Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht

Zahlentheorie

25. bis 31. März 1968

Unter der Leitung von Herrn Professor Dr. Th. Schneider fand in der Woche vom 25.3. bis 31.3.1968 eine Zahlentheorietagung im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach statt, die sich insbesondere mit rationaler, elementarer und analytischer Zahlentheorie, diophantischen Approximationen, transzendenten Zahlen und Geometrie der Zahlen beschäftigte. Das Interesse an dieser Tagung äußerte sich in der Teilnahme zahlreicher bedeutender Zahlentheoretiker aus dem In- und Ausland, in der Fülle von Anmeldungen, die aus rein technischen Gründen leider nicht alle berücksichtigt werden konnten, und in einem umfangreichen Vortragsprogramm. Alle Teilnehmer waren von der Oberwolfacher Atmosphäre sehr angetan. So kam ein reger Gedankenaustausch innerhalb und außerhalb des offiziellen Programms zustande, und wir sind sicher, daß Oberwolfach sich viele neue Freunde erworben hat.

Teilnehmer:

Bach, G., Braunschweig
Baker, A., Cambridge
Birch, B.J., Oxford
Blanksby, P.E., Cambridge
Bundschuh, P., Freiburg
Burgess, D.A. Nottingham
Coates, J., Cambridge
Cusick, I.W., Cambridge
Davenport, H., Cambridge
Elliott, P.D.T.A., Nottingham
Güting, R., Kampala
Härtter, E., Mainz
Halberstam, H., Nottingham
Harborth, H., Braunschweig
Holewijn, P.J., Delft
Huxley, M.N., Cambridge
Kanold, H.J., Braunschweig

Kubilius, J., Vilnius
Kuipers, L., Carbondale
Lewis, D.J., Ann Arbor
v.Lint, J.H., Eindhoven
Ljunggren, W., Oslo
Mahler, K., Canberra
Meijer, H.G., Amsterdam
Mordell, L.J., Cambridge
Nöbauer, W., Wien
Noordzij, P., Amsterdam
Pleasants, P.A.B., Cambridge
Popken, J., Amstelveen
Renyi, A., Budapest
Rieger, G.J., Buffalo
Schaal, W., Marburg
Scheid, H., Mainz
Schmidt, W.M., Boulder

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Schmidt, P., Marburg
Schneider, Th., Freiburg
Schwarz, W., Freiburg
Selberg, A., Princeton
Stark, H., Ann Arbor
Szüsz, P., New York
Tijdeman, R. , Amsterdam
Turan, P., Budapest
Turan-Sos, V., Budapest
Volkmann, B., Stuttgart
de Vroedt, C., Leiden
Wallisser, R., Freiburg.

Vortragsauszüge:

BACH, G.: Asymptotische Lokalisierung der Maximalglieder von Lösungen partieller Rekursionsformeln

Es werden partielle Rekursionsformeln der Form

$$w(m+1,n) = w(m,n-1)+f(n)w(m,n)$$

mit den Anfangsbedingungen $w(o,o)=1$, $w(m,n)=o$ für $m < n$ und für $n < o$ untersucht. Die Zahlen $w(m,n)$ lassen sich übersichtlich in Form eines Pascalschen Dreiecks anordnen (m=Zeilen-, n = Spalten- (=Schrägreihen-) Index). Für $f(n) = (n+1)$ $(o < \alpha$, reell) gilt dann die folgende Lokalisierung der Zeilenmaxima der Zahlen $w(m,n)$: Zu jedem $\epsilon > o$ gibt es ein $M(\epsilon)$ so, daß für alle $m > M(\epsilon)$ und alle $o \leq k \leq 1-\epsilon$, $1+\epsilon \leq k$ gilt

$$w(m,k\frac{m}{\log m}) < w(m,\frac{m}{\log m}) .$$

Für $f(n) = (n+1)^{\alpha}$ mit $o \leq \alpha \leq 1$ gibt es zu jedem m genau ein $N(m)$ so daß,

$$w(m,o) < w(m,1) < \ldots < w(m,N(m)) \geq w(m,N(m)+1) > w(m,N(m)+2) > \ldots > w(m,m).$$

Für $\alpha = 1$ stimmen die $w(m-1,n-1)$ mit den Stirlingschen Zahlen 2. Art $S(m,n)$ überein.

BAKER, A.: Some recent results in the theory of Diophantine equations

Recent results will be discussed relating to the solution of algebraic equations in two unknowns. In particular, an effective algorithm will be outlined for determining the totality of integers x,y satisfying equations of the type $f(x,y) = m$, where f denotes an irreducible binary form with integer coefficients and degree at last 3, and also for equations of the type $y^m = f(x)$ for appropriate polynomials f.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

BIRCH, B.J.: Complex quadratic fields of class-number one

Weber, in his Lehrbuch, proves various results on class invariants which were later applied by Heegner(Math. Zeitschrift 56 (1952)) to the solution of the class number one problem and to the construction of solutions for certain classes of Diophantine equations (see Stark's talk). Weber's methods were rather heavy, and difficult to extend. By quoting more recent results of the theory of complex multiplication, notably a paper by Söhngen (Math.Annalen 111 (1935)), it is possible to prove Weber's results, and more, rather simply; it is hoped that the simplification will enable one to make further applications.

At the end of the lecture, a survey was attempted of the methods used in the various solutions of the class number one problem.

BLANKSBY, P.E.: A Problem in Diophantine Approximation

Let $f(x,y)$ be a real indefinite binary quadratic form given by

$$f(x,y) = (ax + by)(cx + dy),$$

and α a non-zero constant, then we can define the following function

$$M(f;\alpha) = \inf_{\substack{x,y \neq 0,0 \\ \text{int.}}} |(ax + by)(cx + dy + \alpha)|.$$

If $f(x,y)$ does not represent zero, then we can formulate an arithmetic procedure to determine $M(f;\alpha)$ by considering the two-dimensional grid

$$V = ax + by$$
$$W = cx + dy + \alpha,$$

for integral x,y. The method is a modification of the divided-cell algorithm, and enables an evaluation of the constant

$$k = \sup_{f,\alpha \neq 0} \frac{M(f;\alpha)}{\Delta}$$

where $\Delta = |ad - bc|$, The supremum is in fact attained.

Further, if $0 \leq k' < k$, then there are uncountably many forms f, each for which there is at least one corresponding $\alpha \neq 0$, such that

$$M(f;\alpha) = k'\Delta.$$

BUNDSCHUH, P.: Eine arithmetische Aussage über unendliche Produkte

Es wird bewiesen der

Satz: Sie $D < o$ ganzrational und quadratfrei; $\mathbb{K} = Q(\sqrt{D})$; sei $q \in \mathbb{K}$, q ganz mit (Norm von q) > 1.
Die ganze Funktion $f(z)$ genüge der Funktionalgleichung

$$f(z) = (1 - \frac{z}{q})\, f(\frac{z}{q}) \text{ mit } f(o) = 1.$$

Sei $a \in C$, $a \neq o$ und $a \neq q^n$ für alle natürlichen n.
Dann sind a und $f(a)$ nicht gleichzeitig $\in K$.

Zum Beweis wird die Gelfond'sche Methode der Entwicklung von $f(z)$ in eine Interpolationsreihe verwendet; die Entwicklungskoeffizienten werden nach oben und (wenn sie nicht verschwinden) nach unten abgeschätzt.

BURGESS, D.A.: Semigroups of congruence classes

The topic is a characterisation of finite semi-groups which can be embedded isomorphically in the multiplicative semigroup of the residue classes to some integer modulus (to be called arithmetical semigroups). The characterisation is in terms of a certain set of representations which form a natural generalisation of Abelian group characters.

Applications are given to show both the existence of non-arithmetical finite commutative semigroups, and that certain extensive classes of semigroups are arithmetical.

COATES, J.: Integral points on curves

The basic result announced is the following. Let $f(x,y)$ be an irreducible binary form with integer coefficients and degree $n \geq 3$. Let $p_1,\dots,p_s$ be any s prime numbers. Let m be any integer and $\mathfrak{M}$ the largest divisor of m which is comprised solely of powers of $p_1,\dots,p_s$. Let K be a fixed real number satisfying

$$K > n(s+1) + 1.$$

Theorem 1: If x,y are integers, with $(x,y,p_1,\dots,p_s) = 1$, satisfying

$$f(x,y) = m,$$

then

$$\max(|x|, |y|) < C\, e^{(\log \frac{|m|}{\mathfrak{M}})^K},$$

where C is an effectively computable number depending on $n, f, p_1, \ldots, p_s$ and K, but not on m.

The proof of this theorem uses a combination of Baker's analytic techniques for the study of the complex logarithms of algebraic numbers, together with analogous analytic techniques for the study of the p-adic logarithms of algebraic numbers.

It was also announced that an explicit algorithm has been established for determining all integer points on a curve of genus 1. On the other hand, for curves of genus greater than 1, it does not seem that Baker's method is strong enough to give such an algorithm.

DAVENPORT, H.: Eine Bemerkung zum Thueschen Satz

Der Satz von Thue lautet: für eine algebraische Zahl θ vom Grade $r \geq 3$, und für $K > \frac{1}{2} r + 1$, kann es höchstens endlich viele reduzierte Brüche p/q geben, für welche

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^K} \quad .$$

Es ist manchmal behauptet worden, daß man eine Zahl q_0 explizit bestimmen kann, so daß die Ungleichung höchstens eine Lösung mit $q > q_0$ besitzt; aber diese Behauptung scheint nicht gerechtfertigt zu sein. Ich zeige, daß eine solche Behauptung jedoch stimmt, wenn man eine etwas stärkere Voraussetzung bez. K macht.

ELLIOTT, P.D.T.A.: Some applications of Probability to Number Theory

Analogies between classical theorems in the distribution of rational prime numbers, and certain simple probabilistic results are discussed.

GÜTING, R.

K. Mahler hat 1932 für reelle und nicht reelle Zahlen γ die Funktionen $w_n(\gamma)$ eingeführt, die als Ausgangspunkt für seine Einteilung der komplexen Zahlen in vier Klassen dienen. Die folgenden Fragen wurden erörtert:

1. Ist γ gegeben, wie kann man $w_n(\gamma)$ bestimmen ?
2. Was läßt sich über die Werte der Funktion w_n aussagen ?

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

3. Was für eine Beziehung besteht zwischen $w_n(\gamma)$ und $w_m(\gamma)$, $n \neq m$?

Die Fragen 1) und 2) waren im Falle n = 1 schon früher behandelt worden (Math.Z. 90). Für $n > 1$ wurden Bedingungen angegeben, unter denen sich $w_n(\gamma)$ bestimmen läßt. Ferner gilt: Ist $c > n^2 + 3n - 2$, so existieren Zahlen γ mit $w_n(\gamma) = c$. Zur Frage 3) wurde angegeben, daß es zu natürlichen Zahlen p,q $(p < q)$ und zu genügend großem d stets Zahlen γ gibt, für die $w_p(\gamma) = w_{p+1}(\gamma) = \dots = w_q(\gamma) = d$ ist.

HÄRTTER, E.: Darstellungen natürlicher Zahlen durch Differenzen

Neben der Addition von Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen wurden insbesondere auch Differenzen von Mengen betrachtet. Untersuchungen über Differenzbasen für endliche Abschnitte der Folge natürlicher Zahlen führten durch A.Brauer (1945), Rédei-Rényi (1949), Erdös-Gal (1948), Leech (1956), Haselgrove-Leech (1957), Wichmann (1963).- Wird die Differenz zweier Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ definiert als $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \{a-b \mid a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B}, b \leqq a\}$, so stellt sich die Frage, wie die Dichte der Menge $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ von den Dichten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abhängt. Beispiele zeigen, daß ein Analogon zum Mannschen Satz nicht gilt, aber eine schwächere Aussage, die der Landauschen Dichteabschätzung entspricht, läßt sich herleiten. - Die eingeschränkte Differenz $\mathfrak{A} \ominus \mathfrak{B}$ der Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ soll erklärt werden durch $\{a-b \mid a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B}, b \leqq a-b\}$. Wenn $\mathfrak{A} \ominus \mathfrak{A} = \mathfrak{G} = \{0,1,2,3,\dots\}$ gilt, heißt $\mathfrak{A}$ eingeschränkte Differenzbasis für $\mathfrak{G}$. Es gibt eingeschränkte Differenzbasen $\mathfrak{A}$ für $\mathfrak{G}$ mit $A(x) < 4\sqrt{x}$. Auch Betrachtungen über Minimalbasen lassen sich hier durchführen.

HALBERSTAM, H.: Siebmethoden und Anwendungen

Some account of the improvements in the Brun-Selberg sieve method announced in Halberstam, Jurkat and Richert C.R. Acad.Sci.Paris 264 (1967), 920-923, together with a a description of several applications. Comments on the standing of the method in relation to the principal conjectures of additive prime number theory.

HARBORTH, H.: Aufeinanderfolgende, zu n nicht teilerfremde Zahlen

Die zahlentheoretische Funktion g(n) läßt sich definieren als kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß in jeder Sequenz von n natürlichen Zahlen mindestens eine zu n teilerfremde vorkommt. Die Werte für g(n) hängen nur von den in n ent-

haltenen Primfaktoren ab. Durch Abschätzungen von g(n) lassen sich Aussagen über die Primzahlverteilung gewinnen und umgekehrt. Im besonderen hofft man auf eine möglichst niedrige Linnik-Konstante L (mindestens eine Primzahl in der arithmetischen Progression a + vd, (a,d) = 1, die kleiner als d^L ist).

KANOLD, H.J.: Über eine Klasse von diophantischen Gleichungen

Bei Untersuchungen über spezielle befreundete Zahlenpaare wird man auf einen besonderen Typ von diophantischen Gleichungen geführt. Es läßt sich nun zeigen, daß man eine Klasse diophantischer Gleichungen der Gestalt

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu x^\nu = y^2$$

mit elementaren zahlentheoretischen Methoden untersuchen kann. Das Ergebnis ist das folgende: Solche Gleichungen können höchstens endlich viele ganzzahlige Lösungen besitzen, wenn für die ganzzahligen Koeffizienten a_ν noch einige einfache Voraussetzungen erfüllt sind.

KUBILIUS, J.: On the distribution of values of multiplicative functions

In cooperation with A. Bakstys the following result was proved. Let g(m) be a real-valued multiplicative function. Assume that there exists a constant c > 1 such that the series

$$\sum_{|g(p)|\geq c} \frac{1}{p}\ , \quad \sum_{0<|g(p)|\leq \frac{1}{c}} \frac{1}{p}\ , \quad \sum_{\frac{1}{c}<|g(p)|<c} \frac{\ln|g(p)|}{p}\ ,$$

$$\sum_{\frac{1}{c}<|g(p)|<c} \frac{\ln^2|g(p)|}{p}$$

converge. Then g(m) has an asymptotic distribution function.

The converse of this theorem was proved in case of non-symmetric asymptotic functions.

KUIPERS, L.: A remark on the Weyl-Schoenberg criterion in the of asymptotic distribution mod 1

Let $u_1, u_2, \ldots$ be a sequence of distinct numbers between 0 and 1. Let $g(x)$ be a (distribution) function, non-decreasing, with $g(0) = 0$ and $g(1) = 1$. $g(x)$ may have points of discontinuity but not coinciding with $0, 1, u_1, u_2, \ldots$.

Let $A(N) = A(N,x)$ denote the number of $u_1, \ldots u_N$ with $0 \leq u_i < x$.

Define: $R(x,N) = A(N) - Ng(x)$. Then we have:

$$\int_0^1 (R(x,N)|N)^2 dx = (\int_0^1 (R(x,N)|N) dx)^2$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^{-2\pi i h u_k} - \int_0^1 e^{-2\pi i h x} dg(x) \right|^2 ,$$

for every N, and every $h = 1, 2, \ldots$.
From this relation the Weyl-Schoenberg criterion can be derived, valid for noncontinuous d.f. $g(x)$.

LEWIS, D.J.: Value Sets of Polynomials

A report on investigations into how various restraints on the set of values of a polynomial on the integers effects the shape of the polynomial. Trivial examples being the following: (1) If $f(Z) \subset Z^a Z^b \ldots Z^c$ then $f = g^a h^b \ldots k^c$. (2) If, for all large p, $f(Z_p) = Z_p$ then f is linear. Somewhat more interesting on the results of Davenport, Schenzel and Lewis where they give conditions for when $f(Z^+) \subset$ Normgroup $\cap$ Z implies $f = \text{norm}\ (\Sigma\, \omega_i h_i(x))$. If $\underline{X} = \{x_0 \text{ in } Z \mid f(x_0, y) = 0 \text{ is solable in } Z\}$ and $\underline{X}$ has positive density then there exists $h(x) \in Q[x]$ so that $f(x, h(x)) \equiv 0$. The conclusion holds even if $\underline{X}$ has zero density but is distributed with "arithmetic regularity". The regularity condition implies that for all primes p and each p-adic integer x, $f(x,y) = 0$ is soluble in p-adic integers. However, these local conditions need not imply $h(x)$ has rational coefficients but seem to imply we can find h with algebraic coefficients. M. Fried has been investigating the restraint $f(Z_p) \subset g(Z_p)$ for all large p. With additional assuptions he gets $f(x) = g(h(x))$, where h has algebraic coefficients.

VAN LINT, H.J.: Über ein Problem des Diophantus

Gesucht sind 4 Zahlen (rational, ganz-rational), so daß das Produkt je 2 verschiedener plus 1 ein Quadrat ist. Ein sehr bekanntes Beispiel ist {1, 3, 8, 120}. Ich berichte von meinem Versuch zu beweisen, daß, wenn {1, 3, 8, N} so eine Menge ist, dann N = 120 sein muß. Das Problem führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} N + 1 &= x^2 \\ 3N + 1 &= y^2 \qquad (1) \\ 8N + 1 &= z^2 . \end{aligned}$$

Unter Benutzung der Maschine EL - X 8 wurde gezeigt, daß (1) keine Lösungen $N > 120$ besitzt, für die $N < 10^{2200}$.

Aus (1) folgt weiter, daß $5x^2 - 7y^2 = -2z^2$, und $y^2 - 3x^2 = -2$ gilt. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man eine Gleichung vom Grad 4 in zwei Variablen, die nach den Ergebnissen von A. Baker keine ganzzahlige Lösung besitzt, für die $N > N_0$ mit $N_0 \sim N^{10^8}$ ist.

Wenn man die Schranken 10^{2200} und 10^{10^8} noch ein wenig verbessert, so ist bewiesen, daß N = 120 die einzige Lösung von (1) ist.

LJUNGGREN, W.: On the diophantine equation $Ax^4 - By^2 = C$ $(C = 1;4)$

Let the odd positive integers A and B have the property that the diophantine equation (1) $Az_1^2 - Bz_2^2 = 4$ has solutions in odd positive integers z_1, z_2, and let further a,b denote the least solution of this kind. We prove the following theorem:

The diophantine equation (2) $Ax^4 - By^2 = C$ $(C = 1;4)$ has at most one solution in positive integers x,y if C = 1 and at most two such solutions if C = 4. If x_1, y_1 is a solution of (2), then

$$C^{-\frac{1}{2}}\left(x_1^2 A^{\frac{1}{2}} + y_1 B^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\left(aA^{\frac{1}{2}} + bB^{\frac{1}{2}}\right)\right)^n$$

with n = 3 if C = 1 and n = 1, 3 or 5 if C = 4.

The first part of this theorem was proved by the author in 1951. The second part is new and gives a simple way of obtaining all possible solutions.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

MAHLER, K.: Über einen falschen Beweis

Die neuen tiefen Methoden von A.B. Shidlovski führen zu sehr allgemeinen Ergebnissen über transzendente Zahlen, die aber nicht immer richtig sind. Der Vortragende erklärt seinen falschen Beweis für die Transzendenz der Eulerschen Konstanten und zeigt, was sich beweisen läßt.

MEYER, H.G.: Die Gleichverteilung p-adischer Zahlen

Es sei Z_p der Ring der ganzen p-adischen Zahlen. Wir definieren die Begriffe Gleichverteilung und Diskrepanz für Folgen in Z_p, und eine Abbildung φ von Z_p auf $[0,1)$. Es gibt dann eine einfache Relation zwischen der Diskrepanz einer Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in Z_p und der Diskrepanz der Folge $(\varphi(a_n))_{n=1}^{\infty}$ in $[0,1)$. Die Folge $(n)_{n=1}^{\infty}$ der natürlichen Zahlen ist z.B. gleichverteilt in Z_p, ihre Diskrepanz ist minimal und die Folge $(\varphi(n))_{n=1}^{\infty}$ ist eine bekannte reelle Folge (die sogenannte van der Coput -Folge).

MORDELL, L.J.: The diophantine equation $x^4 + y^4 = 1$ in algebraic number fields

An elementary proof is given of Faddeev's recent results on the solvability of the equation

$$x^4 + y^4 = 1 \qquad (1)$$

in quadratic and cubic fields K. In the rational field Q, the only solutions are

$$x = \pm 1, \quad y = 0; \quad x = 0, \quad y = \pm 1. \qquad (2)$$

When K is a quadratic field, solutions other than (2) occur only when

$$\left.\begin{array}{l} K = Q(i), \quad x = \pm 1, \; y = 0; \; x = 0, \; y = \pm i, \\ K = Q(\sqrt{-1}), \quad x = \epsilon_1 \frac{(i + \epsilon\sqrt{-1})}{2}, \quad y = \epsilon_2 \left(\frac{1-\epsilon\sqrt{-1}}{2}\right) \\ \text{where } \epsilon^2 = \epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = 1. \end{array}\right\} \quad (3).$$

When K is a cubic field, the only solutions are those given by the intersection of (1) with arbitrary rational lines through one of the points (2), e.g., for one set, with rational t,

$$y = 1 + t_4, \; (t^4+1)x^3 + 4t^3x^2 + 6t^2x + 4t = 0_1.$$

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

NÖBAUER, W.: Permutationspolynome und Polynompermutationen

Es sei r ein kommutativer Ring mit Einselelement. Ein Polynom f(x) über r heißt Permutationspolynom von r, wenn die Abbildung u → f(u) eine Permutation von r ist; ein ganzzahliges Polynom f(x) heißt Permutationspolynom mod n(natürliche Zahl), wenn es Permutationspolynom des Restklassenringes mod n ist. Es wird über verschiedene Untersuchungen berichtet, die sich auf Permutationspolynome beziehen und unter anderem folgende Fragen behandeln: Bedingungen dafür, daß ein gegebenes Polynom Permutationspolynom ist; ganzzahlige Polynome, welche für unendlich viele Primzahlen Permutationspolynome sind; Konstruktion von ganzzahligen Polynomen, die genau für eine vorgegebene Menge von natürlichen Zahlen Permutationspolynome sind.

Eine Permutation p des Ringes r heißt Polynompermutation, wenn sie sich mittels eines Polynoms f(x) über r in der Gestalt u → f(u) schreiben läßt; den kleinstmöglichen Grad eines Polynoms f(x), mit dem so eine Darstellung von p möglich ist, nennt man den Grad von p.

Ist r endlich, dann bildet die Menge aller Polynompermutationen von r eine Untergruppe G der symmetrischen Gruppe von r. Es werden für den Fall, daß r Restklassenring mod n oder Galoisfeld ist, einige Ergebnisse über die Struktur von G und von gewissen Untergruppen von G sowie über die Gradverteilung in G zusammengestellt.

PLEASANTS, P.A.B.: The integers represented by a cubic form

Let $C(x) = C(x_1,\ldots,x_n)$ be a cubic polynomial in n variables (not necessarily homogeneous) with integer coefficients. The invariant h(C) is defined to be the smallest integer for which the cubic part of C can be expressed as a sum of h(C) reducible cubic forms; so that $1 \leq h(C) \leq n$. Davenport and Lewis have proved that if $h(C) \geq 17$ then the equation

$$C(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

is soluble in integers if and only if it is soluble in p-adic integers for every prime p. It follows that if N is an integer and $h(C) \geq 17$ then the equation

$$C(x_1,\ldots,x_n) = N \qquad (1)$$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

is soluble in integers if and only if it is soluble in p-adic integers for all p. With the weaker assumption that $h(C) \geq 12$ but the added condition that C is a homogeneous form the following "almost all" result can be obtained:

The number of integers N in the range $0 \leq N \leq X$ for which the equation (1) is soluble in p-adic integers for all p but is insoluble in rational integers is $O(X^{1-\Delta})$ for some $\Delta > 0$.

Assuming only that $h(C) \geq 8$ it can also be shown that C represents a finite proportion of the integers in the given range. The proofs of these results depend on the Hardy-Littlewood method of exponential sums.

POPKEN, J.: <u>Ein Maß für die Differential - Transzendenz der der Riemannschen Zeta - Funktion</u>

Für viele tranzendente Zahlen hat man in den vergangenen Jahren "Transzendenzmasse" bestimmt. Die Idee hinter all dieser Arbeit ist, daß Sätze sowie " e und π sind transzendent" in Wirklichkeit rein negative Aussagen sind und daß solche Sätze durch mehr prezisen positiven Inhalt ersetzt werden sollten.

Hier handelt es sich um eine analoge Fragestellung aus einem etwas anderen Problemkreis. Wohl bekannt ist, daß gewisse fundamentale Funktionen - sowie die Gamma - Funktion (Hölder) und die Zeta - Funktion (Hilbert) - differential tranzendent sind, d.h., daß sie keiner algebraischen Differentialgleichung genügen. Der Hilbertsche Satz über die Zeta - Funktion soll hier durch eine mehr positive Aussage ersetzt werden.

RIEGER, G.J.: <u>Arithmetische Eigenschaften der Folge $[n^c]$</u>

Es sei c eine reelle Zahl mit $1 < c < 2$. Unter anderem wird bewiesen, daß die Folge der Zahlen

$[n^c] + p$ ($n > 0$ ganzrational, p prim) für festes c positive Dichte hat.

SCHAAL, W.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Erdös-Fuchs auf reell-quadratische Zahlkörper

Es sei K ein reell-quadratischer Zahlkörper und A eine unendliche Folge von total positiven Zahlen $\alpha_i \in K$, ferner sei noch $0 \in A$.

Für ganze Zahlen $\xi \in K$ setze man
$$f(\xi) = \sum_{\substack{(i,j) \\ \alpha_i+\alpha_j=\xi \\ \alpha_i,\alpha_j \in A}} 1 ,$$

$$F(x,x') = \sum_{\substack{0 \leq \xi \leq x \\ 0 \leq \xi' \leq x'}} f(\xi), \quad x,x' > 0.$$

Die Folge A besitze die Eigenschaft:
$$F(x,x') = c\cdot(xx') + r(x,x'), \quad c > 0,$$
und $r(x,x')$ sei eine Funktion von xx'. Dann gilt der Satz:
$$r(x,x') \neq o\left(\frac{(xx')^{1/4}}{\log(xx')}\right) \quad \text{für } xx' \to \infty$$

Der Beweis ergibt sich durch Verallgemeinerung des Lemmas von Erdös-Fuchs (J. London Math.Soc. 31, 1956, S.69) auf den Körper K und durch Abschätzungen der durch Hecke eingeführten verallgemeinerten geometrischen Reihe. Der Satz läßt sich z.B. auf das Kreisproblem im Körper K anwenden (W. Schaal, Math. Ann., 145, 1962, S. 273-284).

SCHEID, H.: Eine ordnungstheoretische Verallgemeinerung des Ringes der zahlentheoretischen Funktionen

Die bekanntesten Ringe zahlentheoretischer Funktionen, die man mit den verschiedenen Definitionen eines Faltproduktes (Dirichlet-, unitäres Dirichlet-, kgV-, Cauchy-, Lucas- Produkt) erhält, werden in einen verallgemeinernden Zusammenhang gestellt, indem man komplexwertige Funktionen über den Intervallen einer lokal endlichen Halbordnung betrachtet. Für diese ist neben der Addition ein Faltprodukt derart erklärt, daß ein i.a. nichtkommutativer und nicht nullteilerfreier Ring mit 1-Element entsteht. Es werden die Eigenschaften gewisser Teilringe (z.T. in Abhängigkeit von der zugrundegelegten Halbordnung) untersucht und gewisse zu den bekanntesten Ringen zahlentheoretischer Funktionen isomorphe Teilringe konstruiert. Diese Einbettung erleichtert vielfach das Auffinden von Identitäten für zahlentheoretische Funktionen.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

SCHMIDT, P.G.: Über die Anzahl abelscher Gruppen gegebener Ordnung

$A(x)$ bezeichne die Anzahl der wesentlich verschiedenen abelschen Gruppen, deren Ordnung x nicht übersteigt. Nach geeigneten elementaren Vorbereitungen [1] wird mit Hilfe der Van Der Corput-Methode zur Abschätzung zweidimensionaler Exponentialsummen die asymptotische Formel

$$A(x) = A_1 x + A_2 x^{\frac{1}{2}} + A_3 x^{\frac{1}{3}} + O(x^{\frac{7}{27}} \log^2 x)$$

bewiesen [2], worin A_1, A_2, A_3 gewisse Konstanten bezeichnen.

---

1) Vgl. P.G. Schmidt, Zur Anzahl abelscher Gruppen gegebener Ordnung I, erscheint in Crelles J..

2) Vgl. ------, -------- II, erscheint in Acta Arithmetica.

SCHMIDT, W.M.: Unregelmäßigkeiten der Verteilung

Gegeben seien N Punkte auf der n-dimensionalen Sphäre. Falls A eine Menge auf der Sphäre mit relativem Maß $\mu(A)$ ist, so sei $\nu(A)$ die Anzahl der gegebenen Punkte, die in A liegen, und die "Diskrepanz" $\Delta(A)$ sei $|\nu(A) - N\,\mu(A)|$.
Es gibt nun einen "Schnitte" S (= Durchschnitt von zwei Halbsphären) mit

$$\Delta(S) \geqq \begin{cases} c\sqrt{\log N} & \text{falls } n = 2, \\ c(n) N^{(n-2)/2n} & \text{falls } n > 2 \text{ ist.} \end{cases}$$

Dieser und ähnliche Sätze sind einem Satz von K.F. Roth über Verteilungsunregelmäßigkeiten in einem Würfel ("On irregularities of distribution") verwandt.

SCHWARZ, W.: Eine Anwendung des Satzes von Weierstraß-Stone in der elementaren Zahlentheorie (eine Arbeit von (W. Schwarz und J. Spilker)

Ist W die Menge der mod k geraden Funktionen $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, und U der von den RAMANUJANsummen c_q mit q/k aufgespannte Vektorraum, so gilt $W = U$ (E. COHEN 1955). Dieser Satz wird nun aus dem

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

WEIERSTRASS-STONEschen Approximationssatz gefolgert und verallgemeinert. Mit elementaren Sätzen über HILBERTräume erhält man dann:

Sei P eine endliche Menge von Primzahlen, T die Menge aller nur aus Primzahlen aus P zusammengesetzten natürlichen Zahlen; $t(n)$ bezeichne den größten in T enthaltenen Teiler von n. Dann läßt sich jede Abbildung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f(n) = f(t(n))$ und mit endlicher Norm

$$\| f \| := \left\{ \sum_{t \in T} |f(t)|^2 \, t^{-1} \cdot \prod_{p \in P} (1-p^{-1}) \right\}^{1/2}$$

darstellen als

$$f(n) = \sum_{q \in T} \alpha_q \cdot c_q(n),$$

wobei die Reihe für jedes n konvergiert.

SELBERG, A.: Some remarks on the Riemann Zeta-function

1. An approximate formula for $\log \zeta(s)$ is given, which makes it possible to determine asymptotically certain mean values on the line $s = \frac{1}{2} + it$. In particular it follows that

$$\frac{\log \zeta(\frac{1}{2} + it)}{\sqrt{\log \log |t|}}$$ has a Gaussian distribution function.

2. A method is indicated which leads to improved estimates for $N(\sigma, T)$, the number of seros $\rho = \beta + i\gamma$ of $\zeta(s)$, with $\beta > \sigma$, $|\gamma| < T$; and to improved estimates for the maximum order of the difference of the consecutive primes.

STARK, H.: Complex quadratic fields of class-number one

The problem of finding all the complex quadratic fields of class-number one was completely settled last year. However, before this, K. Heegner gave a solution which has been universally judged to be incomplete. We discuss here how to complete Heegner's proof.

SZÜSZ, P.: Über einen Kusminschen Satz

Es wurde über die in der metrischen Kettenbruchlehre auftretende rekursive Formel

$$(*) \qquad m_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right) \right\}$$

berichtet. Als neues Resultat wurde insbesondere der Beweis der Tatsache skizziert, daß falls $m_0(x)$ einmal stetig differenzierbar ist und $m_0(0) = 0$, $m_0(1) = 1$ gilt und $m_1(x), \ldots$ durch (*) definiert sind so gilt

$$(**) \qquad \lim_{n \to \infty} m_n'(x) = \frac{1}{\log 2} \, \frac{1}{1+x} \;;$$

gilt außer der Stetigkeit von $m_0'(x)$ auch

$$m_0'(x) \in \mathrm{Lip}\,[\text{illegible}] \qquad ([\text{illegible}] > 0),$$

so kann man statt (**) die schärfere Aussage

$$(***) \qquad m_n'(x) = \frac{1}{\log 2} \circ \frac{1}{1+x} + O(q^n)$$

machen, wobei q von [illegible] abhängt, aber jedenfalls kleiner als 1 ist.

Bisher mußte man um (**) zu sichern, die zweimalige stetige Differenzierbarkeit von $m_0(x)$ voraussetzen.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

TURAN, P.: Über einige Probleme der statistischen Gruppentheorie

Der statistische Gesichtspunkt in der Algebra führt bei endlichen Gruppen auf die Untersuchung der symmetrischen Gruppe S_n. In Zusammenarbeit mit Paul Erdös wurden unter anderem folgende Resultate gewonnen:

Ist P eine Untergruppe von S_n der Ordnung O(P), so gilt für die Anzahl K(n,x) der $P \in S_n$ mit der Eigenschaft

$$\log O(P) \leq \frac{1}{2} \log^2 n + \frac{x}{\sqrt{3}} \log^{3/2} n, \quad (x \text{ fest})$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{K(n,x)}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda \quad ;$$

für den gemeinsamen Wert O(H) der Ordnungen O(P) einer Klasse H konjugierter Elemente in S_n gilt dagegen für $n \to \infty$

$$\log O(H) = (A + O(1))\sqrt{n} \quad , \qquad (A \text{ constant})$$

für "fast alle" Klassen H. Für "fast alle" Klassen H ist O(H) durch jede Primzahlpotenz q^α teilbar, für welche

$$q^\alpha \leq \frac{2\pi}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{n}}{\log n} \left\{1 + 5 \frac{\log \log n}{\log n} - \frac{\omega(n)}{\log n}\right\}, \quad \omega(n) \to \infty$$

gilt, und jeder Primteiler von O(H) ist nicht größer als

$$\frac{\sqrt{6}}{2\pi} \sqrt{n} \log n \left\{1 - 2 \frac{\log \log n}{\log n} + \frac{\omega(n)}{\log n}\right\}$$

(beide Resultate sind bestmöglich in einem starken Sinne); alle kommutativen Gruppen einer Ordnung $\leq n$, können schon in S_m eingebettet werden, wobei

$$m = \left[\frac{n}{\Psi(n)}\right] \text{ und } \lim_{x \to \infty} \frac{\log \Psi(x)}{\log x} \to 0$$

(das Resultat ist bestmöglich),

In jeder Gruppe G der Ordnung N ist die Anzahl der vertauschbaren Elementepaare wenigstens N log log N (log zur Basis 2); eine Gruppe kann also nicht "allzu nichtkommutativ" sein.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

TURAN-SOS, Vera: On a theorem of H. Kesten

The theorem in question, which was conjectured by Erdös and Szüsz asserts s a converse of a theorem of Hecke, that the discrepancy of the sequence $\langle n\,\alpha\rangle$ (α irrational, $\langle n\,\alpha\rangle$ fractional part of $n\,\alpha$) is bounded only for intervals of length $\langle k\,\alpha\rangle$ for some integer k. In the lecture an explicit expression was indicated, obtained on a geometric way, for the discrepancy of the same sequence for an arbitrary interval of length β which gives Kesten's theorem and some other remarks. E.q. the fact, that if α has bounded "dig its" than the discrepancy is $< c(\alpha) \log n$. The formula permits to show that for $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ the constant c is < 1, i.e. the discrepancy is less than that of the van der Corput sequence.

TIJDEMAN, R.: Über neue Ergebnisse in der Theorie der Exponentialsummen

Es seien $b_1, b_2, \ldots b_m$ und $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ irgendwelche komplexe Zahlen. P. Turán hat untere Abschätzungen vom Maximum

$$\max_{j=n+1,\ldots,n+m} \left| \sum_{k=1}^{m} b_j \exp(j\omega_k) \right|$$ gegeben. Man kann diese Resultate so verallgemeinern, daß man übereinstimmende untere Abschätzungen vom Maximum $\max_{j=n+1,\ldots,n+\sigma} \left| \sum_{k=1}^{m} P_k(j) \exp(j\omega_k) \right|$ bekommt, wobei die P_k's Polynome sind mit der Summe der Graden nicht größer als $\sigma - m$. Die Sätze von Turán sind auf verschiedenen Gebieten der Zahlentheorie und der Analysis angewendet, u.a. von S. Dancs u. P. Turán um eine obere Abschätzung der Nullstellenanzahl von der Funktion $\sum_{k=1}^{m} P_k(z) \exp(\omega_k z)$ in einem Kreise mit einem Radius R zu bestimmen. Man kann diese Abschätzung mit der genannten Verallgemeinerung so verbessern, daß sie nur von R, σ und $\max_{k=1,\ldots,m} |\omega_k|$ abhängt. Für $R \to \infty$ ist das Resultat mit einer asymptotischen Abschätzung von G. Pólya vergleichbar.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

de VROEDT, C.: Ziffernverteilung bei Dezimalbrüchen, Kettenbrüchen und Luroth-Reihen

Sei x eine reelle Zahl ($0 \leq x \leq 1$).

A) Sei $\theta_o(x) = x$

$$a_{n+1}(x) = [g\ \theta_n(x)] \text{ und } \theta_{n+1}(x) = g\ \theta_n(x) - a_{n+1}(x) \quad \binom{g \text{ ganz} \geq 2}{n=o,1,2,\ldots}$$

Es gilt:
$$P\left\{ \limsup_{N \to \infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n - \frac{g-1}{2} N}{\sqrt{N \log\log N}} = \sqrt{\frac{g^2-1}{6}} \right\} = 1$$

und:
$$P\left\{ \limsup_{N \to \infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \theta_n - \frac{1}{2} N}{\sqrt{N \log\log N}} = \sqrt{\frac{g+1}{6(g-1)}} \right\} = 1.$$

B) Sei $\theta_o(x) = x$

$$\theta_{n+1} = \frac{1}{\theta_n(x)} - \left[\frac{1}{\theta_n(x)}\right] \quad \text{falls } \theta_n(x) \neq 0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

$$= o \qquad \text{falls } \theta_n(x) = 0$$

Es gilt:
$$\sum_{n=1}^{N} \theta_n(x) - N \frac{1-\log 2}{\log 2} = o(N^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{3+\varepsilon}{2}} N) \quad \text{f.ü.}$$

C) Sei $\theta_o(x) = x$

$$a_{n+1}(x) = \left[\frac{1}{\theta_n(x)}\right] + 1 \qquad n=0,1,2,\ldots$$

$$\text{und } \theta_{n+1}(x) = a_{n+1}(x)(a_{n+1}(x)-1)\left(\theta_n(x) - \frac{1}{a_{n+1}(x)}\right)$$

Für Funktionen, die gewissen Bedingungen genügen gilt:

$$\sum_{n=1}^{N} f(\theta_n(x)) - N \int_o^1 f(x)dx = o\ (N^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{3+\varepsilon}{2}} N) \quad \text{f.ü.}$$

Für die Beweise von B) und C) wird ein Satz von Gál-Koksma benutzt.

WALLISSER, R.: <u>Zur Approximation algebraischer Zahlen</u>

α sei eine algebraische Zahl, K ein algebraischer Zahlkörper.
$\zeta \in K$ habe das Minimalpolynom $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$, die

Höhe $h(\zeta) = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$, und besitze eine Darstellung der Form

$$\zeta = \frac{\beta}{k}, \quad \beta = \beta^* \prod_{i=1}^{s} \beta_i^{\sigma_i}, \quad k = k^* \prod_{l=1}^{t} k_l^{\rho_l}, \quad |N(\beta)| = |a_n|, |N(k)| = |a_0|.$$

β^*, β_i, $1 \leq i \leq s$ seien ganz algebraische Zahlen aus K,
σ_i, ρ_i, k^*, k_l, $1 \leq l \leq t$, seien positive ganz rationale Zahlen.

Sind dann die Bedingungen

(1) $c_1^{-1} h(\beta_i) h(\beta_j) \leq h(\beta_i \beta_j) \leq c_1 \, h(\beta_i) h(\beta_j)$, $1 \leq i, j \leq s$,

(2) $0 < k \leq c_2 \, h(\zeta)^{\tau}$, $0 \leq \tau \leq 1$

(3) $h(\beta^*) \leq c_3 \, h(\beta)^{\mu}$, $k^* \leq c_3 \, k^{\nu}$, $0 \leq \mu, \nu \leq 1$

erfüllt, und ist

$$\sigma = \min_{1 \leq i \leq s} \frac{\log |N(\beta_i)|}{\log (c_1 h(\beta_i))}, \quad \varkappa > 1 - \sigma(1 - \mu) + \nu\tau,$$

so hat die Ungleichung

$$|\alpha - \zeta| < \frac{1}{h(\zeta)^{\varkappa}}$$

nur endlich viele Lösungen $\zeta \in K$ der angegebenen Form.

Als Anwendung läßt sich die Transzendenz von Zahlen der Art

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{3 - \sqrt{2}}{9}\right)^{3^\nu}$$ zeigen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft