonnemann, E., Münster
Steutel, F., Enschede
Störmer, H., München
Topsøe, F., Kopenhagen
v.Waldenfels, W., Saarbrücken
Walk, H., Stuttgart
Widdra, W., Freiburg
Witting, H., Münster
Wolfowitz, J., Ithaca

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

ARNOLD, L.: Asymptotische Verteilung der Eigenwerte zufälliger Matrizen

Sei $A_n = (a_{ij})_n$ eine quadratische n-reihige Matrix, deren Elemente reellwertige Zufallsgrößen mit den folgenden Eigenschaften sind:

a) $a_{ij} = a_{ji}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 für alle i und j,
b) die a_{ij} sind unabhängig für $i \geq j$,
c) die a_{ij} mit $i > j$ besitzen dieselbe Verteilungsfunktion F mit $\int x^2\, dF = \sigma^2 < \infty$ und $\int x\, dF = o$. Es sei $N_n(x)$ die Anzahl der Eigenwerte von A_n, die kleiner als x sind.

In Verallgemeinerung des sog. Halbkreisgesetzes von E. P. WIGNER wird bewiesen:

1) $\int x^4\, dF < \infty \Longrightarrow \lim_n \frac{1}{n} N_n(2\sigma\sqrt{n}\, x) = W(x)$ in Wahrsch.

2) $\int x^6\, dF < \infty \Longrightarrow \lim_n \frac{1}{n} N_n(2\sigma\sqrt{n}\, x) = W(x)$ f.s.

Dabei ist W eine feste absolut stetige Verteilungsfunktion mit der Dichte

$$w(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & \text{für } |x| \leq 1 \\ o & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$$

BAUMANN, V.: Ungünstigste Verteilungen für das Testen von Hypothesen

Für das Testen einer Hypothesenmenge H gegen eine Alternativenmenge K von W-Maßen gibt es, falls das Niveau nicht Null ist, in der schwach*-abgeschlossenen konvexen Hülle von H bzw. K im Raum der W-Inhalte immer eine ungünstigste Hypothese P bzw. Alternative Q in dem Sinne, daß P gegen Q nicht besser zu testen ist als H gegen K. Der Beweis dieser Aussage interpretiert in Anlehmung an KRAFFT-WITTING das Dualprogramm des Pro-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

gramms für den Maximintest als Programm für das ungünstigste Paar (P, Q) und benutzt einen Dualitätssatz von DIETER.

Als Folgerung erhält man hinreichende Bedingungen für die Existenz einer ungünstigsten Hypothese (und analog Alternative) im Bereich der W-Maße:

a) H ist relativ schwach*-kompakt im Bereich der W-Maße, oder

b) (in Verallgemeinerung eines Resultats von LEHMANN):
H läßt sich bis auf relativ schwach*-kompakte Teile durch geeignete Tests beliebig scharf von K trennen.

BOCK, H.-H.: Statistische Modelle zur Gruppenbildung bei normalverteilten Beobachtungen

$Y_1, \ldots, Y_N$ seien N voneinander unabhängige Beobachtungen einer zufälligen Größe aus dem R^p, jeweils mit einer Normalverteilung $\mathfrak{N}(.\,, \sigma^2 V)$ (σ^2 unbekannt; V bekannt; o.B.d.A. $V = I$). Die N Beobachtungen lassen sich hinsichtlich ihrer Erwartungswerte in n (bekannt) Klassen $A_1, \ldots, A_n$ einteilen derart, daß $E(Y_k) = a_i$ für alle $Y_k \in A_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Die Erwartungswerte $a_1, \ldots, a_n$ sind unbekannt, dgl. die Einteilung $\mathfrak{A} = (A_1, \ldots, A_n)$, welche einer Menge $\mathfrak{P}$ zulässiger Einteilungen angehört. Die Einteilung $\mathfrak{A}$ ist auf Grund der Beobachtungen zu bestimmen.

Es werden Bayes-Verfahren konstruiert zu einer ganzen Klasse von Verteilungsfunktionen und gewissen a-priori-Verteilungen (alle $\mathfrak{A} \in \mathfrak{P}$ gleichwahrscheinlich; die Erwartungswerte a_i bei gegebenem $\mathfrak{A}$ unabhängig nach $\mathfrak{N}(.\,, \lambda_i(\mathfrak{A}) I)$ verteilt mit gewissen Erwartungswerten). Es ergibt sich u.a., daß die Maximum-Likelihood-Regel zulässig ist bzhl. aller betrachteten Verlustfunktionen.

Erweiterungen auf umfassendere Problemstellungen wurden skizziert.

