Mathematisches Forschungsinstitut

Oberwolfach

Tagungsbericht 12/68

Intervallrechnung

vom 5. bis 8. Mai 1968

Leitung: Prof. Dr. Ulrich Kulisch, Karlsruhe
Prof. Dr. Karl Nickel, Karlsruhe

In der reellen Analysis benutzt man schon seit langem Intervalle.
Beispiele:

a) Definition der reellen Zahlen als Intervallschachtelungen,
b) Mittelwertsatz, wo eine Unbekannte auftritt, deren Wert nicht bekannt ist, jedoch in einem gegebenen Intervall liegt.

In den letzten Jahren hat sich die Intervallrechnung sehr stark entwickelt, ausgehend von Problemen der numerischen Mathematik.

Die folgenden Bereiche aus der Intervallrechnung wurden auf der Tagung behandelt:

1) ALGEBRA der Intervallrechnung (z.B. Charakterisierung der Struktur der Menge aller Intervalle mit ihren Verknüpfungen).
2) ANALYSIS der Intervallrechnung (z.B. Fixpunktsätze).
3) NUMERISCHE MATHEMATIK. Ziel: vollautomatisch ablaufende Algorithmen, die für die Lösung eines Problems stets Näherungswerte plus Fehlerschranken liefern.
4) STATISTISCHE FRAGEN (z.B. Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Ergebnisintervall).
5) LOGIK der Algorithmen.

6) SPRACHEN (z.B. Triplex-ALGOL 60).

7) COMPILER.

Eines der wichtigsten Ziele der Intervallrechnung in der Numerischen Mathematik für die nächsten Jahre wird sein: Angabe von Algorithmen für die exakte numerische Einschließung der Lösung von Anfangs- und Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen.

Teilnehmer:

Alefeld, G., Karlsruhe
Avenhaus, J., Karlsruhe
Christ, H., Karlsruhe
Dejon, Rüschlikon (Schw.)
Döring, B., Darmstadt
Dussel, R., Karlsruhe
Haller, H., Bad Godesberg
Hansen, E., Exford (Engl.)
Herzberger, J., Karlsruhe
Krawczyk, R., Karlsruhe
Kulisch, U.: Karlsruhe
Lortz, B., Karlsruhe
Martinell, R., Wien
Mayer, O., Karlsruhe
Meinguet, J.: Heverlee (Belg.)
Nickel, K., Karlsruhe
Rieder, P.: Karlsruhe
Santo, H., Karlsruhe
Scharf, V.: Bonn
Schmitt, B., Karlsruhe
Schwill, W.-D., Darmstadt
Wippermann, H.W., Karlsruhe

Vortragsauszüge

MEINGUET, J.: On compatibility and significance in digital computation

Our purpose is to contribute to the economical solution of the general problem of automatic error estimation by emphasezing the welcome fact that, in certain important situations, the pseudo-arithmetic effect of accumulation of generated errors can be entirely disregarded with respect to the effect of propagation of inherent errors. This is typically the case for any numerical process that has been proved to be "gutartig" in the sense of F.L. Bauer, which concept

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

can be defined in terms of compatibility requirements of computed results with tolerances prescribed in the space of data and/ or in the space of results. Since the compatibility problem is important by itself, it is discussed independently; from simple conversity arguments it is shown that, at least for matrix inversion, the set of admissible solutions in the sense of Bauer can be much larger than the sets defined by the classical criteria used in forward and in backward error analysis. By way of application, a simple technique for the automatic estimation of the significance in matrix inversion is presented; it turns out that the concept of gurartig numerical process and techniques like a posteriori estimation and unnormalized arithmetik (in the sense of Ashenhurst and Metropolis) are all relevant for the required procedure, which can be applied whenever inherent errors enter in a random pattern.

KULISCH, U.: Grundlegende Begriffe der Intervallrechnung

Es sei P($\mathfrak{M}$) die Potenzmenge einer beliebigen Menge $\mathfrak{M}$. Sind in $\mathfrak{M}$ Verknüpfungen erklärt, so lassen sich damit in der üblichen Weise Verknüpfungen für Komplexe aus P($\mathfrak{M}$) erklären. Es wird die algebraische Struktur der Potenzmenge der reellen Zahlen, der reellen Vektoren und Matrizen untersucht. Läßt sich in $\mathfrak{M}$ eine Halbordnung einführen, so kann man Intervalle in P($\mathfrak{M}$) definieren. Für ihre Verknüpfungen lassen sich im Falle der oben genannten speziellen Mengen explizite Regeln gewinnen. Bezeichnet man die Wertemenge einer auf A erklärten reellwertigen Funktion als ihren Komplex, so gilt der Einschließungssatz:

Der Komplex der Verknüpfung zweier Funktionen ist enthalten in der Verknüpfung der Komplexe der beiden Funktionen. In Spezialfällen sind beide Mengen gleich. Spezielle Methoden gestatten dieser Gleichheit möglichst nahe zu kommen. Es wird ferner der Zu-

sammenhang zwischen der Potenzmenge der reellen Matrizen und den Matrizen M, deren Elemente Komplexe reeller Zahlen sind, aufgezeigt. Die Potenzmengenmultiplikation ist für Matrizen auf einer Rechenanlage wenig implementierungsfreundlich. In M wird sie daher durch eine Multiplikation, welche über die Elemente definiert wird, approximiert. Diese liefert stets eine nicht kleinere Menge. Für Matrizen mit auf A erklärten reellen Funktionen als Elementen wird der Begriff des Komplexes und der Hülle eingeführt. Der erstere entsteht durch Übergang zur Wertmenge in der gesamten Matrix, der letztere, indem man in den einzelnen Elementen zum Komplex übergeht. Für beide Begriffe werden Einschließungssätze angegeben.

MAYER, O.: Über die Struktur und Eigenschaften von Intervallprozessen

Die Struktur der Räume, auf die man in der Intervallrechnung stößt, genügt einem System von Bedingungen, das aus einer geeigneten Definition des linearen Raumes allein durch Abschwächung des Distributivgesetzes hervorgeht. Wegen des Fehlens inverser Elemente ist die Norm der Differenz von zwei Elementen keine Metrik. Dennoch läßt sich in jedem dieser Räume eine homogene und translationsinvariante Metrik angeben, so daß sie bezüglich dieser vollständig sind und sich von Banachräumen nur durch das schwächere Distributivgesetz unterscheiden. Speziell werden die Eigenschaften von Normen und Metriken für Intervallvektoren und Intervallmatrizen untersucht.

Zum Gleichungssystem $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}$ ($\mathfrak{A}$ Intervallmatrix, $\mathfrak{b}$ Intervallvektor) wird eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer eindeutigen Lösung angegeben. Für die Iteration $\mathfrak{x}_{n+1} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}_n + \mathfrak{b}$ zur Bestimmung dieser Lösung wird ein notwendiges und hinreichendes

Konvergenzkriterium bewiesen und mit den entsprechenden Aussagen für reelle lineare Gleichungssysteme verglichen.

ALEFELD, G.: Der Fixpunktsatz für Pseudometrische Räume in der Intervallrechnung

Gegeben sei der Raum $V_n(\mathbb{I}(R))$ der Intervallvektoren $\mathfrak{x}$. Durch Einführung einer Halbordnung in R^n und Festlegung einer Pseudometrik $\rho \in R^n$ wird der $V_n(\mathbb{I}(R))$ zu einem pseudometrischen Raum. Es wurden Operatoren $T: V_n(\mathbb{I}(R)) \overset{T}{\rightarrow} V_n(\mathbb{I}(R))$ betrachtet und nach Fixpunkten der Gleichung $\mathfrak{x} = T\mathfrak{x}$ gefragt. Für die Konvergenz des Iterationsverfahrens $\mathfrak{x}_{m+1} = T\mathfrak{x}_m$ wurden Kriterien angegeben, Voraussetzungen für die Eindeutigkeit des Fixpunktes festgelegt, sowie eine Fehlerabschätzung angegeben. Weiter wurde eine Möglichkeit angegeben, komplexe Intervalle einzuführen. Die Arithmetik für komplexe Intervalle wird wegen der Notwendigkeit, diese auch praktisch durchführen zu können, auf reelle Intervalle zurückgeführt. Bei der Untersuchung von Fixpunkteigenschaften von komplexen Operatoren ergeben sich dadurch teilweise neue Kriterien.

HERZBERGER, J.: Über einige Begriffe und Eigenschaften der Intervallrechnung

Alle wichtigen arithmetischen Überlegungen der Intervallrechnung lassen sich schon in der Menge $P(R)$ der reellen Komplexe durchführen. Eine metrische Struktur für Konvergenzbetrachtungen und zur Gewinnung von Abschätzungsformeln läßt sich schon in der Menge $C(R)$ der kompakten Teilmengen reeller Zahlen einführen. Die reellen Zahlen R und die reellen, beschränkten und abgeschlossenen Intervalle $\mathbb{I}(R)$ sind isometrisch und bezüglich der erklärten Verknüpfungen homomorph in $C(R)$ eingebettet. Viele praktisch vor-

kommenden Funktionen in C(R), z.B. die rationalen Funktionen, lassen sich durch Bildung der Wertemenge geeigneter reeller Funktionen beschreiben. Unter relativ schwachen Voraussetzungen lassen sich für eine wichtige Klasse solcher Funktionen zwei allgemeine Sätze beweisen, die eine ganze Reihe praktisch wichtiger Abschätzungsformeln als Spezialfälle enthalten. Schließlich führt ein allgemeiner Fixpunktsatz in C(R) auf wichtige Anwendungen bei Iterationsverfahren.

HALLER, H: <u>Externe Zahlendarstellung bei Intervallrechnung</u>

Die "Genauigkeit" der Zahlendarstellung ist nur so weit sinnvoll, als die Toleranz (Intervallbreite) dies angibt. Für praktische Zwekke kann auch die r e l a t i v e Genauigkeit der Toleranz bescheiden sein. Man kommt mit einer Zahlendarstellung aus, die im Vergleich zu sonst üblichen Notierungen um höchstens 4-5 Dezimalziffern länger ist. Das Mitführen eines "Normal-Wertes" ist - nicht aus Gründen einer bequemen Darstellung - problematisch.

DÖRING, B.: <u>Eine a-posteriori-Schranke für das Newton-Verfahren in Banach-Räumen</u>

In den Lehrbüchern über Funktionalanalysis und Numerische Mathematik findet man für das Newton-Verfahren in Banach-Räumen bisher nur a-priori-Schranken. Diese Schranken übertreffen den wirklichen Fehler bzw. dessen Norm oft um mehrere Zehnerpotenzen, sind also für die praktische Anwendung ungeeignet. Im Vortrag wird ohne zusätzliche Voraussetzungen eine a-posteriori-Schranke hergeleitet, die schärfer ist als die bisherigen Schranken. Am Beispiel einer gewöhnlichen Gleichung, zweier Gleichungssysteme, zweier nichtlinearer Integralgleichungen und einer Matrix-Eigenwertaufgabe wird gezeigt, daß die neue Schranke etwa in der Größenordnung

des 1,1 bis 20-fachen der Norm des tatsächlichen Fehlers liegt. Die Herleitung lehnt sich eng an den Beweis des Satzes über das Newton-Verfahren von Antosiewicz und Rheinboldt an, der bei dieser Gelegenheit etwas vereinfacht und klarer gegliedert wird.

SCHARF, V.: Anwendungsmöglichkeiten der Intervallrechnung zur numerischen Behandlung einer Klasse Sturmscher Randwertaufgaben

Gegeben sei das folgende Randwertproblem

$$u^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i(t)\, u^{(i-1)}(t) + b(t), \quad A_i(t) \text{ und } b(t) \text{ in } [a,b] \text{ stetig}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\, u^{(k-1)}(t_i) = \rho_i\,, \quad i = 1(1)n, \quad t_i \in [a,b].$$

Die Matrix (α_{ik}) sei regulär.

Unter dieser Voraussetzung erhält man zunächst ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung der Lösung, welches im wesentlichen aus der iterativen Berechnung einer gewissen Matrix besteht. Eine Einschließung des Wertevorrates der in dieser Matrix enthaltenen stetigen Funktionen gelingt grundsätzlich mit Hilfe von Polynomstreifen. Da in gewissen Fällen eine zu große Breite des Resultatstreifens möglich ist, muß im Einzelproblem über die Anwendbarkeit der Methode entschieden werden. Es werden einige Abschätzungen angegeben, durch die diese Entscheidung a-priori erleichtert wird.

AVENHAUS, J.: Das Anfangswertproblem bei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Fehlererfassung

Gegeben sei das Problem $y' = f(x,y)$, $y(x_o) = y_o$ mit rationalem

$f(x,y)$. Es wird ein Verfahren angegeben, das bei gegebenem Anfangsintervall Y_0 ein Intervall Y_1 liefert so, daß für alle Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung mit $y(x_0) \in Y_0$ gilt: $y(x_0 + h) \in Y_1$. Die Schranken von Y_1 werden über eine Defektabschätzung gewonnen. Mit Hilfe der Intervallrechnung werden sie unter Einschluß der Rundungsfehler gleichzeitig bestimmt. Als Ansatzfunktion kann man sich einen Abschnitt der Taylor-Entwicklung der Lösung $y(x)$ beschaffen. Dann ist der Defekt eine rationale Funktion in x, und die Schrankenfunktionen lassen sich in einfacher Weise in Form einer Potenzreihe darstellen. Bricht man diese Reihe ab, so läßt sich der Rest bequem abschätzen.

KRAWCZYK, R.: Einschließung von Nullstellen mit Hilfe einer Intervallarithmetik

Es wird ein Iterationsverfahren angegeben, welches alle reellen Nullstellen einer Funktion, die in einem gegebenen Intervall liegen, möglichst gut einschließt. Liegt nur eine Nullstelle in diesem Intervall, so liefert dieses Verfahren eine Iterationsfolge, die unter gewissen Voraussetzungen über die gegebene Funktion quadratisch gegen die Nullstelle konvergiert. In gewissen Fällen kann ausgesagt werden, daß mit Sicherheit keine Nullstelle in dem gegebenen Intervall liegt. Das Verfahren kann außerdem zur Bestimmung reeller Nullstellen ausgebaut werden. Diese Methode wird auf allgemeine Gleichungssysteme im R_n übertragen und insbesondere zur Einschließung komplexer Nullstellen angewandt.

RIEDER, P.: Abbrechkriterien bei der numerischen Summation von Reihen

Eine Reihe mit betragsmäßig monoton fallenden Gliedern alternierenden Vorzeichens soll numerisch summiert werden. Bei der gewohnten

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Maschinenrechnung bricht man die Summation ab, wenn das m-te Reihenglied kleiner als eine halbe Einheit der letzten Mantissenstelle 2^{-k} der Teilsumme $\hat{S}_m$ [$\hat{S}_m$ gerundeter Wert von S_m] geworden ist:

$$m := \min \{\nu \mid \hat{a}_\nu < 2^{-(k+1)}\}.$$

Die Teilsummen sind abwechselnd zu groß und zu klein. In der Intervallrechnung wird daher gerechnet, bis die Oberschranken der zu großen Teilsummen nicht mehr kleiner, die Unterschranken der zu kleinen Teilsummen nicht mehr größer werden. Dafür ist hinreichend, daß die Differenz aufeinanderfolgender Reihenglieder zweimal hintereinander kleiner als 2^{-k} ist:

Abbrechindex $n := \min \{\nu \mid a_{\nu-2} - a_{\nu-1} < 2^{-k},\ a_{\nu-1} - a_\nu < 2^{-k}\}$.

Man zeigt leicht, daß immer $n \leq m+2$ gilt. In der Praxis wird bei schnell konvergenten Reihen wie $\sum (-1)^\nu / \nu!$ meist $n = m+2$ erreicht, bei langsam konvergenten Reihen wie $\sum (-1)^\nu / (\nu+1)^3$ ist dagegen $n = \frac{m}{k}$ mit $k \approx 2 \div 5$.

NICKEL, K.: <u>Zwei Beispiele zur Numerik und Logik der Intervallrechnung</u>

1. EIN EINFACHES LIMITIERUNGSVERFAHREN

Es sei

$$s := \sum_{\nu=o}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu \quad \text{mit} \quad a_\nu := f(\nu) \to o;$$

dabei sei f(x) vollmonoton (d.h. es sei $(-1)^\nu f^{(\nu)}(x) > o$ für $o \leq x < \infty$, $\nu = o, 1, \ldots$). Dann ist für $n = o, 1, \ldots$ durch

$$\sigma_n^{(o)} := \sum_{\nu=o}^{n} (-1)^\nu a_\nu;$$

$$\sigma_n^{(k+1)} := (\sigma_{n+1}^{(k)}) / 2 \quad \text{für} \quad k = o, 1, \ldots$$

ein besonders einfaches Limitierungsverfahren definiert mit der Einschließungseigenschaft

$$\sigma_{2n}^{(k)} > s > \sigma_{2n+1}^{(k)} .$$

Die Programmierung in Triplex-ALGOL 60 ist besonders einfach und wurde vorgeführt. Zwei Ergebnisse auf einer 9-ziffrigen Maschine (Z 23) sind:

a) $a_\nu := 1/(\nu+1)$ (mit $s = \ln 2$) gibt schon für $n = 17$ den optimalen (End)-Wert

$0.693\,147174 \leq s \leq 0.693147189.$

b) $a_\nu := \frac{1}{\sqrt[8]{\nu+1}}$ gibt für $n = 15$ den Endwert

$0{,}527\,739\,965 \leq s \leq 0.527\,740\,005.$

2. POLYNOMWURZELN

In Num. Math. 9 (1966), 80-98 wurde ein Algorithmus zur näherungsweisen Berechnung der Nullstellen eines Polynoms einschließlich einer Fehlerabschätzung angegeben. Dabei blieb noch eine logische Schwierigkeit, wenn die Fehlerkreise der einzelnen Näherungswerte sich überschnitten. Dieses Problem läßt sich nunmehr lösen mit Hilfe der Intervallarithmetik und mit Hilfe von neuen Abschätzungsformeln.

SANTO, H., WIPPERMANN, H.-W.: <u>Intervallrechnung in den Programmiersprachen Triplex-ALGOL und ALGOL 68</u>

Im Bereich wissenschaftlicher Rechnungen sind höhere Programmiersprachen das angemessene Hilfsmittel zur Formulierung der Probleme, die auf elektronischen Rechenanlagen gelöst werden sollen. Für die Erfordernisse der Intervall-Analysis wurde an der Universität (TH) Karlsruhe die Sprache Triplex-ALGOL entwickelt und

implementiert. Die Grundzüge dieser Sprache werden erläutert und ein Einblick in die Realisierung der Intervallarithmetik gegeben. Die Erfahrungen aus einjähriger Anwendung der Sprache legen eine Weiterentwicklung nahe. Die zur Zeit im Entwurf bekannte Sprache ALGOL 68 erfüllt nicht alle zu stellenden Forderungen. Würde man ihr jedoch u.a. Operatoren zur arithmetischen Verknüpfung von r e a l -Zahlen mit Rundung nach oben und unten hinzufügen, könnte sie allen Anforderungen der Intervallrechnung gerecht werden. Intervall-Operatoren und Funktionen könnten, wie an Beispielen gezeigt wird, in der Sprache ALGOL 68 selbst formuliert werden.

CHRIST, H.: Spezielle Operatoren für die Intervallrechnung in ALGOL 68

Für den Aufbau einer Maschinenintervallarithmetik wie auch für Einzelberechnungen von Schranken werden arithmetische Maschinenoperationen mit einseitiger Rundung benötigt, also 8 Operationen entsprechend den vier Grundrechenarten. Diese Operationen lassen sich prinzipiell nicht vollständig in der Sprache beschreiben, vielmehr muß man drei davon voraussetzen. Es wird gezeigt, von welcher Kombination man zweckmäßigerweise ausgeht und ein entsprechender Vorschlag für eine Erweiterung von ALGOL 68 gemacht.

Näherungsweise optimale Schrankenoperationen lassen sich dagegen in der Sprache angeben, wenn man die üblichen arithmetischen Maschinenoperationen mit einem einstelligen Korrekturoperator zusammenfaßt. Dabei ist auf die Monotonie der Korrekturoperation zu achten, damit die entsprechende Maschinenintervallarithmetik die Teilmengeneigenschaft erfüllt. Der Korrekturoperator läßt sich für eine g e g e b e n e Anlage in ALGOL 68 formulieren. Die elegantere Lösung ist daher sicher die Einbeziehung optimaler Schrankenoperationen in ALGOL 68.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft