Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

# Tagungsbericht 10/68

## Mathematische Logik und Grundlagenforschung

1. bis 6. April 1968

Die Tagung wurde von 41 Teilnehmern besucht, darunter acht ausländischen Gästen aus Dänemark, England, den Niederlanden, der Schweiz und den USA. 23 Vorträge und eine Vielzahl privater Diskussionen und Gespräche, aber auch die gemütliche Atmosphäre im neuen Gästehaus, trugen zu erfolgreicher Arbeit bei.

Zu Beginn der Tagung, die ursprünglich unter der gemeinsamen Leitung von Prof. Hermes und Prof. Schmidt stattfinden sollte, gedachte Prof. Hermes des am 16.9.1967 unerwartet verstorbenen Prof. Schmidt. Anschließend würdigte Prof. Bernays die wissenschaftliche Leistung des Verstorbenen.

Im Rahmen der Tagung fand am 4.4.1967 die diesjährige Mitgliederversammlung der DVMLG statt.

## Teilnehmer

Adams, E.W. Berkeley
Addison, J.W., Berkeley
Bammert, J., Freiburg
Bernays, P., Zürich
Bibel, W., München
Bürstenbinder, D., Hannover
Curry, H.B., Amsterdam
Deutsch, M., Münster
Diller, J., München
Ebbinghaus, H.-D., Freiburg
Felgner, U., Tübingen
Felscher, W., Freiburg
Fiedler, H., Bonn
Hasenjaeger, G., Bonn

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Hermes, H., Freiburg
Höring, W., München
Humburg, J., München
Jensen, R.B., Bonn
Kaiser, K., Bonn
Koppelberg, B., Köln
Löb, M.H., Leeds
Lorenz, K., Erlangen
Luckhardt, H., Marburg
Mahn, F.K., Freiburg
Mayoh, B.K., Aarhus
Menne, A., Hamburg
Müller, G.H., Heidelberg
Müller, H., Hannover
Oberschelp, A., Kiel
Osswald, H., München
Peters, K., Heidelberg
Pfeiffer, H., Hannover
Potthoff, K., Kiel
Prestel, A., Bonn
Richter, M., Freiburg
Scarpellini, B., Basel
Schütte, K., München
Schwabhäuser, W., Bonn
Schwichtenberg, H., Münster
Troelstra, A.S., Amsterdam
Wette, E., Uckerath

## Vortragsauszüge

CURRY, H.B.: Recent Advances in Combinatory Logic

This is a general account of developments in combinatory logic since 1958. Since combinatory logic is not yet well known, the paper will also contain some exposition of background. Emphasis is on developments by Loewen, Sanchis, Lercher, Hindley, Seldin, and Bunder (students of the author) which are intended for the second volume of Combinatory Logic which is in preparation by Curry and Hindley.

SCHWABHÄUSER, W.: Axiomatisierbarkeit der dimensionsfreien euklidischen Geometrie über geeigneten Körpern

Für eine beliebige Klasse $\mathfrak{K}$ von angeordneten Körpern bedeute $\Gamma(\mathfrak{K})$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

die Menge der geometrischen Sätze (einer elementaren Sprache), die in jedem kartesischen Raum endlicher Dimension $\geq 2$ über einem Körper aus $\mathfrak{K}$ gelten ("dimensionsfreie Geometrie"). Ein Körper heiße k-pythagoreisch ($k \in \mathbb{N}$), falls sich jede endliche Quadratsumme von Körperelementen schon als Summe von k Quadraten darstellen läßt. Sei $PF_k$ die Klasse aller k-pythagoreischen angeordneten Körper. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ der

SATZ: $\Gamma(PF_k)$ ist rekursiv axiomatisierbar, aber für $k \geq 2$ nicht endlich axiomatisierbar.

Zur Behandlung der unendlichdimensionalen Modelle (die sich auf Grund des Endlichkeitssatzes der Prädikatenlogik prinzipiell nicht ausschalten lassen) wird gezeigt, daß sie (m+1)-gradig elementare Unterstrukturen im Sinne von Dana Scott von endlicher Dimension ($\geq m \cdot k$) enthalten für jedes $m \in \mathbb{N}$. Der Satz erweitert das Resultat von H. N. Gupta, daß $\Gamma(PF_1)$ endlich axiomatisierbar ist. Die Frage von Gupta, ob $\Gamma(OF)$ rekursiv axiomatisierbar ist (OF = Klasse aller angeordneten Körper), bleibt offen.

OBERSCHELP, A.: <u>Äquivalenzrelationen über einem endlichen Feld</u>

Sei $Ä_n$ die Anzahl der Äquivalenzrelationen über $\{1, \ldots, n\}$ und $ä_n$ die Anzahl der nichtisomorphen darunter.

Genaue Formeln:

(1) Es ist eine triviale Feststellung, daß $ä_n = p(n)$ = Anzahl der Partitionen von n. Aus der Zahlentheorie sind dafür Rekursionsformeln bekannt.

(2) Für $Ä_n$ wird ein rekursives Berechnungsverfahren angegeben.

Asymptotisches Verhalten:

(1) Aus der Zahlentheorie ist bekannt: $ä_n \sim (4n\sqrt{3})^{-1} \cdot \exp(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}})$ (Hardy-Ramanujan).

(2) Für $Ä_n$ ist weder eine explizite noch eine asymptotische Dar-

stellung bekannt. Doch wächst $\ddot{A}_n$ stärker als $k^n$ und schwächer als $(n-k)!$ (für jedes feste k).

Daraus ergibt sich, daß in der Abschätzung $\frac{\ddot{A}_n}{n!} \leq \ddot{a}_n \leq \ddot{A}_n$ keine Grenze für $\ddot{a}_n$ asymptotisch genau ist. Diese Tatsachen werden verglichen mit den entsprechenden Resultaten (Harary, W. Oberschelp u.a.) bei anderen Arten von Relationen.

ADAMS, E.W.: The logic of generalizations which permit exceptions

Imperfect generalizations (i.g.s.) are expressions of the form "Almost all instances, I, have property P," where instances may be individuals or ordered n-tuples of individuals for any n. This paper discusses conditions under which it is reasonable to infer one i.g. from others. The idea of 'reasonableness' is made precise as follows:
(1) The degree of truth of an i.g. is defined to be the relative frequency of its instances which have its property, and
(2) one i.g. is imperfectly entailed by others in case it is possible to insure an arbitrarily high degree of truth (short of 1) for the conclusion by requiring sufficiently high degrees of truth for the premises. A formal language for symbolizing i.g.s is introduced, and the notions of relative frequency and imperfect entailment are defined model-theoretically. For two special sublanguages of the formal language, sound and complete rules of inference are given for deriving imperfectly entailed conclusions from finite sets of premises.

EBBINGHAUS, H.D.: Über "Für fast alle"-Quantoren

Im Anschluß an eine Arbeit von Slomson (1967) werden Präzisierungen von "Für fast alle"-Quantoren betrachtet. Zugrundegelegt wird

die Sprache PLIF $(\wedge, \overset{1}{\Delta}, \overset{2}{\Delta}, \ldots)$ mit der gegenüber PLIF($\wedge$) zusätzlichen Ausdrucksbestimmung

$$\text{Ausdr } \alpha \text{ und } x_1, \ldots, x_n \text{ verschieden} \Longrightarrow \text{Ausdr } \overset{n}{\Delta} x_1 \ldots x_n \alpha.$$

Semantische Basen haben die Gestalt $\langle \omega, F \rangle$, wobei $\omega$ nicht leer und F ein Filter über $\omega$ ist. Für Interpretationen J bzgl. $\langle \omega, F \rangle$ wird die Modellbeziehung wie üblich definiert mit den Zusatz

$$\text{Mod } J \ \overset{n}{\Delta} x_1 \ldots x_n \alpha : \text{gdw } \{(\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n) : \text{Mod } J^{\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_n}_{x_1 \ldots x_n} \alpha\} \in F^n.$$

Durch die Bedingungen

(1) F beliebig, (2) F uniform, (3) F uniform und $\bigcap F = \emptyset$, falls $|\omega| \geq \aleph_0$, (4) F uniform und $\bigcap F = \emptyset$ bzw. (5) F uniformer Ultrafilter und $|\omega| \geq \aleph_0$ werden Logiken $L_j$ bestimmt $(1 \leq j \leq 5)$. Für $L_1$, $L_2$, $L_4$ existieren vollständige Kalküle, $L_3$ erweist sich als nicht axiomatisierbar. In $L_1$ bis $L_4$ ist $\overset{n+1}{\Delta}$ nicht im Rahmen von PLIF$(\wedge, \overset{1}{\Delta}, \ldots, \overset{n}{\Delta})$ definierbar. Die Beschränkung auf PL($\overset{1}{\Delta}$) führt nur im Fall (5) zu einer entscheidbaren Logik.

RICHTER, M.: <u>Limites in Kategorien von Relationalsystemen</u>

Es werden Relationalsysteme eines festen Typs betrachtet. Eine Klasse K von Relationssystemen definiert eine Kategorie $\mathfrak{K}$, wenn man als Morphismen sämtliche Homomorphismen zwischen Strukturen aus K nimmt; die durch die Klasse aller Relationalsysteme definierte Kategorie heiße $\Omega$. In $\Omega$ existieren die Limites von direkten und inversen gerichteten Systemen (hier auch "kanonische" Limites genannt), während für beliebige Kategorien von Relationalsystemen die Limites weder existieren müssen, noch, falls sie existieren, kanonisch sein müssen. Falls jedoch K eine axiomatische Klasse ist, gelingt es, zumindest direkte Limites auf kanonische zurückzuführen, ein wichtiges Hilfsmittel sind dabei Ultraprodukte und Ultralimites. Genau gilt für $K \in \mathbf{E}C_\Delta$ und ein gerichtetes direktes System $\mathfrak{A}$:

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

1) Wenn $L = \varinjlim_K(\mathfrak{A})$ existiert, dann ist L kanonisch

2) L ist elementares Subsystem eines $\omega$-Limes $L' = \varinjlim_K(\mathfrak{B})$ eines gerichteten direkten Systems $\mathfrak{B}$ vom Typ $\omega$ von Strukturen aus K

3) (Chang) $U(K) \subseteq K$ dann und nur dann, wenn $U_\omega(K) \subseteq K$.

Ähnliche Sätze lassen sich für inverse Systeme $\mathfrak{A}$ nur unter zusätzlichen Voraussetzungen ableiten, die das System $\mathfrak{A}$ in Verbindung mit dem Ultrapotenzfunktor bringen.

BERNAYS, P.: Bemerkung zum Beweis des Zornschen Lemmas

Das Zornsche Lemma ergibt sich leicht aus dem Wohlordnungssatz. Es kann aber, wie bekannt, auch ohne diesen mit Hilfe des Auswahlaxioms bewiesen werden. Etliche solche Beweise sind gegeben worden, insbesondere ein handlicher Beweis von Hellmuth KNESER ("Eine direkte Ableitung des Zornschen Lemmas aus dem Auswahlaxiom", Math. Ztschr. 1950). Diese Beweise benutzen die Begriffe der teilweisen Ordnung und der Wohlordnung.

Kneser bemerkt in der genannten Abhandlung, daß sich die Anwendung dieser Begriffe vermeiden lassen müsse, indem man die Methode des zweiten Zermeloschen Beweises für den Wohlordnungssatz benutzt. Sieht man sich diesen zweiten Zermeloschen Beweis daraufhin an, so findet man, daß der Beweis für das Zornsche Lemma nach dieser Methode eher noch etwas einfacher geht als für den Wohlordnungssatz.

Ein Beweis dieser Art wird vorgeführt.

DILLER, J.: Eine Ordinalzahlzuordnung zur Bar-Rekursion vom Typ c.

Den Termen t der Gödelschen Theorie T, erweitert um Bar-Rekursion vom Typ o, werden schrittweise Ordinalzahlen $\alpha t$ zugeordnet, so daß $\alpha t > \alpha s$ ist, falls t auf s in einer normierten Weise reduzibel ist. Es wird gezeigt, daß das Supremum aller $\alpha t$ die erste $\omega$-kritische Zahl $\epsilon_o^{(\omega)}$ ist; die Definition von $\alpha t$ für Terme t aus T ist finit, wogegen für bar-rekursive Terme t transfinite Induktion bis $\epsilon_o^{(\omega)}$ verwendet wird.

WETTE, E.: Widersprüche in der axiomatischen Mengenlehre aufgrund eines systeminternen Widerspruchsfreiheitsbeweises für eine formalisierte ordinalzahltheoretische Analysis

1. Bei Gödels Dialectica-Umdeutung 1958 fehlt S. 286, Z. 21 die zu Sum duale Regel. In Spectors letzter Arbeit ist p. 14, 1.4 A 7 nicht "similar to A 6".

2. $\bar{\mathfrak{S}}_1$: intuitionistischer Prädikatenkalkül ohne Gleichheit; $\leq$-Stabilität, Transitivität, Reflexivität, schwache Konnektivität, Unendlichkeit; Regeln der transfiniten Induktion und Rekursion, Ersetzung. Reproduktion von $\bar{\mathfrak{S}}_1$ in ZF - $\mathfrak{P}(\ldots \times \omega_1 \times \omega_1)$. Tertium non datur partiell eliminierbar: bis auf Ableitung von Rekursionsprämissen.

3. $\bar{\mathfrak{S}}_1$-interne Auflösung der erweiterten Umdeutung ad 1. mit transfiniten Nummern konstruktibler Mengen. Benutzt werden Aussonderungsnummernfunktionen für "Klassen", die 6 Funktionen $\Phi^c x = x$, o, $\omega$, $\Phi^c \langle xy \rangle = x, y$, $\Phi^c \langle \alpha \beta \rangle = \iota_k\, k = o \wedge \alpha < \beta \dot{\vee} k = 1 \wedge \beta \leq \alpha$, 3 1- und 2 2-stelligen Funktionalen $\Phi_{\Psi}^c \alpha = \Psi^c \Phi_{\Psi} \upharpoonright \alpha, \mu_{\beta} \bigwedge_{\xi \leq \alpha} \beta > \epsilon_{\eta} \Psi^c \langle \eta \xi \rangle = 0$,

$\Phi_{\Psi}^c x = \epsilon_k \Psi^c k \leq \Psi^c k^+$, $\Phi_{\Psi_1 \Psi_2}^c x = \langle \Psi_1^c x, \Psi_2^c x \rangle$, $\Psi_2^c \Psi_1^c x$ entsprechen.

4. $\bar{\mathfrak{S}}_1$-interne Herleitung der verschlüsselten Wf.aussage bez. $\bar{\mathfrak{S}}_1$. Formaler Widerspruch.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

5. Existenz einer paradoxen Rationalzahlfolge.

6. Zur Widerlegung der Zahlentheorie mit nummerntechnischer Rekapitulation von proto- und konsequenzlogischen Eliminationsverfahren via "$\vdash e_{\ulcorner KR \urcorner}(m) = e_{\ulcorner K \urcorner}(fm)$".

ADDISON, J.W.: Definability and Determinateness

Among the fundamental riddles of the theory of definability are the following: Why are there so many separation (or interpolation) theorems? Why do separation theorems tend to hold on one side and fail on the other side of hierarchies? How can one tell on which side? Why are there so many construction (or hierarchy) theorems? What is the relation between separation and construction theorems? New light has recently been shed on all of these questions by the discovery of a close interconnection between them and the determinateness of certain games. As a consequence wide-ranging simplification and further unification in the theory of definability appears possible. Illustrations are given (based on work of the author, partially in collaboration with members of his Berkeley seminar and with Moschovakis, and of Blackwell, Martin, and others) from model theory, descriptive set theory, and recursive function theory. For example:

(i) a new second-order normal form for formulas of pure first-order logic is given which relates difference and prefix hierarchies;

(ii) a natural game-theoretic operator is seen to "propagate" the Kalmar hierarchy of closed-open sets into the classical Borel hierarchy;

(iii) validity of the first separation principle on the "universal" side is found to lead to a natural propagation of hierarchies;

(iv) application of the method in the projective hierarchy suggests the adoption of the "axiom of definable determinateness" as a new axiom for set theory.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

LÖB, M.H.: Eine modelltheoretische Charakterisierung der effektiven Operationen

Es wird eine modelltheoretische Bedingung B angegeben und gezeigt, daß eine Operation genau dann effektiv (im Sinne von Myhill-Shepherdson) ist, wenn sie durch einen B erfüllenden Term darstellbar ist. Die gegebene Bedingung ist eine Erweiterung auf Funktionale endlicher Stufen von Kreisels Charakterisierung der rekursiven Funktionen als diejenigen Funktionen, die in Bezug auf n-Modelle invariant sind.

MENNE, A.: Über vierwertige Aussagefunktoren

Es gibt auch im vierwertigen Aussagenkalkül Sheffer-Funktoren, d.h. aus einem dyadischen Funktor lassen sich alle 256 monadischen und die übrigen 4 294 967 296 - 1 dyadischen sowie alle höherstelligen Funktoren definieren. Solche Shefferfunktoren gibt es mindestens 21 156 464.

Wir wollen ein dem zweiwertigen sehr ähnliches System definieren. Das System [N, C, A, K, E] enthält zwei zweiwertige mit 3, 0 in den Ecken und 2, 1 in der Mitte. Nur sofern 3 und 2 beide ausgezeichnete Werte sind, liefert es überhaupt Theoreme, dann jedoch alle Theoreme des klassischen zweiwertigen Systems.

Das System [N, C', A, K, E'] ergibt ebenfalls alle Gesetze des klassischen zweiwertigen Aussagenkalküls, wenn 3 und 2 ausgezeichnete Wert sind. Es lassen sich jedoch auch nur für 3 als ausgezeichneten Werte zahlreiche Theoreme erhalten, die eine Teilklasse der des zweiwertigen Kalküls darstellen.

Welches System man bevorzugt, hängt von der Deutung ab. Dafür bietet sich an, 3 und 2 bzw. 1 und 0 jeweils zwei Arten von Wahrheit bzw. Falschheit zuzuordnen, z.B. logisch wahr und faktisch

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

wahr, ethisch wahr und juristisch wahr, konstruktiv wahr und klassisch wahr.

SCARPELLINI, B.: Über die Metamathematik der Ringe

Ausgehend vom Gentzenschen Hauptsatz wird ein metamathematischer Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes gegeben.

Mit Hilfe des Hilbertschen Nullstellensatzes und einer gewissen Verschärfung des Gentzenschen Hauptsatzes wird ein Satz von folgender Art bewiesen:

Eine Formel F aus der Ringtheorie erster Stufe ist genau dann beweisbar aus den Axiomen der elementaren Theorie der Integritätsbereiche, wenn gewisse idealtheoretische Bedingungen erfüllt sind.

Durch Spezialisierung erhält man gewisse Anwendungen, von denen wir ein Beispiel geben. Sei $A_o$ die wie folgt definierte Menge von Formeln:

a) $f \neq o$ ist in $A_o$ für jeden Term f,

b) sind A, B in $A_o$ so $A \wedge B$ und $A \vee B$.

Ferner sei $A_1$ die Klasse folgender Formeln ohne freie Variablen: Für $B(x_1, \ldots, x_s) \in A_o$ sei $(Q_1 x_1, \ldots, Q_s x_s) B(x_1, \ldots, x_s) \in A_1$ (hier bedeuten die $Q_i$ All- oder Existenzquantoren). Mit JD bezeichnen wir die Menge der Axiome der elementaren Theorie der Integritätsbereiche der Charakteristik o. Dann gilt

SATZ: Zu jeder geschlossenen Formel G der Form

$$(x_1, \ldots, x_s)(g_1 \neq o \vee \ldots \vee g_s \neq o)$$

existiert eine Zahl e mit folgender Eigenschaft:

Sind $F_1, \ldots, F_n$ in $A_1$ und gilt $F_1, \ldots, F_n$, JD $\vdash$ G, so gibt es schon Formeln $F_{i_1}, \ldots, F_{i_e}$, so daß $F_{i_1}, \ldots, F_{i_e}$, JD $\vdash$ G gilt.

POTTHOFF, K.: Restklassenstrukturen von Nichtstandardmodellen der rationalen Zahlen

Ist $\mathfrak{Q}^*$ echte elementar äquivalente Erweiterung von

$$\mathfrak{Q} = (Q, +, \cdot, <, R_o, \ldots, R_\xi, \ldots, o, 1)_{\xi<\alpha}$$

($R_\xi$ endlichstellige Relation über Q) und

$$M_o^{\mathfrak{Q}^*} = \{a \mid a \in Q^* \text{ und } f \cdot a \cdot q \in Q, \ q > o \text{ ist } |a| < {}^*q\}$$

$$M_1^{\mathfrak{Q}^*} = \{a \mid a \in Q^* \text{ und ex} \cdot q \in Q \text{ mit } |a| < {}^*q\}, \text{ so ist}$$

$M_o^{\mathfrak{Q}^*}$ maximales Ideal in $M_1^{\mathfrak{Q}^*}$ und

$$M_1^{\mathfrak{Q}^*} \big/ M_o^{\mathfrak{Q}^*} =: M(\mathfrak{Q}^*) \text{ Körper.}$$

Weiter gilt:

i) $M(\mathfrak{Q}^*)$ ist Unterkörper des Körpers der reellen Zahlen.

Nennt man die reellen Zahlen, die Suprema von in $\mathfrak{Q}$ definierbaren Anfangsstücken von Q sind, $\mathfrak{Q}$-reell, so zeigt man leicht:

ii) Alle $\mathfrak{Q}$-reellen Zahlen sind Elemente von $M(\mathfrak{Q}^*)$.

iii) Ist p(x) ein Polynom mit $\mathfrak{Q}$-reellen Koeffizienten, so liegt jede reelle Nullstelle von p(x) in $M(\mathfrak{Q}^*)$.

iv) Kommen in $\mathfrak{Q}$ nur abzählbar viele Relationen vor, so gibt es eine elementar äquivalente Erweiterung $\mathfrak{Q}^*$ von $\mathfrak{Q}$, für die $M(\mathfrak{Q}^*)$ gerade die Menge der $\mathfrak{Q}$-reellen Zahlen ist.

Aus iii) und iv) folgt für beliebige $\mathfrak{Q}$, daß der Körper der $\mathfrak{Q}$-reellen Zahlen reell algebraisch abgeschlossen ist.

Insbesondere gibt es eine elementar äquivalente Erweiterung $\mathfrak{Q}^*$ von $\mathfrak{Q} = (Q, +, \cdot, <, o, 1)$, für die $M(\mathfrak{Q}^*)$ gerade der Körper der arithmetisch reellen Zahlen ist.

SCHWICHTENBERG, H.: <u>Rekursionszahlen und die Grzegorczyk-Hierarchie</u>

Grzegorczyk hat eine aufsteigende Folge von Funktionenklassen $\mathfrak{E}^o, \mathfrak{E}^1, \ldots$ angegeben, die die primitiv-rekursiven Funktionen ausschöpfen. Eine weitere Klassifikation der pr.-rek. Funktionen wird im Anschluß an Heinermann definiert:

$\mathfrak{R}^*_n$ bestehe aus allen Funktionen, die sich aus den Ausgangsfunktionen mit den elementaren Operationen und "elementaren Rekursionen" so definieren lassen, daß dabei höchstens $n$ elementare Rekursionen "übereinander liegen". Unter elementaren Rekursionen verstehen wir in Erweiterung des Peterschen Begriffs der eingeschachtelten Rekursion solche Rekursionen, bei denen "auf der rechten Seite der Rekursionsgleichung" noch Summen und Produkte auftreten können.

SATZ:

$$\mathfrak{R}^*_n = \mathfrak{E}^{n+3} \quad \text{für} \quad n \geq o.$$

KOROLLAR: Die von Kleene in "Extension of an effectively generated class of functions by enumeration", Coll. Math. 1958, angegebene Methode liefert, angewandt auf $\mathfrak{E}^4$, die nachfolgenden Grzegorczyk-Klassen (Axt 1963).

MÜLLER, H.: <u>Über die mit Stackautomaten berechenbaren Funktionen</u>

Stackautomaten[1)] sind verallgemeinerte Kellerautomaten. Sie haben ein beschränktes und ein unbeschränktes Band. Das beschränkte Band kann nur gelesen, das unbeschränkte kann gelesen und am einen Ende durch Löschen oder Schreiben verändert werden. Stackautomaten stehen in ihrer Leistungsfähigkeit echt zwischen endlichen Automaten und Turing-Maschinen. Alle Funktionen der Klasse $\mathfrak{E}^2$ von Grzegorczyk sind mit Stackautomaten berechenbar.

---

[1)] stack (englisch): Schober, Stoß, Büchermagazin.

BIBEL, W.: Zur Schnittelimination in der einfachen Typenlogik

Für eine bestimmte Klasse von Herleitungen der einfachen Typenlogik läßt sich die Fundamentalvermutung von Takeuti mit Hilfe von Termen eines konstruktiven Ordinalzahlsystems konstruktiv beweisen, von dem Schütte gezeigt hat, daß es mit dem System o(2) von Takeuti äquivalent ist. In einem kurzen Überblick wird dieses Ergebnis in die Reihe der Takeutischen Arbeiten zur Fundamentalvermutung eingeordnet.

MAYOH, B.H.: The relation between an object and its name; Kleene recursion and definition by transfinite induction reexamined

The relation between an object and its name in some symbolism is often very loose. The fact that one cannot effectively decide whether or not two names refer to the same object in such theories as: the presentation of groups, the constructive ordinals, the partial recursive functions, axiomatic set theory, computable analysis, has led to the notion of a notation system. (Malcev, Hartley, Rogers, Lacombe et.al.). We shall examine the relations between Kleene's two recursion theorems and set-theoretic transfinite induction from this point of view.

FELGNER, U.: Die lokalen, globalen, universellen, Mengen- und Klassenformen von Ausdrücken der MBG-Mengenlehre

Für Ausdrücke $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\Psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ wurden zunächst die Begriffe: die zum Paar $\langle \Phi, \Psi \rangle$ gehörige Mengenform, Klassenform, lokale, globale und universelle Form definiert.

Diese seien mit $(M - \Phi, \Psi)$, $(Cls - \Phi, \Psi)$, $(Lok - \Phi, \Psi)$, $(GL - \Phi, \Psi)$ und $(Univ - \Phi, \Psi)$ bezeichnet. Es wurde unter anderem der folgende Satz vorgeführt:

SATZ: Sei $\Sigma \vdash (M - \Phi, \Psi) \Longrightarrow (M - \Phi', \Psi')$, wo $\Phi$ n und $\Phi'$ m freie Variable haben, und es gelte:

(+) $\Sigma \vdash \bigwedge_{x_1} \ldots \bigwedge_{x_m} [\Phi'(x_1, \ldots, x_m) \Longrightarrow \Phi(t_1, \ldots, t_n)]$

(++) $\Sigma \vdash \bigwedge_{x_1} \ldots \bigwedge_{x_m} \bigwedge_{z} [(\Phi'(x_1, \ldots, x_m) \wedge \Psi(t_1, \ldots, t_n, z)) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \Psi'(x_1, \ldots, x_m, t_{n+1})]$

für bestimmte Terme $t_1 = t_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, t_n = t_n(x_1, \ldots, x_m)$, und $t_{n+1} = t_{n+1}(x_1, \ldots, x_m, z)$, dann gilt auch:

$$\Sigma \vdash (Lok - \Phi, \Psi) \Longrightarrow (Lok - \Phi', \Psi').$$

Es wurde ferner gezeigt, daß für "verästelte Mengen" der Ordnungssatz mit dem Ordnungserweiterungssatz äquivalent ist, und daß die Mengenform des Konfinalitätsprinzips ("Jede Kette besitzt wohlgeordnete konfinale Teilmengen") mit dem lokalen Auswahlaxiom äquivalent ist.

HUMBURG, J.: Grundzüge eines neuen Aufbaus der Wahrscheinlichkeitstheorie

Der Begriff der statistischen Wahrscheinlichkeit ergibt sich als logische Folge aus der Vorstellung der wissenschaftlichen Gleichartigkeit der zugrundegelegten Gesamtheit.

Sei K eine wissenschaftliche Konzeption, die besage, daß die betrachtete Gesamtheit gleichartig sei. Dann gilt:

(1) $c_K(h_n \rightarrow h) = 1$; in Worten:

Auf Grund der Konzeption K besteht die logische Wahrscheinlich-

keit Eins, daß die relativen Häufigkeiten gegen einen Grenzwert h konvergieren; h heißt statistisch Wahrscheinlichkeit.

Die Geschwindigkeit dieser Konvergenz läßt sich abschätzen:

$$c_K(|h_n - h| < \epsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\,\epsilon^2} \,. \tag{2}$$

Aus der wissenschaftlichen Gleichartigkeit der Gesamtheit folgt nämlich die wahrscheinlichkeitstheoretische Symmetrie der logischen Wahrscheinlichkeitsfunktion $c_K$ im Sinne von Carnap und de Finetti; aus der Symmetrie der Funktion $c_K$ ergeben sich (1) und (2).

JENSEN, R.B.: Darstellungssätze für zulässige Zahlen

Der Begriff der zulässigen Menge und der zulässigen Ordnungszahl wurde definiert. Ein von Friedman stammender Beweis für:

$$\alpha \text{ abzählbar und zulässig} \rightarrow \bigvee a \subset \omega \quad \alpha = \omega_1^a$$

wurde vorgetragen. Weitere Sätze dieser Art wurden angeführt.

LORENZ, K.: Eine effektive Deutung der klassischen Logik

Die spieltheoretische Fundierung der Logik erlaubt eine Interpretation der klassischen Logik innerhalb der effektiven Logik, ohne von der Umdeutung der logischen Partikeln Gebrauch machen zu müssen, wie in den Reduktionssätzen von Glivenko und Gödel et.al.

Die Einführung von Verteidigungswiederholungen in das Dialogspiel der effektiven Logik ($A \in$ effektiv logisch wahr $\leftrightarrows \bigvee_n A \in$ logisch wahr im Dialogspiel mit der P-Angriffsschranke n) läßt sich deuten als Verfahren, auf formale Weise festzustellen, ob eine Aussage nicht effektiv falsch ist, d.h. ob keine O-Gegenstrategie gegen diese Aussage vorliegt.

Es ist daher zulässig zu definieren: A $\in$ klassisch formal wahr $\leftrightarrows$ A $\in$ formal nicht effektiv falsch. Und es läßt sich beweisen, daß auf diese Weise tatsächlich sämtliche im üblichen Sinn klassisch allgemeingültigen Aussagen eine P-Gewinnstrategie im erweiterten Spiel haben.

BAMMERT, J.: S-Algebren formaler Systeme der Aussagenlogik

Unter den formalen Systemen $S = \langle F, f, H \rangle$ ($\langle F, f \rangle$ nicht notwendig finitäre Peanoalgebra, H Hüllen-Operator im Sinne der structural consequences v. Łos u. Suszko) werden die "quasideduktiven" ausgezeichnet durch den Besitz einer Verknüpfung "$\rightarrow$" mit $\vdash x \rightarrow x$, $\{x \rightarrow y, y \rightarrow z\} \vdash x \rightarrow z$, $\{x, x \rightarrow y\} \vdash y$, $\{y\} \vdash x \rightarrow y$. Als Matrizen werden Algebren mit einem ausgezeichneten Wahrheitswert verwendet. Durch $hB \subseteq \{e\} \Longrightarrow hH \subseteq \{e\}$ für alle $B \subseteq F$ und Homomorphismen h sind die S-Algebren definiert (in Verallgemeinerung eines Begriffs von Rasiowa und Sikorski).
Ein quasideduktives System S ist genau dann im starken Sinne vollständig, wenn alle relativen Lindenbaumalgebren existieren. Damit ist die Vollständigkeit zu einer rein syntaktischen Bedingung äquivalent.
Beispiele: Die Systeme $S_k$, $S_b$, $S_p$, $S_d$, $S_w$, $S_q$, $S_{qc}$, $S_\alpha$ (klass., intuition. posit., derivativ, schw. derivat., Quantenlogik, konstr. Quantenl., derivativ mit $\alpha$-Konj. u. $\alpha$-Disj.) und die zugehörigen Klassen von S-Algebren.

S heißt $\alpha$-konstruktiv, wenn mit $\{a_i \rightarrow x;\ i < \alpha\} \vdash x$ auch $\vdash a_i$ für wenigstens ein $i < \alpha$, falls x in keinem $a_i$ vorkommt. (Wenn eine $\alpha$-Disjunktion existiert, dann ist dies - bei unendlicher Basis x von $\langle F, f \rangle$ äquivalent zu $\vdash \bigvee_{i<\alpha} \langle b_i \rangle \Longrightarrow \vdash b_i$ für wenigstens ein $i < \alpha$.
Ist S quasideduktiv, vollständig und läßt sich die Lindenbaumalgebra $L_o$ zu einer S-Algebra mit zweitgrößtem Element "erwei-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

tern", dann ist S für jedes $\alpha$ $\alpha$-konstruktiv. Dies läßt sich für $S_b$, $S_p$, $S_d$, $S_w$, $S_{qc}$ und $S_\alpha$ unmittelbar einsehen. Damit ist die Konstruktivität dieser Systeme ohne die topologischen Mittel von Rasiowa und Sikorski gezeigt.