BORGES, R.: Zur Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Es wird eine Verallgemeinerung des klassischen lokalen (und damit auch Integral-) Grenzwertsatzes von De Moivre-Laplace angegeben. Daraus folgt, daß mit

$$f(t) = \int [s(1-s)]^{-1/3} ds \quad \text{und} \quad t = \frac{(k + 1/6)}{(n + 1/3)}$$

$$u_k = (n + \frac{1}{3})^{-1/2} (pq)^{-1/6} [f(t) - f(p)]$$

eine Approximation der Ordnung $(n+1/3)^{-1}$ ist, während z.B. die übliche klassische Transformation, die Winkeltransformation und logarithmische Transformation von der Ordnung $n^{-1/2}$ sind. Die Fehlerglieder der Ordnung $n^{-1/2}$ verhalten sich wir $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{3}$ zu einander.

DRYGAS, H.: Stochastische Konvergenz von Korrelationskoeffizienten

Es wird ein allgemeines Prinzip angegeben, mit dem alle speziellen in der Literatur definierten Korrelationskoeffizienten gewonnen werden können. Sodann werden (empirische) Korrelationskoeffizienten für multiple stochastische Regressionsmodelle definiert. Ein System $y_n = z_n \vartheta + e_n$, wobei y_n ein zufälliger $nm \times 1$-Vektor, Z_n eine zufällige $nm \times k$-Matrix, ϑ ein unbekannter $k \times 1$-Parametervektor, e_n ein zufälliger unbeobachteter Fehlervektor, $E(y_n/Z_n) = o$ und $E(e_n e'_n/Z_n) = Q_n$, eine fast sicher reguläre Matrix, ist, beschreibt dabei ein m-faches multiples stochastisches Regressionsmodell zum Stichprobenumfang n. Unter der Voraussetzung, daß die bedingte Verteilung von y_n bei gegebenem Z_n normal ist, werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Folge $Z_n \vartheta$ angegeben, damit die Folge der (partiellen) Korrelationskoeffizienten stochastisch gegen Eins konvergiert. Diese Bedingungen erweisen sich auch bei vielen nicht-normalen Regressionsmodellen als hinreichend.

Die erhaltenen Bedingungen werden verglichen mit den Bedingungen für die Konsistenz der Folge der Gauß-Markoffschen Parameterschätzungen und mit den entsprechenden Bedingungen bei stabilen und explosiven stochastischen Differenzengleichungen.

EICKER, F.: Sätze vom Smirnowschen Typ und eine Verallgemeinerung des Satzes vom iterierten Logarithmus (S.i.L.)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch und über (o.1) gleichverteilte Zufallsveränderliche. Es wird folgende Verallgemeinerung des S.i.L. untersucht:

$$(1) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{j=1}^{n} I(x_j < p_n) - n p_n\right)(2n p_n(1-p_n) \log\log n)^{-1/2} = 1 \quad \text{f.s.}$$

für gegebene Konstanten $p_n \in \pi_n$, I = Indikatorfunktion, π_n geeignet zu bestimmende Intervalle in (o, 1). Für $\pi_n = ((\log n)^{2+\epsilon}/n, 1-(\log n)^{2+\epsilon}/n)$ wird (1) mit "$\geq$" bewiesen.

Der Fall "$\leq$" führt auf verallgemeinerte Sätze vom Smirnowschen Typ derart, daß die Wahrscheinlichkeit bestimmt wird, daß die empirische Verteilungsfunktion F_n unterhalb eines Streckenzuges im Einheitsquadrat liegt. Ereignisse, daß F_n unterhalb einer gekrümmten Kurve liegt, lassen sich annähern durch Ereignisse, daß F_n unterhalb eines approximierenden Streckenzuges liegt.

GÄNSSLER, P.: Exakte Schätzer und konsistente Schätzerfolgen

Sei $\mathfrak{Q}$ die Familie aller W-Maße $P|\mathfrak{A}$ auf den Borelschen Mengen $\mathfrak{A}$ eines separablen vollständigen metrischen Raumes X. τ_1 bezeichne die Initialtopologie für die Familie $\{P \to P(A): A \in \mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{R}_{\tau_1}$ die zugehörigen Borelschen Mengen in $\mathfrak{Q}$. Sei $\mathfrak{P}$ eine Teilfamilie von $\mathfrak{Q}$, welche gleichmäßig absolutstetig ist bzgl. eines endlichen Maßes $\nu|\mathfrak{A}$ (relativ τ_1-kompakt bzw. relativ τ_1-folgenkompakt in $\mathfrak{Q}$),

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$\lambda | \mathfrak{B}_{\tau_1} \cap \mathfrak{P}$ eine Vorbewertung auf $\mathfrak{P}$. Sei $\mathfrak{A}^n$ die Gesamtheit aller Zylinder in X^N mit Basis in X^n, $\mathfrak{A}^N = \sigma(\bigcup_{n \in N} \mathfrak{A}^n)$ und $\varphi: X^N \to \mathfrak{P}$ $\mathfrak{A}^N, \mathfrak{B}_{\tau_1}$-meßbar mit der Eigenschaft, daß

$$P^N(\{\underline{x} \in X^N: \varphi(\underline{x}) = P\}) = 1$$

für λ-fast alle $P \in \mathfrak{P}$ (φ ein λ-fast exakter eigentlicher τ_1-Schätzer für $\mathfrak{P}$). Mittels der Doobschen Martingalmethode wird gezeigt, daß sich jedem φ mit dieser Eigenschaft eine Folge $\mathfrak{A}^n, \mathfrak{B}_{\tau_1}$-meßbarer Abbildungen $\varphi_n: X^N \to \mathfrak{Q}$ zuordnen läßt mit der Eigenschaft, daß $P^N(\{\underline{x} \in X^N: \lim_{n \to \infty} \varphi_n(\underline{x})(A) = P(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}\}) = 1$ für λ-fast alle $P \in \mathfrak{P}$ (φ_n eine λ-fast stark konsistente τ_1-Schätzerfolge für $\mathfrak{P}$).

GEBHARDT, F.: Monotone Regression

Die Menge $\{x_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ sei teilweise geordnet; ferner seien Funktionswerte $z_i = f(x_i)$ gegeben. Gesucht sind Werte u_i so, daß $\Sigma(z_i - u_i)^2$ zum Minimum wird unter den Nebenbedingungen $z_i \leq z_j$ falls $x_i \leq x_j$.

Es wird ein Algorithmus zur Lösung dieser Aufgabe angegeben.

HANŠ, O.: On sample correlation ratio in case of monotone regression

The correlation ratio $\eta_{Z/X}$ is given by $\sqrt{D(E(Z/X))/D(Z)}$. Replacing the expected values corresponding averages, thus formed sample c.r. need not converge to the theoretical one. In case of non-decreasing regression one can start from the relation

$$\eta^2_{Z/X} = 1 - \min_{f \in F} E[Z-f(X)]^2 / D(Z)$$

where the system F consists of all non-decreasing Borel measurable functions. For computing the modificated sample c.r.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

the following property can be used: If $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$ and $y_1, y_2, \ldots, y_n$ are real numbers and $n_1, n_2, \ldots, n_n$ are integers then

$$\min_{f \in F} \sum_{j=1}^{n} n_j [y_j - g(u_j)]^2 = \sum_{j=1}^{n} [y_j - u_j)]^2,$$

where

$$g(u_j) = \frac{1}{\sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} n_k} \sum_{k=m_{j-1}+1}^{m_j} n_k y_k, \quad m_o = o$$

and $m_j = \max m$ for which

$$\sum_{k=m_{j-1}+1}^{m} n_k y_k / \sum_{k=m_{j-1}+1}^{m} n_k \leq \sum_{k=m_{j-1}+1}^{r} n_k y_k / \sum_{k=m_{j-1}+1}^{r} n_k$$

for $j = m_{j-1}+1, \ldots, n.$

HEYER, H.: <u>Das Äquivalenzprinzip der Wahrscheinlichkeitstheorie für lokalkompakte Gruppen und homogene Räume</u>

Unter dem Äquivalenzprinzip werde hier die Gleichwertigkeit von fast sicherer, stochastischer und Verteilungskonvergenz verstanden für die Folge der endlichen Partialsummen stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen, welche Werte in lokalkompakten Gruppen (mit abzählbarer Basis) bzw. homogenen Räumen (nach kompakten Untergruppen lokalkompakter Gruppen mit abzählbarer Basis) annehmen. Er zeigt sich, daß das Äquivalenzprinzip von der additiven Gruppe der reellen Zahlen auf lokalkompakte Gruppen ohne echte kompakte Untergruppen ausgedehnt werden kann, und außerdem, daß die Klasse dieser Gruppen (Klasse $\mathfrak{L}$) der genaue Gültigkeitsbereich des Äquivalenzprinzips ist. Es werden diese Aussagen sodann auf homogene Räume sinngemäß verallgemeinert.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Schließlich ergeben sich Anwendungen auf eine gewisse Klasse von Markoff-Prozessen mit einem homogenen Raum als Zustandsraum. Als Nebenresultat gewinnt man eine Charakterisierung der Klasse $\mathfrak{L}$.

HINDERER, K.: Ein allgemeines Modell für Entscheidungsprezesse

Es werden allgemeine Entscheidungsprozesse mit diskretem Zeitparameter untersucht, wobei zu jedem Zeitpunkt n der Gewinn g_n, die Übergangsmaße q_n und die Menge der möglichen Aktionen von der gesamten Vorgeschichte h_n abhängen durfen. Es werden unter gewissen Voraussetzungen über die g_n zu folgenden Fragen Beiträge geliefert:

a) Meßbarkeit des optimalen erwarteten Gewinnes G_n im Zeitraum (n, ∞).
b) Gültigkeit der BELLMANschen Optimalitätsgleichung für die G_n.
c) Charakterisierung der G_n.
d) Existenz optimaler Strategien.

Die meisten angegebenen Resultate sind Verallgemeinerungen von Sätzen von D. BLACKWELL, E.B. DYNKIN und R.E. STRAUCH.

HUBER, P.: Robuste Konfidenzbereiche

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige reelle Zufallsgrößen mit Verteilungsfunktionen $F(x-\xi)$, wobei von F nur bekannt ist, daß es in einer gewissen Menge $\mathfrak{F}$ liegt. Sei $a > o$ gegeben; das Problem ist, eine Schätzfunktion $T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ von ξ zu finden derart, daß

$$\sup_{F \in \mathfrak{F},\ \xi \in R} \max \{P(T_n > \xi + a),\ P(T_n < \xi - a)\}$$

möglichst klein wird. Dieses Minimaxproblem wird für verschiedene Umgebungen $\mathfrak{F}$ der normalen Verteilungsfunktion und für be-

liebige endliche n explizit gelöst.

KAPPOS, D.: Zur Strukturtheorie der Räume von verallgemeinerten Zufallsvariablen

Es bedeute $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(B, \Sigma)$ die kommutative Verbandsgruppe von allen elementaren Zufallsvariablen über einer σ-Wahrscheinlichkeitsalgebra mit Werten in einer additiven, o-vollständigen Verbandsgruppe Σ; dann ist $\mathfrak{G}$ archimedisch. Nach BANASCHEWSKI kann dann $\mathfrak{G}$ in einer minimalen o-vollständigen Erweiterungsverbandsgruppe $\hat{\mathfrak{G}}$ regulär (invariant) eingebettet werden. Nach PAPANGELOU kann $\mathfrak{G}$ auch in einer minimalen, bezüglich der o-Konvergenz abgeschlossenen Erweiterungsgruppe $\mathfrak{G}_\epsilon$ regulär eingebettet werden, die man nach einem Schritt durch Bildung von o-fundamentalen Folgen gewinnt. Offenbar kann $\mathfrak{G}_\epsilon$ regulär in $\hat{\mathfrak{G}}$ eingebettet werden. Betrachtet man $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{G}_\epsilon$ als reguläre Verbandsuntergruppen von $\hat{\mathfrak{G}}$, so ist $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{G}_\epsilon \subseteq \hat{\mathfrak{G}}$. Ist $\Sigma = \mathbb{R}$, so gilt $\mathfrak{G}_\epsilon = \hat{\mathfrak{G}}$. Dies gilt auch - wie Susan PAPADOPOULOU bewiesen hat - wenn Σ ein Vektorraum (= Vektorverband) über $\mathbb{R}$ ist und die folgende Bedingung erfüllt:

Wenn F eine Teilmenge von positiven Elementen aus Σ ist und ein $a > o$ in Σ existiert derart, daß

$$a \geq \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

für jede endliche Teilmenge $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \subseteq F$ gilt,

dann ist F höchsten abzählbar. Diese Eigenschaft besitzen Vektorverbände endlicher Dimension und gewisse normierte Vektorverbände.

KLOSS, H.: MM-Vorbewertung bei der Punktschätzung einer Wahrscheinlichkeit

Zur Punktschätzung der Wahrscheinlichkeit $x := p(a=1)$ einer Bernoulli-Variablen a werden n unabhängige Veobachtungen a_i durchgeführt und die Zufallsgröße

$$s := \sum_{i=1}^{n} a_i$$

bei quadratischer Schadensfunktion betrachtet. MM-Test und MM-Risiko sowie implizit eine MM-Vorbewertung sind in einer Arbeit von HODGES und LEHMANN enthalten. Es läßt sich zeigen, daß die Gesamtheit P^* aller MM-Vorbewertungen übereinstimmt mit

$$\{\varphi \in P(E) : \int_E x^i \, d\varphi = \prod_{\tau=0}^{i-1} \frac{\sqrt{n}+2\tau}{2(\sqrt{n}+\tau)} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n+1\}$$

Insbesondere enthält P^* auch diskrete W-Maße.

KOUTSKY, Z.: Markoffsche Optimierung

Wir betrachten ein halb-markoffsches System X, das sich in verschiedenen Zuständen einer endlichen Menge $M = \{o, 1, \ldots, N\}$ befinden kann. Wenn sich das System X im Zustand $i \in M$ befindet, gewinnt es g_{ii} Geldeinheiten für eine Zeiteinheit; bei dem Übergang aus dem Zustand i in den Zustand j gewinnt es eine Summe von g_{ij} Geldeinheiten. Ist $v_i(t)$ der durchschnittliche Gesamtgewinn dieses Systems im Zeitintervall $\langle o, t \rangle$, dann soll man das System so steuern, daß

$$g = \lim_{t \to \infty} \frac{v_i(t)}{t}$$

sein Maximum erreicht. Es wurde die HOWARDsche Lösung gezeigt. Im Fall, daß irgendeine Bedingung für die HOWARDsche Lösung nicht erfüllt ist, werden einige Lösungen gezeigt. Besonders wurde gezeigt, daß bei einer unvollständigen Information

über das Verhalten des Systems gemischte Strategien auftreten können; beim endlichen Anfangskapital wurde eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Ruinierung des Systems sowie ein System der Differentialgleichungen für die Wahrscheinlichkeit der Ruinierung angegeben. Alle Probleme wurden im Zusammenhang mit der Bedienungstheorie betrachtet. Weiter wurde ein Iterationsverfahren für optimale Erweiterung der Bedienungsstelle gezeigt.

KRAFFT, O.: Zur Existenz ungünstigster Verteilungen

Es seien Θ eine beliebige Menge, $\mathfrak{H}$ eine Booolesche Algebra über den Teilmengen von Θ und ba($\mathfrak{H}$) der Raum der beschränkten, additiven Mengenfunktionen auf $\mathfrak{H}$. $1^* \in ba(\mathfrak{H})$ heißt ein ungünstigster Inhalt für das Testen von H: $\theta \in \Theta$ gegen K: $\theta = \theta'$ zum Niveau α, $\alpha \in (o, 1)$, wenn

(1) $1^* \geq o$

(2) $E_\theta \varphi^* = \alpha[1^*]$

(3) $E_{\theta'} \varphi^* - \int E_\theta \varphi^* dl^*(\theta) \geq E_{\theta'} \varphi - \int E_\theta \varphi dl^*(\theta)$ für alle φ.

φ^* bezeichnet hierbei einen besten Test für das zugehörige Testproblem.

Ist $\mathfrak{H}$ eine σ-Algebra und 1^* σ-additiv, so ist 1^* eine ungünstigste Verteilung nach der Definition von LEHMANN. Ist Θ ein normaler topologischer Raum, $\mathfrak{H}$ die durch die abgeschlossenen Teilmengen von Θ erzeugte Boolesche Algebra und $E_\theta \varphi$ stetig in θ für alle φ, so existiert ein ungünstigster Inhalt 1^*. 1^* ist regulär. In einem Korollar werden Bedingungen für die σ-Additivität von 1^* angegeben.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

KRAUSE, U.: Kennzeichnung und Behandlung von Markoffprozessen als Operatoren

Es wird für einen stochastischen Prozeß mit lokalkompaktem Zustandsraum eine Familie von Operatoren konstruiert derart, daß der Prozeß genau dann ein (schwacher) Markoffprozeß ist, wenn diese Operatoren eine Halbgruppe bilden; analog für einen starken Markoffprozeß. Diese Operatoren lassen sich auffassen als Fortsetzungen der überlicherweise betrachteten Übergangsoperatoren ($P_t f = \int f\, X_t\, dP$), deren Halbgruppeneigenschaften nach einem Beispiel von FELLER (1959) bekanntlich nicht die Markoffprozesse unter den stochastischen Prozessen charakterisiert. Es läßt sich sogar beweisen, daß zu jedem nicht-trivialen stochastischen Prozeß mit rechtsseitig stetigen Pfaden und unendlich langer Lebenszeit ein nicht-Markoffscher Prozeß existiert, der dieselben Übergangsoperatoren besitzt - was u.a. beinhaltet, daß FELLERs Feststellung keinen pathologischen Sachverhalt trifft.

MORGENSTERN, D.: Grenzwertsätze für die Extrema gewisser Abstände der geordneten Stichprobe unabhängiger konstant-verteilter Größen

Mittels der Darstellung der geordneten Stichprobe unabhängiger gleichverteilter Variabler durch unabhängige exponentialverteilte Größen wird durch Vergleich mit deren Extrema die asymptotische Verteilung des Maximums und des Minimums der Abstände der Teilfolge, die aus jedem k-ten Wert gebildet wird, bestimmt.

NEDOMA, J.: Über die Verkürzung von Nachrichten durch Kodierung

Es sei eine diskrete ergodische Nachrichtenquelle (A, P), ein endli-

ches Alphabet B und eine Kodierung K von A^I nach B^I gegeben. Dann kann man den asymptotischen Quotienten der Länge der Nachricht vor und nach der Kodierung mit

$$l(a,K) = \lim_{r\to\infty} \frac{\sum_{i=o}^{r-1} l_K(a_{in},\ldots,a_{i(n+1)-1})}{n\cdot r}$$

definieren. Dabei bedeutet $l_K(a_{in},\ldots,a_{i(n+1)-1})$ die Länge des $(a_{in},\ldots,a_{i(n+1)-1})$ entsprechenden Kodewortes.

Bezeichnen wir jetzt mit $\varphi((A,P),n)$ die Anzahl von n-ergodischen Komponenten der Wahrscheinlichkeit P und setzen wir $\Phi((A,P)) = \lim_{n\to\infty} \inf \varphi((A,P),n)$, dann kann man für jedes $\varepsilon > o$ eine solche Kodierung K finden, daß (wir setzen $(A,P) = Q$)

(1) $P\{a: |l(a,K) - H| < \varepsilon\} > 1-\varepsilon,$ wenn $\Phi(Q) \leq \infty$

(2) $P\{a: |l(a,K) - H| < \varepsilon\} = 1,$ wenn $\Phi(Q) < \infty$

(3) $P\{a: |l(a,K) = \text{konst} - H| < \varepsilon\} = 1,$ wenn $\Phi(Q) = 1.$

Es ist die Frage, ob man auch (2) beweisen kann, wenn $\Phi(Q) = \infty$ ist. Damit ist die Frage verbunden, ob eine Quelle mit $\Phi(Q) = \infty$ existiert.

NEUHAUS, G: Zur Unverfälschtheit des Pitman-Tests auf positive stochastische Abhängigkeit

Sind $\tilde{s}$ und s Elemente der Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_n$ von $1,\ldots,n$, so heißt $\tilde{s}$ besser geordnet als $s(\tilde{s} \succeq s)$, falls $\tilde{s}$ aus s entsteht durch sukzessive Beseitigung von Fehlständen. Es wird gezeigt, daß für Funktionen $u_i(s)$, $i = 1, 2$, mit "$\tilde{s} \succeq s \Longrightarrow u_i(\tilde{s}) \geq u_i(s) \geq o$, $i = 1, 2$" gilt

$$\sum_{s\in\mathfrak{S}_n} u_1(s)\,u_2(s) \geq \frac{1}{n!} \sum_{s\in\mathfrak{S}_n} u_1(s) \sum_{s\in\mathfrak{S}_n} u_2(s).$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung wird die Unverfälschtheit des PITMANschen Permutationstests φ zur Prüfung auf positive stochastische Abhängigkeit gegenüber der Klasse $\mathfrak{F}_p$ von Verteilungen mit positiver Likelihoodabhängigkeit nachgewiesen.

NÖLLE, G.: Lokal-optimale Rang-Tests

Rang-Tests für $H: \Delta = o$ gegen $K: \Delta > o$ (z.B. Δ Translationsparameter beim Zweistichprobenproblem) haben allgemein eine Prüfgröße $\pi(\nu, \Delta)$ (beim Zweistichprobenproblem z.B. $\nu = \nu_{1[\,]}$, das n_1-tupel der Rangzahlen von $X_1, \ldots, X_{n_1}$ bzgl. $X_1, \ldots, X_{n_1+n_2}$), so daß der beste Rangtest von $\Delta > o$ abhängt. Außerdem ist $\pi(\nu, \Delta)$ häufig schwierig zu berechnen (HOEFFDINGsche Formel). Man verwendet daher solche Rangtests, die in einer Umgebung von $\Delta = o$ optimal sind. Für solche "lokal-optimale (Rang-) Tests" gibt es verschiedene Definitionen (UZAWA, HAJEK, LEHMANN, SCHMETTERER), die zunächst angegeben werden. Die vielfach verwendete Prüfgröße $\frac{\partial}{\partial \Delta} \pi(\nu, \Delta)|_{\Delta=o}$ liefert solche Tests nur für sehr spezielle Niveaux, während für andere Niveaux die Güte echt kleiner ist als die für $\pi(\nu, \Delta)$, wie Beispiele zeigen. Andererseits existiert für holomorphes $\pi(\nu, \Delta)$ ein $\Delta_o > o$ derart, daß der durch $\pi(\nu, \Delta)$ gegebene Test unabhängig ist von Δ mit $o < \Delta < \Delta_o$ und somit "lokal-optimal" ist. Die Voraussetzung der Holomorphie läßt sich für die gängigen Probleme nachweisen.

SCHMITZ, N.: Zum Testen einfacher Hypothesen

Beim sequentiellen Testen zweier einfacher Hypothesen über einen stochastischen Prozeß $\{X_t(\omega), t \in T \subset R_1\}$ zu vorgegebenen Niveaus α_1 und α_2 treten u.a. folgende Fragen auf:

(1) Existiert stets ein (abgeschlossener) Test zu α_1 und α_2?
Andernfalls gebe man Bedingungen für die Existenz an.

(2) Existiert im Falle der Lösbarkeit von (1) ein Test δ zu α_1

und α_2, der $E_{i,\delta}(T_A)$ - die erwartete Beobachtungsdauer - für $i = 1$ und 2 minimiert?

Beide Fragen sind bei Prozessen, deren LQ stationäre stochastisch unabhängige Zuwächse besitzt, zu bejahen (DVORETZKY, KIEFER, WOLFOWITZ), im allgemeinen jedoch zu verneinen, wie an Beispielen gezeigt wird. Bei (1) gilt: die folgenden Aussagen (a), (b) und (c) sind äquivalent:

(a) Für jedes $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) > o$ existiert ein allg. SPRT δ mit $\alpha_i(\delta) \leq \alpha_i$.

(b) Für jedes $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) > o$ existiert ein (abg.) Test δ' mit $\alpha_i(\delta') \leq \alpha_i$.

(c) $X_T^{(1)}$ und $X_T^{(2)}$ sind orthogonal (perpendicular).

STEUTEL, F.W.: Some classes of infinitely divisible distributions

It is proved that mixtures of exponential distributions are infinitely divisible. From this it is shown to follow that mixtures of Γ-distributions, with Laplace transforms of the form

$$\sum p_j \{\lambda_j / (\lambda_j + \tau)\}^{\eta_j} \quad (p_j > o, \ \sum p_j = 1, \ \lambda_j > o, \ o \leq \eta_j \leq 1)$$

are also infinitely divisible. Further it is proved that characteristic functions of the form $\sum p_j \{\lambda_j / (\lambda_j - h(t))\}$ are infinitely divisible for all sequences $\{p_j\}$ and $\{\lambda_j\}$ if and only if $h(t)$ is the logarithm of an infinitely divisible characteristic function.

Finally some examples are given of infinitely divisible mixtures of Γ_2 distributions. It is not yet known whether all such mixtures are infinitely divisible.

STÖRMER, H.: Eine Charakterisierung der Poissonprozesse

Bei der Überlagerung unabhängiger Poissonprozesse erhält man bekanntlich wieder einen Poissonprozeß, also einen Erneuerungsprozeß. Es wird gezeigt, daß unter plausiblen Voraussetzungen auch die Umkehrung gilt: Wenn bei der Überlagerung von unabhängigen Erneuerungsprozessen wieder ein Erneuerungsprozeß entsteht, so sind die Einzelprozesse (und damit auch der Überlagerungsprozeß) Poissonprozesse.

TOPSØE, F.: A criterion for weak convergence with an application to convergence of measures on $D[o,1]$

Betreffs der schwachen Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf vollständigen separablen metrischen Räumen stellen wir uns die folgende Frage:

Wenn eine Folge P_n schwach gegen Q konvergiert und wenn für jede Menge A aus einer Algebra $\mathfrak{A}$, die die ganze Borelsche σ-Algebra erzeugt, P_nA gegen PA konvergiert, muß P dann gleich Q sein? Im allgemeinen gilt dieses nicht, aber wenn $\mathfrak{A}$ Punkte genügend separiert, dann ist die Frage zu bejahen. Wenn man dieses Resultat auf den SKOROHODschen Raum $D[o,1]$ anwendet, kann man den folgenden Satz beweisen:

Sei (P_n) eine straffe Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $D[o,1]$ und T eine in $[o,1]$ dichte Menge (mit $1 \in T$). Wenn für jede endliche Teilmenge t von T die endlichdimensionalen Verteilungen $P_n\pi_t^{-1}$ schwach konvergieren, dann konvergiert P_n schwach in $D[o,1]$ (und man kann die Grenzmaße identifizieren).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

v. WALDENFELS. W.: Eine Faltungshalbgruppe auf dem Raum aller Radonmaße

Sei $\mathfrak{X}$ ein lokal kompakter Raum, der im Unendlichen abzählbar ist, sei $\mathfrak{C}_o(\mathfrak{X})$ der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger und sei $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ der Raum aller positiven Radonmaße auf $\mathfrak{X}$, versehen mit der schwachen Topologie über $\mathfrak{C}_o(\mathfrak{X})$. Bezüglich der Addition bildet $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ eine kommutative Halbgruppe mit Nullelement. Entsprechend definiert man zu zwei straffen Maßen P und Q auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ die Faltung $P * Q$. Jedem $\rho \in \mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ wird ein straffes Wahrscheinlichkeitsmaß $P(\rho)$ auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$ zugeordnet mit der Fouriertransformierten

$$P(\rho)^{\wedge}(\varphi) = \int P(\rho)(d\mu) \exp i\langle\mu, \varphi\rangle = \exp \int \rho(dx)(e^{i\varphi(x)}-1)$$

für $\varphi \in \mathfrak{C}_o(\mathfrak{X})$. Dann gilt

$$P(o) = \mathfrak{d} \text{ (Diracmaß im Nullpunkt von } \mathfrak{M}(\mathfrak{X})), \; P(\rho+\sigma) = P(\rho) * P(\sigma).$$

Falls ρ beschränkt ist, ist

$$P(\rho) = \exp_{*} A(\rho), \; \langle A(\rho), f\rangle = \int \rho(x) \, [f(\delta_x) - f(o)]$$

für stetiges beschränktes f auf $\mathfrak{M}(\mathfrak{X})$.

WALK, H.: Zufällige Potenzreihen mit abhängigen Koeffizienten

Hergeleitet werden unter Verwendung einer mit einem zentralen Grenzwertsatz zusammenhängenden Ungleichung von P. LÉVY die folgenden Aussagen über das Randverhalten zufälliger Potenzreihen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, deren Koeffizienten a_n gleichmäßig beschränkt sind und für die $\{\sum_{k=o}^{n} a_k\}$ ein Martingal ist.

SATZ 1: Für $\Omega' \in \mathfrak{F}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:
Σa_n wesentlich divergent in Ω'; Σa_n fast überall in Ω' divergent;

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$\Sigma |a_n|^2$ fast überall in Ω' divergent (BURKHOLDER); Σa_n fast überall in Ω' nicht abel-summierbar.

SATZ 2: $\Sigma |a_n|^2$ sei divergent fast überall in $\Omega' \in \mathfrak{F}$; h sei eine stetige Funktion mit $h(x) \geq o$ für $x \geq o$, $h(x) \to \infty$ für $x \to \infty$. Dann gilt fast überall in Ω':

$$\sup_{o<\rho<1} \int_{\alpha}^{\beta} h(|\Sigma a_n \rho^n e^{in\varphi}|)\, d\varphi = \infty \text{ für alle } (\alpha, \beta) \text{ mit } \alpha < \beta.$$

KOROLLAR: Fast sicher ist $\Sigma a_n z^n$ entweder in $|z| < 1$ von beschränkter Charakteristik

$$(\sup_{o<\rho<1} \int_{o}^{2\pi} \log^+ |\Sigma a_n \rho^n e^{in\varphi}|\, d\varphi < \infty)$$

oder in jedem Sektor von $|z| < 1$ von unbeschränkter Charakteristik

$$(\sup_{o<\rho<1} \int_{\alpha}^{\beta} \log^+ |\Sigma a_n \rho^n e^{in\varphi}|\, d\varphi = \infty \text{ für alle } (\alpha, \beta) \text{ mit } \alpha < \beta).$$

WOLFOWITZ, J.: The Gaussian channel with feedback

The strong converse for the Gaussian channel with feedback (and a power constraint) is proved. This proves that the capacity of the channel with feedback is the same as that of the channel without feedback. By means of the strong converse the SCHALKWIJK-KAILATH scheme is shown to have certain optimal properties. One of these implies a kind of FRECHET-CRAMER-RAO inequality for feedback processes.

Norbert Schmitz (Karlsruhe)