Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 13/68

Arbeitsgemeinschaft Prof. Dr. P. Roquette

18. und 19. Mai 1968

Ziel dieses Arbeitsseminars war es, die Theorie der C_i-Körper systematisch durchzuarbeiten. Diese Theorie hat gerade in neuerer Zeit durch eine Reihe von Resultaten über quadratische Formen und durch Untersuchungen über p-adische Körper an Bedeutung gewonnen. Es wurde auch auf den Zusammenhang der C_i-Theorie mit der Galois-Kohomologie eingegangen.

Teilnehmer

Frey, G., Heidelberg	Leicht, J., Heidelberg
Geyer, W.D., Heidelberg	Lorenz, F., Heidelberg
Göhner, H., Tübingen	Martens, G., Heidelberg
Göhner, U., Heidelberg	Radbruch, K., Tübingen
Hahnel, P., Heidelberg	Roquette, P., Heidelberg
Herrmann, O., Heidelberg	Schmale, W., Stuttgart
Irion, K., Heidelberg	Sprung, H., Heidelberg

Vortragsauszüge

LORENZ, F.: Definition der C_i-Körper und der Satz von Tsen

Betrachtet werden homogene Formen F über einem gegebenen Körper K in $n = n(F)$ Variablen und vom Grade $d = d(F)$. K heißt ein

C_i-Körper (i eine ganze Zahl $\geq$ o), falls jede homogene Form F über K mit $n > d^i$ eine nicht-triviale Nullstelle in K besitzt. Statt homogener Formen kann man auch Polynome ohne konstantes Glied betrachten. Hat dann K in bezug auf diese die obige Eigenschaft, so heißt K ein SC_i-Körper. Die C_o-Körper sind genau die algebraisch abgeschlossenen Körper. Jeder Körper K, über dem es eine algebraische Erweiterung L vom Grade $n > 1$ gibt, besitzt eine homogene Form F über K mit $n(F) = d(F) = n$, die keine nichttriviale Nullstellen in K besitzt, nämlich die Norm von L über K. Durch Betrachtung der reduzierten Norm einer Divisionsalgebra über ihrem Zentrum erkennt man, daß die Brauersche Gruppe eines C_1-Körpers trivial ist. Die C_i-Eigenschaft kann als Verallgemeinerung der algebraischen Abgeschlossenheit eines Körpers angesehen werden. Dies erkennt man auch aus dem folgenden Satz:

Sind r homogene Formen $F_1, \ldots, F_r$ in n Variablen und vom gleichen Grad d über einem C_i-Körper K gegeben und gilt $n > rd^i$, so haben $F_1, \ldots, F_r$ eine gemeinsame Nullstelle in K.

Aus dem eben formulierten Satz kann man den Satz von Tsen (Journ. of the Chinese Math. Soc. 1, 1936) ziemlich leicht gewinnen. Er besagt:

Ist K ein C_i-Körper und L eine Erweiterung von endlichem Transzendenzgrad s über K, so ist L ein C_{i+s}-Körper.

Der Satz von Tsen sowie der ihm vorangehende Satz gelten entsprechend für SC_i-Körper, wenn man überall homogene Formen durch Polynome ohne konstantes Glied ersetzt.

RADBRUCH, K.: Endliche Körper sind C_1-Körper

(Chevalley, Warning, Hamburger Abhandlungen 11, 1936 und Ax, American Journal of Math. 86, 1964)

Dieses Resultat folgt aus einem Satz von Warning:

Sei K endlicher Körper der Charakteristik p, F ein Polynom über K in n Variablen und vom Grad d. Ist dann $n > d$, so ist die Anzahl der Lösungen von F in K^n durch p teilbar. Allgemeiner ist die Anzahl der simultanen Lösungen von endlich vielen Polynomen über K teilbar durch p, falls die Summe aller ihrer Grade echt kleiner ist als die Variablenzahl.

SCHMALE, W.: <u>Ist K C_i-Körper, dann ist $K((t))$ C_{i+1}-Körper</u>

Dieser Satz folgt aus dem entsprechenden Satz für rationale Funktionenkörper (Satz von Tsen) mittels eines von Greenberg (Publication Math. 31, 1966) angegebenen Resultats:

Sei R ein kompletter diskreter Bewertungsring mit Primelement t. Seien $F_1, \ldots, F_r$ Polynome aus $R[X_1, \ldots, X_n]$. Dann gibt es ganze Zahlen $N \geq 1$, $c \geq 1$, $s \geq o$, so daß für jedes $\nu \geq N$ und jedes $x \in R^n$ mit $F(x) \equiv o \bmod t^\nu$ $(1 \leq i \leq r)$ ein $y \in R^n$ existiert mit $F(y) = o$ und $x \equiv y \bmod t^{[\nu/c]-s}$.

Der Beweis wird durch Induktion nach der Dimension des Ringes $K[X_1, \ldots, X_n]/F_1, \ldots, F_r$ geführt. Dabei ist K der Quotientenkörper von R. Sei $A = R[X_1, \ldots, X_n]/F_1, \ldots, F_r$. Man kann o.E. annahmen, daß A Integritätsbereich ist. Es werden zwei Fälle unterschieden:

(1) A ist separabel über R. Dann läßt sich die Behauptung im wesentlichen auf das Henselsche Lemma (für mehrere Variable) zurückführen.

(2) A ist inseparabel über R. Hier kommt es darauf an zu zeigen, daß jeder Punkt $\bmod t^\nu$ von A in Wahrheit schon ein Punkt $\bmod t^{\nu-r}$ eines echten Faktorringes A' über R von A ist.

Man kann dann die Induktionsvoraussetzung auf $K \otimes_R A'$ anwenden. (Siehe hierzu auch den nächsten Vortragsauszug.)

GEYER, W.D.: Zum Beweis des Greenbergschen Satzes

(Bezeichnungen wie oben)

Der Reduktionsschritt für den inseparablen Fall läßt sich recht instruktiv auch mit Differentialen darstellen:

Seien $\Delta(A)$ und $\Delta(R)$ die Differentialmoduln von A und R. Dann ist $\Delta(R)$ ein freier R-Modul, etwa mit der Basis dr_j, und die Inseparabilität von A über R besagt gerade, daß in $\Delta(A)$ eine Relation $\Sigma G_j dr_j = o$ existiert mit $o \neq G_j \in A$. Fassen wir G_j als nicht in $(F_1, \ldots, F_r)$ liegende Polynome aus $B = R[X_1, \ldots, X_n]$ auf, so kann man diese Relation in $\Delta(B)$ so schreiben: $\Sigma G_j dr_j = \Sigma H_i dF_i + \Sigma F_i \omega_i$ mit $H_i \in B$, $\omega_i \in \Delta(B)$. Ist nun $x \in R^n$ mit $F_i(x) \equiv o \bmod t^{\nu}$ gegeben, so folgt $\Sigma G_j(x) dr_j \equiv o \bmod t^{\nu-1}$ in $\Delta(R)$, also $G_j(x) \equiv o \bmod t^{\nu-1}$, womit der Greenbergsche Satz auf $A' = B/(..F_i, .. G_j ..)$ reduziert ist.

HAHNEL, P.: Kohomologische Dimension der Gruppe G_k

Es wurde § 2 des II. Kapitels aus J.P. Serre "Cohomologie Galoisienne" vorgetragen. Darin wird die kohomologische p-Dimension $cd_p(G_k)$ der Galoisgruppe G_k eines separablen Abschlusses des Körpers k untersucht. Wenn $p = char(k)$, dann ist $cd_p(G_k) \leq 1$. Für die übrigen p werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß $cd_p(G_k) \leq n$ ist. Die kohomologische Dimension $cd(G_k)$ wird als Supremum der p-Dimension definiert.

IRION, K.: Körper der Dimension ≤ 1

(J.P.Serre, Cohomologie Galoisienne Ch. II, § 3)

Man sagt, ein Körper k habe kohomologische Dimension ≤ 1, wenn $cd(G_k) \leq 1$ und wenn im Fall $char(k) = p \neq 0$ zusätzlich noch $Br(K)(p) = 0$ ist für jede algebraische Erweiterung K von k. Dabei

ist Br(K)(p) der p-Anteil der Brauergruppe von K. Weitere hierzu gleichwertige Eigenschaften wurden angegeben. Hat k kohomologische Dimension ≤ 1, so auch jede algebraische Erweiterung K von k. Vollkommene Körper haben kohomologische Dimension ≤ 1, falls $cd(G_k) \leq 1$. Jeder C_1-Körper hat kohomologische Dimension ≤ 1. Die Umkehrung hiervon ist nicht richtig. (Siehe nächsten Vortrag). Ist k ein komplett und diskret bewerteter Körper mit endlichem Restklassenkörper, dann ist $cd(G_k) = 2$, aber k braucht nicht C_2 zu sein (Gegenbeispiel im nächsten Vortrag).

ROQUETTE, P.: (i) <u>p-adische Körper sind nicht C_2</u>. (ii) <u>Konstruktion eines Körpers der kohomologischen Dimension ≤ 1, der aber kein C_1-Körper ist</u>
(Ax, Proc. of Amer. Math. Soc. 16 (1965) S. 1214)

(i) Ein Körper k hat die Eigenschaft $C_i(d)$, wenn jede Form in n Variablen und vom Grad d mit $n > d^i$ eine nichttriviale Nullstelle in k hat.

Der p-adische Zahlkörper Q_p hat die Eigenschaft $C_2(2)$ und $C_2(3)$. Ersteres ist wohlbekannt aus der Theorie der quadratischen Formen, letzteres hat Lewis (Ann. of Math. 56, S. 473-478) gezeigt. Durch explizite Angabe von Formen wurde gezeigt, daß Q_p nicht $C_2(p(p-1))$ für $p > 2$ und Q_2 nicht $C_2(4)$ ist. Insbesondere ist Q_p also kein C_2-Körper entgegen einer Vermutung von Artin.

(ii) Es seien p, q zwei Primzahlen mit $p < q$, k_o ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik o und $k_o((t_o))$ der Potenzreihenkörper in einer Variablen über k_o. k entstehe aus k_o durch Adjunktion aller r-ten Wurzeln aus t_o mit r prim zu p und q. Wir betrachten den Körper K, der aus dem Potenzreihenkörper k((t)) über k durch Adjunktion aller r-ten Wurzeln aus t mit r prim zu p+q entsteht. Nun ist k kein C_o-Körper. Auf Grund des nachfolgen-

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

den Lemmas ist daher K kein C_1-Körper. Es ist jedoch

$$G_K \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \prod_{l | p+q} \mathbb{Z}_l \quad ,$$

und somit hat K kohomologische Dimension ≤ 1.

LEMMA: Sei K ein nichtarchimedisch bewerteter Erweiterungs-körper von k mit Restklassenkörper k und Wertegruppe W. Ist dann k nicht $C_i(d)$ und $[W: dW] \geq d$, so ist K nicht $C_{i+1}(d)$.

Durch eine im Prinzip ähnliche, doch etwas komplizierte Konstruktion erhält man einen Körper der kohomologischen Dimension ≤ 1, der nicht C_i-Körper ist für alle i.

W. Schmale (Stuttgart)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft