MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 8/1968

Funktionentheorie einer komplexen Variablen

17.3. bis 24.3.1968

Vom 17. bis 24. März 1968 fand eine Tagung über Funktionentheorie einer komplexen Variablen in Oberwolfach statt. Die Leitung der Tagung hatten Prof. Dr. H. Grunsky (Würzburg) und Prof. Dr. H. Wittich (Karlsruhe).
Wie bei der vorhergehenden Tagung war die Zahl der Teilnehmer, besonders der Gäste aus dem Ausland, groß. Dementsprechend war das Angebot an Vorträgen sehr reichhaltig.
In den Vorträgen wurde über neue Resultate aus den verschiedensten Gebieten der Funktionentheorie einer komplexen Variablen berichtet.

Teilnehmer

M. Arsove, Seattle
G. Aumann, München
I. N. Baker, London
M. L. Cartwright, Cambridge
H. Cremer, Freiburg
A. Dinghas, Berlin
P. L. Duren, Ann Arbor
T. M. Flett, Sheffield
G. Frank, Karlsruhe
W. H. Fuchs, Ithaca
D. Gaier, Giessen
P. Gauthier, Montreal
F. Gehring, Ann Arbor
O. Götz, Schweinfurt
G. Goodman, Aarhus
H. Grunsky, Würzburg
K. Habetha, Göteborg
W. K. Hayman, London
H. Herold, Würzburg
H. Hornich, Wien
A. Huber, Zürich
H. Huber, Basel
H. Huckemann, Giessen
S. Jaenisch, Giessen
W. Kaplan, Ann Arbor
E. Lammel, Gauting
H. Leutwiler, Zürich
A. J. Lohwater, Cleveland/USA
J. McMillan, Milwaukee/USA
J. Nikolaus, Karlsruhe
R. Ossermann, Stanford/USA
A. Pfluger, Zürich
G. Piranian, Ann Arbor
Ch. Pommerenke, Berlin
K. Renyi, Budapest
A. Renyi, Budapest

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

H. Schmidt, Würzburg
St. Schottlaender, Clausthal-Zellerfeld
K. Stein, München
A. Steiner, Rüttenen/Schweiz
K. Strebel, Zürich
H. Tietz, Hannover
St. Timmann, Hannover
O. Volk, Würzburg
G. Warnecke, Bonn
J. Winkler, Berlin
H. Wittich, Karlsruhe

Vortragsauszüge

M. G. Arsove: Applications of Green's lines and prime end boundary structures to the theory of H^p spaces over infinitely connected regions

Elements of the theory of H^p spaces ($p \geq 1$) of harmonic and analytic functions are established for a broad class of regions (infinite connectivity allowed) by methods based on the use of Green's lines and compactification by means of an ideal boundary β generalizing the prime end boundary of Carathéodory. The underlying region Ω is taken as a Dirichlet region for which the shaded boundary (cluster points of distinct components of $\partial\Omega$) has ideal harmonic measure zero. Here the level line Λ^ρ on which Green's function (with fixed pole) assumes the value $\log(1/\rho)$ plays a role analogous to that of the circle $C_\rho(0)$ in the case of the disc. For example, if w is a (complex) harmonic function in H^p ($p > 1$), then $w_\rho \to w_1$ in L^p, and w is the harmonic extension of w_1. Moreover, the space H^p over Ω is isometrically isomorphic with the space L^p over β.

G. Aumann: Über die Streckenverzerrung bei konformen Abbildungen

Bei konvexen konformen Abbildungen läßt sich in einfacher Weise der genaue Schrankenbereich S für die Lage des Urbildes des Teilungspunktes (zum Verhältnis λ, $0 < \lambda < 1$)

auf einer Strecke im Bild konstruieren (S wird im Falle der Abbildung des Einheitskreises bereits von den linear gebrochenen Abbildungen voll erfüllt). Für allgemeine Abbildungen lassen sich Folgerungen ziehen; die dabei benutzte Normierung führt auf neue Problemstellungen bei schlichten Abbildungen.

I. N. Baker: Vollständig invariante Gebiete bei ganzen Funktionen

Ein vollständig invariantes Gebiet G der ganzen Funktion $f(z)$ geht bei $z \to f(z)$, $z \to f_{-1}(z)$ in sich. Es wird gezeigt: Ist $f(z)$ ganz transzendent, so gibt es keine zwei punktfremden vollständig invarianten Gebiete. Ist $f(z)$ ein Polynom, dann können zwei punktfremde vollständig invariante Gebiete existieren.

A. Dinghas: Über das Schwarzsche Lemma und verwandte Sätze

Es sei D ein nicht leeres Gebiet von H^n. Man nehme an, die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \left|\hat{\Phi}_{z^\alpha \bar{z}^\beta}\right| = \exp \hat{\Phi} \quad ,$$

wobei links die Hessesche Determinante von $\hat{\Phi}$ ist, besitze eine plurisubharmonische Lösung $\hat{\Phi}$ in D. Es bezeichne $w = (w^1,\dots,w^n)$ ein System von holomorphen Funktionen $w^1,\dots,w^n$ von $z^1,\dots,z^n$, das zusammen mit $\bar{w} = (\bar{w}^1,\dots,\bar{w}^n)$ $(\bar{w}^k = \bar{w}^k(\bar{z}^1,\dots,\bar{z}^n))$ D in sich abbildet. Man setze $\exp \hat{\Phi} = V$ $(\hat{V} = [\hat{V}(z,\bar{z})])$ und $J = \det \left[\dfrac{\partial w^i}{\partial z^k}\right]$. Dann gilt die Ungleichung

$$(2) \qquad \hat{V}(w,\bar{w})\,|J|^2 \leq \hat{V}(z,\bar{z}) \quad .$$

Genügt Φ der Ungleichung $\left|\Phi_{z^\alpha \bar{z}^\beta}\right| \geq \exp \Phi$ (Φ Sublösung von (1)!) in D, so gilt ebenfalls

(3) $$V(w,\overline{w})|J|^2 \leq V(z,\overline{z})$$

mit $\exp \Phi = V$ in D. (3) liefert für $n = 1$ und $D = C$ (Hermite-Einheitskugel) die klassische Verallgemeinerung des Schwarz - Pickschen Satzes von Ahlfors (1936, Trans. Am. Math. Soc. 43).

Literatur: 1) Festschrift zur Gedächtnisfeier für Weierstraß 1815-1965. Westdeutscher Verlag, Köln-Opladen 1966, S. 477-496. 2) Israel Journal of Mathematics 5, No. 3, 1967, und 3) Sitzungsber. der Heidelb. Akad. der Wissenschaften (Erscheint 1968). Man vergleiche auch: Jahresber. der Deutschen Mathem. Vereinigung Bd. 69 (1967) S. 152-160, und die Arbeit von Cluni und Osserman im Journ. d' Analyse Mathématique, Bd. XIX, (1967), S. 15-34.

P. L. Duren: H^p spaces with $p < 1$

Each bounded linear functional Φ on H^p $(0 < p < 1)$ has a unique representation:

$$\Phi(f) = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) g(e^{-i\theta}) d\theta ,$$

where $g(z)$ is analytic in $|z| < 1$ and continuous in $|z| \leq 1$. Jf $\frac{1}{n+1} < p < \frac{1}{n}$ $(n=1,2,\dots)$, then $g^{(n-1)}$ is in the Lipschitz class Λ_α, $\alpha = \frac{1}{p} - n$. Jf $p = \frac{1}{n+1}$, Λ_1 must be replaced by the Zygmund class Λ^* of smooth functions. Conversely, each analytic function g with the indicated smoothness determines a $\Phi \in (H^p)^*$ in the above manner.

Let $B^p (p < 1)$ the Banach space of analytic functions such that $\|f\| = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{p}-2} |f(re^{i\theta})| dr\, d\theta < \infty$. Then H^p is a dense vector subspace of B^p, $(B^p)^* \approx (H^p)^*$, and B^p may be regarded as the closure of H^p in $(H^p)^{**}$. Finally, if $S(z)$ is a singular inner function whose associated singular measure has modulus of continuity $O(t \log \frac{1}{t})$, then $S \cdot H^p$

is a proper closed subspace of H^p which no $\Phi \in (H^p)^*$ except $\Phi = 0$ can annihilate. Hence the Hahn-Banach theorem fails in H^p with $p < 1$. (Joint paper with A. L. Shields and B. W. Romberg)

T. M. Flett: <u>Some new and old results concerning the H^p classes</u>

For a function Φ regular in the unit disc there are a number of known inequalities connecting the expression

$$\lim_{p \to 1-} \int_{\pi}^{\pi} |\Phi(\rho e^{i\theta})|^p d\theta$$

with integrals of the form $\int_{-\pi}^{\pi} g_k^p(\theta) d\theta$, where

$$g_k(\theta) = \left\{ \int_0^1 (1-\rho)^{k-1} |\Phi'(\rho e^{i\theta})|^k d\rho \right\}^{1/k} .$$

A new inequality of this type has been obtained, giving a sufficient condition for a function Φ to belong to the class H^p , where $0 < p \leq 1$. This inequality has applications to fractional integrals. There are also analogous results for functions regular in a half-plane, and for harmonic functions.

W. H. J. Fuchs: <u>Über die Defekte meromorpher Funktionen niedriger Ordnung</u>

A. Edrei hat folgende Vermutung ausgesprochen: Es sei $f(z)$ eine meromorphe Funktion der unteren Ordnung $\mu < \infty$, $E(r,f)$ die Menge der θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ für die $|f(re^{i\theta})| > A$ gilt, wo A eine beliebig gewählte positive Zahl ist. Dann gibt es eine Folge $r_1 < r_2 \dots r_n \to \infty$ so, daß das Lebesguesche Maß von $E(r, \frac{1}{f-c})$ die Ungleichung

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} m\left(E(r_n \frac{1}{f-c})\right) \geq \min\left(2\pi, \frac{2}{\mu} \operatorname{arc}\cos(1-\delta(c,f))\right)$$

für jedes komplexe c erfüllt.
Der Vortrag behandelt die Konsequenzen dieser Vermutung und den Beweis von einigen von ihnen.

P. Gauthier: Cercles de remplissage and spiral asymptotic behaviour

We consider the value distributation of a meromorphic function whose behaviour is prescribed along a spiral. The existence of extremely wild holomorphic functions is established. Indeed a weak form of the main result is that there are holomorphic functions (in the unit disc or the plane) for which every boundary arc is a Julia arc.

F. W. Gehring: Foldings in three space

This talk is concernde with the following problem. Characterize those domains D in the n-dimensional Möbius space $\overline{R}^n$ which can be mapped quasiconformally onto the unit ball B^n. When $n = 2$, the Riemann mapping theorem shows that D is quasiconformally equivalent to B^2 if and only if ∂D is a nondegenerate continuum. No such characterization is possible when $n > 2$, since there exist pairs of Jordan domains with a common boundary, one of which is quasiconformally equivalent to B^n while the other is not.
We consider a class of domains D in $\overline{R}^3$ analogous to slit domains, more precisely those D whose complements lie in a topological sphere. We show that such a D is quasiconformally equivalent to B^3 if and only if ∂D is a quasiconformal disk, in which case any quasiconformal mapping f of D onto B^3 is equal to a geometric folding in a line preceded and followed by quasiconformal mappings of $\overline{R}^3$ onto $\overline{R}^3$.

O. Götz: Das Zentrumproblem und die Stabilität komplexer Differentialgleichungen

Das funktionentheoretische Zentrumproblem ist die Frage nach der Lösbarkeit der Schröderschen Funktionalgleichung

$$f\big(\sigma(z)\big) = \sigma(az) \; , \quad f \text{ holomorph mit } f(0)=0,\ f'(0)=a \; ,$$

durch eine holomorphe Funktion σ.
Dieses kann in Zusammenhang mit dem Stabilitätsproblem der

Gleichgewichtslösung einer komplexen Differentialgleichung

$$\dot{z} = F(z)$$

gebracht werden.
Die stabilen Lösungen sind bei festem Parameterwert holomorphe Funktionen f der Anfangswerte, für die die Schrödersche Funktionalgleichung lösbar ist und umgekehrt läßt sich jede Funktion f mit dieser Eigenschaft in die Lösungsschar einer Differentialgleichung einbetten.

G. S. Goodman: <u>The axiomatisation of Loewners theory of schlicht functions</u>

At the basis of Loewners theory is the geometric-intuitive idea of a <u>flow</u> within the unit disk that carries the disk 1 - 1 conformally onto any specified simply connected subdomain. Dropping the assumption of univalence, we consider two-parameter families of holomorphic functions $h(z,s,t)$ on $|z| < 1$, for $0 \leq s \leq t \leq t_0$, with $|h| < 1$, $h(0,s,t) \equiv 0$, $h'(0,s,t) \geq 0$, that satisfy the following axioms:

1^0 (continuity) : h is continuous in (z,s,t)
2^0 (identity) : $h(z,s,t) \equiv z$ iff $s = t$
3^0 (transitivity): $h(h(z,s,\tau),\tau,t) \equiv h(z,s,t)$ whenever $s \leq \tau \leq t$.

We prove that we can introduce a new parametrization in terms of which these flows have a <u>velocity field</u> $v(z,t)$ in $|z| < 1$ for almost all t, having the form $v(z,t) = -zp(z,t)$, where p is analytic in z, measurable in t, with $p(0,t) \equiv 1$, $\operatorname{Re} p > 0$ $(|z| < 1)$ and they constitute the <u>general solutions</u> on $|z| < 1$, $0 \leq s \leq t \leq t_0$, of the equation

(DE) $$\frac{dh}{dt} = -hp(h,t) \text{ a.e in } t$$

with 2^0 as initial conditions. Further they are univalent in z, and every normalized 1 - 1 conformal self mapping of the unit disk can be expressed as $h(z,0,t_0)$ for a suitable t_0 and family h satisfying $1^0 - 3^0$, and thus (DE).

H. Grunsky: Erweiterung Riemannscher Flächen und Fortsetzung meromorpher Differentiale

Gegeben sei eine berandete Riemannsche Fläche R und ein meromorphes Differential ω in ihrem Inneren $\underline{R}$. Unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen über sein Verhalten in der Nähe einer Randkomponente Z läßt sich R unter gleichzeitiger analytischer Fortsetzung von ω über Z hinaus zu einer Fläche R' erweitern, derart, daß $R' \setminus \underline{R}$ eine einfach zusammenhängende Umgebung in R' besitzt, die bei geschlossenem Z kompakt in R' ist, bei offenem Z genau ein nicht in R' liegendes Primende besitzt.
Es wird insbesondere der letztgenannte Fall untersucht und bewiesen, daß die Schlichtheit von $w = \int \omega$ in einer beliebig kleinen Umgebung von Z hinreichend ist. Falls $\omega = \frac{\partial u}{\partial z} dz$ mit harmonischem u ist, so ist diese Bedingung insbesondere dann erfüllt, wenn eine verallgemeinerte Normalableitung von u auf Z von einerlei Vorzeichen ist.

W. K. Hayman: Über den $\cos \pi\rho$ Satz

Nach einem berühmten Satz von Wiman [4] und Valiron [5] gilt für das Minimum $\mu(r,f)$ und Maximum $M(r,f)$ einer ganzen Funktion $f(z)$ der Ordnung ρ, sobald $0 \leq \rho < \alpha < 1$,

$$\log \mu(r,f) > \cos \pi\alpha \log M(r,f) \qquad (1)$$

für eine gegen unendlich strebende Folge $r = r_n$.
Besicovitch [2] und Barry [1] bewiesen später, das die Menge von r für die (1) gilt, mindestens obere Dichte bzw. untere logarithmische Dichte $1 - \rho/\alpha$ hat. Hierzu werden nun Gegenbeispiele gegeben, die beweisen, daß zum wenigsten der Satz von Barry scharf ist. Für den Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ gab schon Kjellberg [3] derartige Beispiele, die aber auf einer anderen Methode beruhten.

Literatur

[1] P.D. Barry, On a theorem of Besicovitch, Quart. J. of Math. Oxford 14 (1963), 293-302.

[2] A.S. Besicovitch, On integral functions of order < 1, Math. Ann. (1927), 677-695.

[3] B. Kjellberg, On certain integral and harmonic functions, Thesis Uppsala (1948).

[4] G. Valiron, Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini en particulier les fonctions à correspondance régulière, Annales de Toulouse (3) 5 (1914), 117-257.

[5] A. Wiman, Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen von der Höhe Null, Math. Ann. 76 (1915), 197-211.

H. Herold: Randwertprobleme bei Differentialgleichungen 2. Ordnung im Komplexen

Vorgelegt seien die beiden Randwertprobleme

$$w'' = F(z,w,w') \qquad w(z_k) = 0 \qquad (k = 1,2)$$

und

$$w'' = G(z,w) \qquad w'(z_1) = w(z_2) = 0 \ .$$

Hier bedeutet $F(z,w,w')$ eine regulär-analytische Funktion der drei komplexen Veränderlichen z,w,w', die in einem gewissen Gebiet des (z,w,w')-Raumes definiert sei, und für $G(z,w)$ gelte Entsprechendes. Existenz- und Einzigkeitssätze für die Lösungen können durch ein auf Flächenintegralformeln beruhendes Iterationsverfahren gewonnen werden.

Als Folgerung ergibt sich z.B.:

$p(z)$ sei in einem beschränkten konvexen Gebiete G holomorph und beschränkt: $|p(z)| \leq M$. Für den Durchmesser d von G gelte $d < \frac{\pi}{2\sqrt{M}}$. Verschwindet dann eine Lösung von $w''+p(z)w = 0$ in der abgeschlossenen Hülle von G, so ist ihre Ableitung in G nullstellenfrei und umgekehrt.

H. Hornich: Ein Banachraum analytischer Funktionen in Zusammenhang mit den schlichten Funktionen

Für ein konvexes Gebiet G der komplexen Ebene wird ein Banachraum B von in G analytischen Funktionen f mit nirgends verschwindender Ableitung f' und beschränktem $\arg f'$ definiert; die Norm wird mit Hilfe von $\arg f'$ gebildet. Es wird die Verteilung der in G schlichten Funktionen in B untersucht. Die Menge der in G schlichten Funktionen in B ist abgeschlossen. Es zeigt sich, daß ausgehend von einer offenen Kugel um den Nullpunkt von B, in der nur schlichte Funktionen liegen, die Anzahl der schlichten Funktionen mit zunehmender Norm abnimmt.

A. Huber: Vollständige konforme Metriken

Bekanntlich kann jede (offene oder geschlossene) orientierbare abstrakte Fläche F erzeugt werden durch ein auf einer Riemannschen Fläche definiertes, konform invariantes Linienelement

$$ds^2 = e^{2u(x,y)}(dx^2 + dy^2) = e^{2u(z)}|dz|^2$$

($z = x + iy$ bezeichnet hier eine Ortsuniformisierende).
Die Gauss'sche Krümmung K berechnet sich nach der Formel $K = -\Delta u/e^{2u}$ $(\Delta := \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$. Es ist also $K\,dA = -\Delta u\,dx\,dy$, wobei dA das Flächenelement auf F bezeichnet.
Der hier zutage tretende Zusammenhang zwischen Flächentheorie und Theorie des logarithmischen Potentials ermöglicht die Behandlung differentialgeometrischer Probleme durch funktionentheoretische Methoden. Es wird über Resultate der Flächentheorie im Großen berichtet, welche sich auf diesem Wege als zugänglich erwiesen haben. (Vgl. den Artikel des Vortragenden im Festband zum 70. Geburtstag von Rolf Nevanlinna, Springer-Verlag 1966).

F. Huckemann: Extremale Zerlegungen 3-fach zusammenhängender Gebiete

Es sei D ein dreifach zusammenhängendes Gebiet der Ebene, keine Randkomponente von D sei degeneriert zu einem Punkt. k sei die Familie der Kontinna $K \subset D$ mit der Eigenschaft: 3 Komponenten von $D-K$ sind Ringgebiete. M_i bezeichne den Modul des Ringgebietes D_i, das mit D die Randkomponente C_i gemeinsam hat $(i=1,2,3)$. Die Menge der möglichen Tripel (M_1, M_2, M_3) bei Zerlegung von D durch $K \in k$ wird bestimmt, ebenfalls die Menge der extremalen derartigen Tripel. Auf Zusammenhang mit anderen Problemen wird hingewiesen.

S. Jaenisch: Stückweise-lineare Approximationen ebener quasikonformer Abbildungen

In der reellen Ebene seien Netze N_m von Dreiecken Δ_{mn} gegeben, die sich für $m \to \infty$ überall auf Punkte zusammenziehen, und deren Winkel für $m,n=1,2,...$ von π entfernt bleiben. Zu jeder quasikonformen Abbildung f der Ebene auf sich entsteht durch Linearisierung in jedem der Dreiecke $\Delta_{m1}, \Delta_{m2}, \ldots$ eine stückweise lineare Abbildung $l(f|N_m)$.

Im Sonderfall von durch Halbierung feiner werdenden Netzen gleichseitiger Dreiecke gilt bei Maximaldilatation $K|f| < \sqrt{3}$: die $l(f|N_m)$ approximieren f (Ahlfors und Beurling, 1964); $K[l(f|N_m)] \leq$ gewisse Funktion $\xi(K[f])$, Gleichheit kann für ein m eintreten (Agard, 1966); wir haben ein Beispiel mit simultaner Gleichheit für alle m. Im allgemeinen Fall können wir solche Abbildungen g_m finden, daß die stückweise-linearen Abbildungen $l(g_m|N_m)$ gut gegen f konvergieren und sogar $K[l(g_m|N_m)] \leq K[f]$ haben.

W. Kaplan: Integrale gewöhnlicher Differentialgleichungen

Es werden Differentialgleichungen $\frac{dz_k}{dt} = F_k(z_1,...,z_n,t)$ betrachtet. Die z_k und t sind komplex und die F_k sind analytisch. Wir suchen Integrale der Differentialgleichungen, d.h. nichtkonstante Funktionen $\phi(z_1,...,z_n,t)$ die längs der Lösungskurven konstant sind. In einer vor kurzem erschienenen Arbeit hat der Verfasser gezeigt, daß im Falle $n = 1$ mit $F_1(z_1,t)$ ganz, ein solches Integral $\phi(z_1,t)$ im Großen existiert, wobei ϕ im allgemeinen mehrdeutig aber im ganzen Raum -eine Nullmenge ausgenommen- analytisch fortsetzbar ist. Dieses Ergebnis wird jetzt auf beliebiges n verallgemeinert: Es lässt sich ein vollständiges System von Integralen $\phi_k(z_1,...,z_n,t)$ finden, das wiederum im ganzen Raum -eine Nullmenge ausgenommen- existiert. Wenn die F_k von t unabhängig sind (autonomes System) und nur eine abzählbare Menge von gemeinsamen Nullstellen besitzen, kann man $n-1$ Integrale $\phi_k(z_1,...,z_n)$, $k = 1, ..., n - 1$, deren Jakobische Matrix den Rang $n-1$ hat, finden.

E. Lammel: Über die Koeffizienten in der Reihenentwicklung von $(s-1)\zeta(s)$ nach Potenzen von $s-1$

Mit Hilfe einer Abschätzung der Koeffizienten in der Reihenentwicklung von $(s-1)\zeta(s)$ nach Potenzen von $s-1$ wird gezeigt, daß $\zeta(s)$ in $|s-1| \leq 1$ keine Nullstellen besitzt.

A. J. Lohwater: A Distortion Theorem for a Class of Conformal Mappings

Let $f(z)$ map $|z| < 1$ conformally onto a domain D bounded by a rectifiable Jordan curve. D is called a Smirnow domain if the integral representation for $f'(z)$ does not contain a singular function [vide I. I. Privalow, Randeigenschaften analytischer Funktionen, Berlin, 1956, p. 181] . It is shown first that if D is not a Smirnow domain, then D is a radial limit value of $f'(z)$ on a non-denumerable set of radii. This theorem leads to several uniqueness theorems in the theory of harmonic functions.

J. E. McMillan: The angular derivative and boundary rotation in conformal mapping

Let $f(z)$ be a schlicht holomorphic function defined in the open upper half-plane H . As is well known, $f(z)$ has a finite angular limit $f(\xi)$ at almost all points ξ of the real axis. For each $f(\xi)$ define $\arg(w-f(\xi))$ continuously in the image domain $D = f(H)$. Then for almost all ξ either $f(z)$ has a (finite) nonzero angular derivative at ξ , so that in particular the mapping is isogonal at ξ , or $\arg(w-f(\xi))$ is unbounded above and below on each curve $A \subset D$ such that $A \cup \{f(\xi)\}$ is a Jordan arc.

A. Pfluger: Quadratische Differentiale und konforme Abbildung

Ein Gebiet G, das den Nullpunkt enthält, das entsteht durch Aufschneiden der Ebene längs endlich vielen fremden analytischen Schlitzen von ∞ her und zu dem eine Funktion

$$Q(w) = \frac{-1}{w^{n+1}} + \frac{A_1}{w^n} + \ldots + \frac{A_{n+1}}{w}$$

existiert mit $Q(w)dw^2 \geq 0$ längs dieser Schlitze, soll ein Schiffersches Schlitzgebiet heißen. Ist $v(w) = w + b_2w^2 + \ldots$ eine konforme Deformation (in $\mathbb{C}$) eines solchen Gebiets, ist

$$\zeta(w) = \int \sqrt{Q(w)}dw \;, \quad \phi(w) = \zeta(v(w)) - \zeta(w) = w^{\frac{1-n}{2}} \sum_{1}^{\infty} \alpha_k w^k$$

und C ein geschlossener Weg, der einmal im positiven Sinn den Nullpunkt umschließt und zwar so, daß sowohl C als auch $v(C)$ keine Nullstellen von Q umschließen, so gilt

$$(!) \qquad -2\pi \mathrm{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \phi(w)d\zeta(w) \right\} \leq - \frac{1}{2i} \oint_C \overline{\phi(w)}\, d\phi(w) \;.$$

J. Jenkins (Stockholmerbericht 1962) hat eine ähnliche Ungleichung gegeben, allerdings nur für spezielle C und ein Zusatzglied $o(1)$ (wenn sich C auf den Nullpunkt zusammenzieht).

Neben den Resultaten von Teichmüller $(v(w) = w+aw^n+\ldots)$ und Jenkins $(v(w) = w+b_l w^l+\ldots,\ l = \left[\frac{n}{2}\right] + 1)$ ergibt sich aus (!) das Folgende:

Es genüge $f(z) = z+a_2z^2+\ldots \in S$ einer Schifferschen Differentialgleichung

$$-Q(w)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = \sum_{\nu=1}^{2n-1} c_\nu z^{-n-2+\nu} \;, \quad c_\nu = \nu a_\nu \;, \quad \nu=1,\ldots,n \quad \text{und es}$$

bilde $\varepsilon \to f_\varepsilon$ ein Intervall $[0,\varepsilon_0]$ in S ab mit $f_\varepsilon = f + \varepsilon f_1 + O(\varepsilon^2)$. Ist dann $f_\varepsilon(z) = z+\ldots+a_n(\varepsilon)z^n+\ldots$, so gilt $\mathrm{Re}\left\{\frac{da_n}{d\varepsilon}(0)\right\} \leq 0$.

Ch. Pommerenke: <u>Über das Wachstum schlichter Funktionen</u>

Sei $f(z) = z + \ldots$ schlicht in $|z| < 1$.
Sei $A(R) = \{z : |f(z)| \geq R\}$. Es wird gezeigt, daß $\operatorname{cap} A(R) = \frac{1}{\sqrt{R}}$ ist, und zwar gilt entweder
(a) $\operatorname{cap} A(R) = o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$ $(R \to \infty)$, oder (b) es existiert eine in $|z| < 1$ sternförmige schlichte Funktion $g(z) = z + \ldots$, so daß

$$\left| \log \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq K \sqrt{\log \frac{1}{1-|z|}} \qquad (|z| < 1) .$$

Hieraus ergeben sich zwei Sätze, die Hayman 1958 in etwas anderer Form bewiesen hat.

A. Rényi: <u>Über die Potenzreihe ganzer Funktionen</u>

Es sei

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine beliebige ganze Funktion. Man setze

$$(2) \qquad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \qquad (r > 0)$$

und

$$(3) \qquad \mu(x) = \max_n |a_n| r^n \qquad (r > 0) .$$

Nach dem bekannten Satz von Wiman gilt

$$(4) \quad M(r) < \mu(r) \left(\log \mu(r)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\log \log \mu(r)\right)^{1+\varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ für alle Werte von r, die nicht zu einer Ausnahmemenge E von endlichem logarithmischen Maß gehören. Einen sehr einfachen wahrscheinlichkeitstheoretischen Beweis für den Wimanschen Satz hat P.C. Rosenbloom gegeben (s.P.C.Rosenbloom, Probability and entire functions, Studies in Mathematical Analysis and Related Topics, Essays in Honor of G. Pólya, Standford University Press, Standford 1962, 325-332).
In diesem Vortrag wurde über eine gemeinsame Arbeit von P. Erdös und dem Verfasser berichtet, in welcher -als Fortsetzung der Arbeit von Rosenbloom- bewiesen wurde, daß wenn man die Glieder

der Reihe (1) mit zufälligen Vorzeichen versieht, man in der Ungleichung (4) für fast alle Vorzeichenfolgen den Exponenten $\frac{1}{2}$ von $\log \mu(r)$ mit $\frac{1}{4}$ ersetzen kann. Mit anderen Worten gilt folgender

Satz 1. Es bedeute $R_n(t)$ die n-te Rademachersche Funktion, also $R_n(t) = \operatorname{sign}(\sin 2^n \pi t)$ $(n=0,1,\ldots;\ 0 \leq t < 1)$. Es sei $f(z)$ eine beliebige ganze Funktion mit der Potenzreihe (1) und man setze

$$(5) \qquad f(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_n(t) z^n .$$

Es sei

$$(6) \qquad M(r,t) = \max_{|z|=r} |f(z,t)|$$

und $\mu(r)$ sei durch (3) definiert.

Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ für fast alle Werte von t aus $(0,1)$

$$(7) \qquad M(r,t) < \mu(r)\left(\log \mu(r)\right)^{\frac{1}{4}}\left(\log\log \mu(r)\right)^{1+\varepsilon}$$

für alle Werte von r, die nicht einer Ausnahmemenge $E(\varepsilon,t)$ angehören, deren logarithmisches Maß endlich ist (d.h., es ist $\int_{E(\varepsilon,t)} \frac{dr}{r} < +\infty$).

Der Exponent $\frac{1}{4}$ kann durch keine kleinere Zahl ersetzt werden; doch kann man Satz 1 etwas verbessern dadurch, daß man $M(r,t)$ mit Hilfe der Funktion

$$(8) \qquad M_2(r) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

abschätzt. Es gilt nämlich der folgende

Satz 2. Es gilt für fast alle Werte von t

$$(9) \qquad M(r,t) < C_1 M_2(r)\left(\log\log \mu(r)\right)^{\frac{1}{2}}$$

wobei C_1 eine positive Konstante bedeutet, für alle Werte von r, ausgenommen für Werte, die einer Menge $E(t)$ von endlichem logarithmischen Maß angehören.

Für den Spezialfall $f(z) = e^z$ gilt für fast alle Werte von t

(10) $$M(r,t) < C_2 \frac{e^r \sqrt{\log r}}{\sqrt[4]{r}}$$

für $r \geq r_0(t)$; es gilt ferner für diesen Spezialfall auch

(11) $$\limsup_{r \to \infty} \frac{M(r,t) \sqrt[4]{r}}{\sqrt{\log r}} \geq C_3 > 0$$

für fast alle Werte von t .

Man kann für eine Klasse von gewissen Regularitätsannahmen genügenden Funktionen zeigen, daß (9) bestmöglich ist. Eine zu (9) ähnliche Ungleichung hat (für gewisse ganze Funktionen, deren Koeffizienten regelmäßig sind) zuerst Herr Paul Lévy bewiesen (s. P. Lévy, Sur la croissance des fonctions entieres, Bulletin de la Soc. Math. de France 58/1930/29-59 und 127-149). Paul Lévy hat die Reihe (1) anstatt mit zufälligen Vorzeichen mit zufälligen und unabhängigen Faktoren mit Absolutwert 1 multipliziert, deren Argumente im Intervall $(0,2\pi)$ gleich verteilt sind. Unsere Resultate lassen sich ohne Schwierigkeit für <u>beliebige</u> ganze Funktionen auch auf diesen Fall übertragen.

K. Rényi: <u>Über Werteverteilung ganzer Funktionen</u>

Sei $G(z)$ eine ganze Funktion; bezeichnen wir mit $z_j(a)$ $(j=1,2,\ldots)$ die z-Stellen, für welche $G(z_j(a)) = a$ gilt. Wir definieren die Menge $D(G)$ folgendermaßen:
$a \in D(G)$ dann und nur dann, wenn die Folge $\arg z_j(a)$ überall dicht in $[0,2\pi]$ liegt. Fragestellung: Zu welchen Mengen H gibt es ganze Funktionen $G(z)$ mit $D(G) = H$?
Wir kennen keine negative Antwort.
Positive Antwort gibt es in folgenden Fällen:

1) H : die offene Ebene. Dann gilt z.B. für $G(z)=\sin(\sin z)$
$D(G) = H$.

2) H : die offene Ebene ohne einen Wert a_0 . Dann gilt z.B. für $G(z) = a_0 + e^{\sin z}$ $D(G) = H$.

3) $H = \emptyset$. Dann gilt z.B. für $G(z) = e^z$ $D(G) = H$.

4) Satz von A. A. Goldberg: Sei H eine beschränkte, höchstens abzählbar unendliche, abgeschlossene Menge. Dann gibt es eine ganze Funktion $G(z)$ mit $D(G) = H$.

K. Stein: Holomorphe Korrespondenzen

Von H.Tornehave wurde bewiesen, daß jede holomorphe Überlagerungskorrespondenz des Einheitskreises auf sich Einschränkung einer algebraischen Korrespondenz $\overline{\mathbb{C}} \underset{k}{\to} \overline{\mathbb{C}}$ ist. Diese Aussage wird wie folgt erweitert:

Sei S_r der Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 0 < r < |z| < 1\}$, E die Einheitskreislinie, $f\_ : S_r \underset{k}{\to} \overline{\mathbb{C}}$ eine holomorphe Korrespondenz, für welche stets $f(z)$ mit z gegen E strebt. Dann ist f durch Spiegelung an E fortsetzbar. Konsequenzen:

1) Jede holomorphe Überlagerungskorrespondenz zwischen zwei Riemannschen Flächen von endlichem Typ ist von endlichem Typ. (Eine Riemannsche Fläche R bzw. eine holomorphe Korrespondenz f heiße von endlichem Typ, wenn die Homologiegruppen von R bzw. des Graphen von f endlich erzeugt sind).

2) Die Riemannsche Fläche R gestatte eine eigentliche holomorphe Abbildung auf den Einheitskreis. Dann sind je zwei meromorphe Funktionen $f_i : R \to \overline{\mathbb{C}}$ $(i=1,2)$ derart, daß $f_i(\zeta)$ gegen E strebt, wenn $\zeta \in R$ gegen ∂R geht, algebraisch abhängig.

A. Steiner: Randfunktionen auf endlichen Intervallen

Die Randfunktionen $f(x)$ analytischer Funktionen $f(z)$ der Hardy-Klasse H^2 in der oberen Halbebene bilden eine Klasse α quasianalytischer Funktionen der reellen Veränderlichen x im ursprünglichen weiten Sinn von Carleman: durch ihre Werte auf einem beliebig kleinen Intervall der x-Achse ist eine solche Funktion in ganzer Erstreckung bestimmt.

Durch Zurückführung auf die Auflösung der wohlbekannten Stieltjesschen Integralgleichung in $L^2(0,\infty)$ gelingt es, eine α-Funktion schon auf einem endlichen Intervall zu erkennen (die zugeordnete Stieltjessche Integralgleichung muß lösbar sein und ihre Lösung zwei einfache Nebenbedingungen erfüllen).

K. Strebel: Quasikonforme Selbstabbildungen des Einheitskreises, die den Rand festhalten.

Sei f eine quasikonforme Selbstabbildung des Einheitskreises U mit der komplexen Dilatation μ, die jeden Punkt des Randes ∂U festhält. Dann gilt für jede holomorphe Funktion g in U mit endlicher L^1-Norm die Ungleichung

$$\left| \iint_U \frac{\mu(z)g(z)}{1-|\mu(z)|^2}\, dx\, dy \right| \leq \iint_U \frac{|\mu(z)|^2 |g(z)|}{1-|\mu(z)|^2}\, dx\, dy\ .$$

Eine entsprechende Ungleichung läßt sich für solche Abbildungen angeben, die endlich viele Randpunkte festhalten.
Anwendung: Sei $w = f(z)$ eine quasikonforme Selbstabbildung von U mit der komplexen Dilatation κ, $|\kappa(z)| = k(z)$. Ist die inverse Abbildung f^{-1} eine verallgemeinerte Teichmüller-Abbildung mit der komplexen Dilatation $k(z(w))\dfrac{\overline{\psi}(w)}{|\psi(w)|}$, ψ holomorph mit $\|\psi\| < \infty$ so ist f eindeutig extremal. (D.h. eine Abbildung $\tilde{f}$ die auf ∂U mit f übereinstimmt und deren komplexe Dilatation die Ungleichung $|\tilde{\kappa}(z)| \leq k(z)$ f.ü. erfüllt ist notwendig gleich f.)
Zum Schluß folgen einige Betrachtungen über Teichmüllersche Abbildungen, die den Rand festhalten.

G. Warnecke: Über die Darstellung von Lösungen der partiellen Differentialgleichung $(1+\delta z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} = \delta - \varepsilon e^{2w}$ mittels holomorpher Funktionen

Alle komplexwertigen Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$(1+\delta z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} = \delta - \varepsilon e^{2w} \quad , \quad \delta = 0, \pm 1; \quad \varepsilon = \pm 1$$

lassen sich in einfach zusammenhängenden Gebieten mittels meromorpher Funktionen erzeugen. Interessante Darstellungen für reellwertige Lösungen folgen hieraus; die Frage nach der Existenz ganzer Lösungen kann vollständig beantwortet werden; ferner lassen sich Darstellungen für komplex- und reellwertige Lösungen mit isolierten Singularitäten gewinnen. Es ergeben sich Sätze für die Hebbarkeit von isolierten Singularitäten. Der Satz für reellwertige Lösungen entspricht dem Cauchy-Riemannschen Satz für harmonische Funktionen. Die zur Gewinnung dieser Resultate verwendeten Methoden benutzen die Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen.

J. Winkler: Ganze Funktionen mit regelmäßig verteilten Nullstellen

Lehto gab ein Kriterium für die Existenz von Ausfüllungskreisen und zeigte, daß ganze Funktionen der Ordnung $\lambda = 0$ existieren, die in folgendem Sinn kleine Ausfüllungskreise haben: Es existiert eine Punktfolge $z_\nu \to \infty$ so, daß für jedes ganze $k > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ die Kreisscheiben $|z-z_\nu| < \varepsilon |z_\nu|^{-k}$ Ausfüllungskreise sind; $w(z)$ erfüllt den Satz von Picard in diesen Kreisen. Es stellt sich die Frage, ob zu jedem λ mit $0 \leq \lambda \leq \infty$ Funktionen der Ordnung λ mit so kleinen Ausfüllungskreisen existieren. Für meromorphes $w(z)$ enthält die Literatur die positive Antwort. Für $0 \leq \lambda < \infty$ haben ganze Funktionen der Ordnung λ mit einer bestimmten regelmäßigen Verteilung der Nullstellen derart kleine Ausfüllungskreise. Dabei ergibt sich neben verschiedenen anderen Aussagen über die Werteverteilung dieser Funktionen auch die Existenz von ganzen Funktionen unendlicher Ordnung mit so kleinen Ausfüllungskreisen, wobei ein charakteristischer Unterschied von Funktionen endlicher und unendlicher Ordnung mit kleinen Ausfüllungskreisen deutlich wird.

H.Wittich, Karlsruhe

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft