MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 11/1968

Arbeitsgemeinschaft über Gruppen mit BN-Paaren

15.4. bis 20.4.1968

In dieser Arbeitsgemeinschaft, die unter der Leitung von B.Huppert (Mainz) stand, wurden die Gebäude in algebraischen Gruppen mit BN-Paaren behandelt. Diese neue und schwierige Theorie von Tits-Bruhat, die in der Literatur nur teilweise zugänglich ist, wurde ausführlich vorgetragen und diskutiert. Man erhielt gleichzeitig einen guten Einblick in die Theorie der algebraischen Gruppen.

Teilnehmer:

H.Behr, Göttingen
S.Böge, Heidelberg
W.Böge, Heidelberg
A.Brandis, Heidelberg
R.Carter, Coventry (England)
D.C. van Drooge, Nijmegen (Holland)
J.Gamst, Kiel
W.Gaschütz, Kiel
W.-D.Geyer, Heidelberg
E.Gottschling, Berlin
Gross, Kiel
G.Harder, Heidelberg
c.Hering Mainz
B.Huppert, Mainz
M.Kneser, Göttingen
J.Leicht, Heidelberg
A.Pfister, Göttingen
K.Radbruch, Tübingen
R.Rentschler, Straßburg
P.Roquette, Heidelberg
T.A.Springer, Utrecht
U.Stuhler, Göttingen
J.Tits, Bonn
F.D.Veldkamp, Utrecht
W.v.Waldenfels, Saarbrücken
G.Wegner, Göttingen
D.Winter, Bonn

Vortragsauszüge

W.v.WALDENFELS: BN-Paare und Coxetergruppen

Eine Coxetergruppe W wird erzeugt von einer Menge S von Elementen der Ordnung 2. Sei $s,s' \in S$ und $m(s,s')$ die Ordnung von ss', so bilden die Gleichungen $(ss')^{m(s,s')} = 1$ für $m(s,s') < \infty$ ein System definierender Relationen. Jede Untergruppe $U \subset W$ bildet zusammen mit $X = U \cap S$ eine Coxeter-Gruppe, die man mit W_X bezeichnet.

Ein B-N-Paar in einer Gruppe G ist ein Paar B und N von Untergruppen, so daß B und N die Gruppe G erzeugen und $B \cap N \subset N$ ein Normalteiler ist. Man setzt weiter voraus, daß die "Weylgruppe" $W = N/N \cap B$ ein System S von Erzeugenden der Ordnung zwei besitzt und daß für die "Doppelrestklassen" $C(w) = BwB$ von $w \in W$ gilt: $C(s)C(w) \subset C(w) \cup C(sw)$ und $C(s)C(s) = B \cup C(\Delta)$ für $s \in S$, $w \in W$. Man zeigt, daß die Abbildung $w \mapsto C(w)$ eine Bijektion von W auf die Gesamtheit aller Doppelrestklassen von B in G ist, und daß W zusammen mit S eine Coxetergruppe bildet. Die Untergruppen von G, die B umfassen, sind von der Form $G_X = BW_XB = \bigcup_{w \in W_X} C(w)$, wo $X \subset S$ ist. Die Die G_X bilden ihre eigenen Normalisatoren.

E.GOTTSCHLING: Gebäude und BN-Paare

Es werden Gebäude definiert als Komplexe mit einer axiomatisch definierten Struktur, in der bestimmte Elemente als Kammern ausgezeichnet sind, und es wird gezeigt, ~~daß~~ in Gruppen mit BN-Paaren eine Geometrie definiert werden kann, die ein Gebäude ist. G operiert als Gruppe von Automorphismen auf diesem Gebäude.

F.GROSS: Die Projektionsabbildung in Coxeter-Komplexen

In einem Gebäude Δ wird die Projektion $\mathrm{proj}_A C$ einer Kammer C auf ein Element A definiert: Sei $G = (C_o, \dots, C_m = C)$ eine minimale Galerie mit $C_o \supset A$, so ist $\mathrm{proj}_A C = C_o$. Mit Hilfe dieses Begriffs werden die folgenden Sätze bewiesen: (1) in Δ gibt es zu zwei Kammern C, D eine Kammer E, die beiden entgegengesetzt ist. (2) seien A,A' entgegengesetzte Elemente aus Δ. Die Abbildungen

$\mathrm{proj}_{A'}$: Cham StA $\longrightarrow$ Cham St A' und

proj_A: Cham St A' $\to$ Cham St A

sind bijektive, zueinander inverse, nachbarschaftstreue Abbildungen. Diese lassen sich eindeutig zu Isomorphismen von St A $\to$ St A' bzw. St A' $\to$ St A fortsetzen.

J.GAMST: Der Reduktionssatz

Für ein Element A eines Kammerkomplexes Δ bezeichnet $E_i(A)$ die Menge aller Kammern von Δ, die mit A eine Seite der codim i gemeinsam haben.

Theorem 1: Sei Δ ein Gebäude mit endlicher Weylgruppe, $\varphi: \Delta \to \Delta$ ein Automorphismus. Gilt für eine Wohnung $\Sigma \in \mathfrak{A}$ und eine Kammer $C \in \Sigma$: $\varphi = \mathrm{id}$ auf $\Sigma \cup E_1(C)$, so ist φ die Identität.

Theorem 2: Seien Δ, Δ' Gebäude mit endlicher Weylgruppe, $C \in \Delta$, $C' \in \Delta'$ Kammern. Sei $\varphi: E_2(C) \to E_2(C')$ eine Bijektion mit codim $(D \cap D') = 1 \iff$ codim $(\varphi(D) \cap \varphi(D')) = 1$. Dann läßt sich φ zu einem Isomorphismus $\bar{\varphi}: \Delta \to \Delta'$ fortsetzen.

R.RENTSCHLER: Der Satz von FEIT-HIGMAN

Es wird der folgende Satz bewiesen.

Satz (Feit-Higman):
Die Weylgruppe des BN-Paares einer endlichen Gruppe ist das direkte Produkt einer kristallographischen Gruppe mit einer Diedergruppe der Ordnung 16.

G.HARDER: Gebäude vom Typ A_n, D_n und E_n

Es wurde zunächst gezeigt, daß die Gebäude vom Typ A_n zu den Flaggenkomplexen projektiver Räume der Dimension n isomorph sind. Diese projektiven Räume sind desarguesch, falls $n \geq 3$ ist, also ist ein Gebäude Δ vom Typ A_n für $n \geq 3$ durch den Koordinatenkörper $k(\Delta)$ des zugehörigen projektiven Raumes bis auf Isomorphie bestimmt.
Zur Charakterisierung der Gebäude Δ vom Typ D_n und E_n betrachtet man die Teilgebäude vom Typ $A_{2,3}$ und zeigt mit Hilfe des Reduktionssatzes, daß Δ eindeutig ein kommutativer Körper $k(A)$, nämlich $k(A_2)$ zugeordnet ist. Das Gebäude ist durch $k(\Delta)$ eindeutig bestimmt.
Zu jedem k gibt es umgekehrt ein Gebäude A des Typs D_n, E_n, das durch das BN-Paar der zugehörigen Chevalleygruppe geliefert wird.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

F.D.VELDKAMP: Polargeometrien

In der Polargeometrie handelt es sich um eine axiomatische Kennzeichnung von Systemen S folgender Art.

1) Es sei f eine σ-bilineare Form auf einem linearen Raum V über einem Schiefkörper K. f sei nicht entartet und entweder alternierend oder hermitesch, spurwertig, von endlichem Index. Die Polargeometrie S besteht aus allen bezüglich f totalisotropen Teilräumen von V.

2) Im Falle eines linearen Raumes V über einem Körper K der Charakteristik 2 gibt es noch ein wesentlich verschiedenes Beispiel. Definiert man in diesem Fall eine σ-quadratische Form auf V als ein φ wie folgt: Es sei $L = \{\lambda+\lambda^{\sigma} | \lambda \in K\}$; $\varphi: V \to K/L$, so daß es ein σ-bilineares $f: V \times V \to K$ gibt, so daß $\varphi(x) = f(x,x)$. $W \subseteq V$ heißt singulär, wenn $\varphi(W) = 0$; wir setzen voraus, daß die maximalen singulären Teilräume endliche Dimension haben. Dann bilden alle singulären Teilräume von V eine Polargeometrie.

Das Axiomensystem, das die Polargeometrie beschreibt, kann man anwenden bei der Klassifizierung von Gebäuden vom Typ C_n und D_n.

J.TITS: Gebäude von den Typen C_n und F_4

s. § 6 der Ausarbeitung (in Vorbereitung)

Endliche Gebäude und BN-Paare

Sei k ein endlicher Körper der Charakteristik p, G eine adjungierte einfache algebraische über k definierte Gruppe vom Rang $\geqslant 2$, B eine über k definierte Borel-Untergruppe, N der Normalisator eines in B enthaltenen maximalen k-Torus. Dann ist B_k, N_k bekanntlich ein BN-Paar in G_k (dabei bezeichnet X_k die Gruppe der k-rationalen Punkte von X). Sei $\Delta = \Delta(G_k)$ das zugehörige Gebäude, sei $A = A(G,k)$ die Gruppe der speziellen (d.h. Typ erhaltenden) Automorphismen von Δ und bezeichne $\tilde{G}$ die von den p-Sylowuntergruppen von G_k erzeugte Untergruppe. Die Gruppe G_k kann man in nat. Weise als eine Untergruppe von A auffassen.

Satz 1: Jedes endliche Gebäude von irreduziblem Typ und Rang $r \geqslant 3$ ist ein Gebäude der Gestalt $\Delta(G,k)$ für passende k und G von k-Rang r.

Sei E die Menge der Paare (Σ, C), wobei Σ eine Wohnung von Δ und C eine Kammer von Σ ist.

Satz 2. Der Quotient A/G_k ist kanonisch isomorph zu der Automorphismengruppe von k. Eine Untergruppe von A wirkt dann und nur dann transitiv auf E, wenn sie $\tilde{G}$ enthält.

Corollar: Eine endliche einfache Gruppe besitzt dann und nur dann ein BN-Paar vom irreduziblen Typ und Rang $r \geq 3$, wenn sie die Gestalt $\tilde{G}$ für passende G vom k-Rang $r \geq 3$.

H.BEHR: BN-Paare vom affinen Typ

Man führt den Begriff der Bornologie in einer Gruppe ein und beweist die folgenden Sätze:

Satz 1: Sei G eine Gruppe mit BN-Paar mit irreduzibler affiner Weylgruppe vom Rang l+1. Dann besitzt G eine Bornologie, deren maximale beschränkte Untergruppen die maximalen echten parabolischen Untergruppen sind. Insbesondere besitzt G (l+1) Klassen konjugierter maximaler beschränkter Untergruppen.

Satz 2: G sei wieder eine Gruppe mit BN-Paar von irreducible affinem Typ und zugeordneter Bornologie $\mathcal{B}$. Besitzt G außer-dem eine Bornologie $\mathcal{B}'$, so daß $G \notin \mathcal{B}'$, aber $B \in \mathcal{B}'$, dann ist $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Als Anwendung kann man die Klassen konjugierter maximaler, beschränkter Untergruppen von algebraischen Gruppen über lokalen Körpern bestimmen.

A. Brandis (Heidelberg)