Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

# Tagungsbericht 15/68

## Grundlagen der Geometrie

1. bis 6. Juni 1968

Unter der Leitung der Herren Professoren F. Bachmann (Kiel), H. Freudenthal (Utrecht) und E. Sperner (Hamburg) fand die traditionelle Pfingsttagung über "Grundlagen der Geometrie" in diesem Jahre vom 1. bis 6. Juni in Oberwolfach statt.

Das gedrängte Programm der letzten Jahre und die erwartet hohe Zahl der Teilnehmer, unter denen auch diesmal erfreulich viele ausländische Gäste waren, hatten dazu geführt, daß für beide Pfingsttage Vorträge angesetzt wurden.

Der angenehme Aufenthalt im neuen Hause ließ dies eher als einen Vorteil erscheinen, zumal hierdurch auch eine Teilung der Tagung vermieden werden konnte.

In diesem Jahr wurden in Diskussionen und Vorträgen vor allem Fragen der topologischen Geometrie, der Kreisgeometrie sowie der absoluten Geometrie und ihrer Modelle behandelt.

### Teilnehmer

Aczel, J., z.Zt. Bochum
Andre, J., Saarbrücken
Arnold, H.-J., Bochum
Bachmann, F., Kiel
Barlotti, A., Firenze
Bollow, B., Darmstadt
Bröcker, L., Kiel
Castrucci, B., z.Zt. Gießen
Ceccherini, P.V., Rom
Chen, Y., Bochum

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Dembowski, P., Frankfurt
Finke, G., Kiel
Freudenthal, H., Utrecht
Garner, C., Ottawa
Götzky, M., Kiel
Gupta, H.N., Regina Ca.
Havel, V., Brno
Havlicek, K., Prag
Hering, Ch., Mainz
Hübner, G., Hamburg
Junkers, W., Bonn
Joussen, J., Hamburg
Kinder, H., Kiel
Klopsch, P., Kiel
Lingenberg, R., Darmstadt
Mäurer, H., Darmstadt
Meissner, H., Hamburg
Melchior, U., Bochum
Misfeld, J., Hamburg
Pejas, W., Kiel
Pieper, I., Hamburg
Salzmann, H., Tübingen
Sörensen, K., Hamburg
Sperner, E., Hamburg
Scherk, P., z.Zt. Freiburg
Schröder, E., Hamburg
Strambach, K., Frankfurt
Timm, J., Hamburg
Wille, R., Bonn

## Vortragsauszüge

ACZEL, J.: Kollineationen auf Drei- und Vierecken der Desarguesschen projektiven Ebene

SATZ 1: Sind $S_1$, $S_2$, $S_3$ drei Geraden der projektiven Ebene über einem Schiefkörper F, die nicht alle durch denselben Punkt gehen, und ist C der Vereinigung der Punktmengen $S_1$, $S_2$, $S_3$, so sind alle Kollineationen f von C, die eineindeutig in den Schnittpunkten aller Paare von Geraden $S_1$, $S_2$, $S_3$ sind und für die f(C) nicht kollinear ist, auf der Vereinigung von $S_1$ und $S_2$ bis auf reguläre lineare Transformationen als Faktoren durch

(1) $$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (e(x_1), e(x_2), e(x_3))$$

gegeben, wo e ein beliebiger Endomorphismus der multiplikativen Halbgruppe von F ist.

Wegen der Kollinearität der f auf C sind damit die f auf ganz C

festgelegt, im Falle $e(-1) = -1$ sogar durchweg durch (1).

Eine Konsequenz ist der folgende

SATZ 2: Zwei Dreiecksnomogramme mit den projektiv-streng-monotonen und surjektiven Skalen $f_j$ bzw. $f'_j$ auf den Geraden $S_j$ bzw. $S'_j$ $(j = 1, 2, 3)$ in allgemeiner Lage stellen denselben Funktionalzusammenhang (Gleichung) genau dann dar, wenn $f'_j = AeBf_j$ $(j = 1, 2, 3)$ ist mit regulären projektiven Transformationen $A, B$ und mit

$$e(x) = |x|^a \operatorname{sign} x$$

($a$ eine positive Konstante).

Die Dualisierung ergibt Aussagen und Probleme bezüglich Dreigewebe.

SATZ 3: Sind $S_1, S_2, S_3, S_4$ vier Geraden in allgemeiner Lage in einer projektiven Ebene über einem Schiefkörper $F$ und ist $C$ die Vereinigung der Punktmengen $S_1, S_2, S_3, S_4$, so sind alle Kollineationen $f$ von $C$, die eindeutig in $S_1 \cap S_2$, $S_2 \cap S_3$, $S_3 \cap S_1$ sind und für die $f(C)$ nicht kollinear ist, auf $C$ bis auf reguläre Transformationen als Faktoren durch $(x_1, x_2, x_3) \to (e(x_1), e(x_2), e(x_3))$ gegeben, wo $e$ ein beliebiger nichtkonstanter Endomorphismus (und somit ein Isomorphismus auf einen Unterkörper) von $F$ ist.

ARNOLD, H.-J.: <u>Allgemeine affine Ringgeometrie</u>

Den freien Ringmoduln $\mathfrak{S}^{|\mathfrak{J}|}$ über Ringen $\mathfrak{S}$ mit Einselement werden (wie im Falle des Vektorraumes über einem Körper) affine Geometrien zugeordnet, wobei die Beschränkung auf $|\mathfrak{J}| \geq 3$ den räumlichen Charakter dieser Geometrien bestimmt. Es werden diese affinen Ringräume geometrisch-axiomatisch gekennzeichnet. Ferner werden diejenigen Gruppen $\mathfrak{G}$ mit Familie $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ überdeckenden Untergruppen charakterisiert, zu denen es einen Ring $\mathfrak{S}$ und eine Indexmenge $\mathfrak{J}$

$|\mathfrak{J}| \geq 3$ gibt, so daß $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}^{|\mathfrak{J}|}(+)$ und $\mathfrak{T}$ die Familie der zyklischen $\mathfrak{S}$-Untermoduln des freien $\mathfrak{S}^{|\mathfrak{J}|}$-Moduls ist.

BRÖCKER, L.: <u>Zur Struktur orthogonaler Gruppen über bewerteten Körpern</u>

Die orthogonalen Gruppen über einem Körper mit diskreter kompletter Bewertung und zu einer anisotropen quadratischen Form besitzen abzählbar viele sogenannte Kongruenz-Untergruppen, welche Normalteiler sind.

Es wird für Dimension 3 gezeigt, daß diese im wesentlichen die einzigen Normalteiler der orthogonalen Gruppe und ihrer Kommutatorgruppe sind.

CECCHERINI, P.V.: 1) <u>Morphisms between projective or affine spaces</u>

2) <u>On some definitions of projective spaces</u>

1) A punctual one-to-one correspondence between two projective spaces S und S' (of dimensions > 1 not necessarily equal), which sends every triplet of collinear points of S into a triplet of collinear points of S' (i.e. a "semicollineation") is necessarily a collineation or not, according as the spaces contain a finite or infinite number of points. For the infinite (numerable) case an example of a correspondance $S \to S'$ is studied. The question touches the definition of collineation, but is also a starting point for further investigations. After some remarks about "semicollineations between two lines" it is proved that a semicallineation $f\colon S_{r,\gamma} \to S'_{r',\gamma'}$ is always inherent to a monomorphism $\gamma \to \gamma'$. The existence of certain semicollineations offers the means for constructing some fibrations of projective spaces. If S and S' are affine spaces, some examples of semicollineations

are given. Other properties are then stated.

2) A new definition of the graphic spaces and some generalizations are discussed, also in connection with the "geometric lattices" and with the "affine spaces of R. PERMUTTI".

CHEN, Y.: Eine Kennzeichnung der pseudoeuklidischen Kreisgeometrie

Die pseudoeuklidische Kreisgeometrie wurde von W. BENZ (J.f.Reine u.Angew.Math.1968) bzw. G. KAERLEIN (Dipl.Arb.1968 Bochum) durch Inzidenz- zusammen mit Transitivitätseigenschaften der Automorphismengruppe bzw. mit einem Schließungssatz (Satz von MIQUEL) gekennzeichnet. Das gleiche Ziel können wir hier mittels eines relativ einfachen Axiomensystems aufgrund einer Berührrelation zusammen mit Polaritätsforderungen erreichen. Der Beweis stützt sich auf eine Arbeit von H. LENZ (Math. Ann. 1956).

FINKE, G.: Längengruppen in verallgemeinerten Hilbertebenen

Unter einer verallgemeinerten Hilbertebene wollen wir eine Hilbertebene verstehen, in der nur auf die Existenz von Mittelpunkten und Winkelhalbierenden verzichtet wird. Ähnlich wie bei den Hilbertebenen läßt sich auch einer verallgemeinerten Hilbertebene eine Längenhalbgruppe $\mathfrak{L}$ zuordnen, und weiter existiert zu $\mathfrak{L}$ eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Längengruppe $(G, \mathfrak{L}, \alpha)$, wobei $G$ eine Gruppe ist mit $\mathfrak{L}$ als P-Bereich und $\alpha$ ein involutorischer Antiautomorphismus, welcher $\mathfrak{L}$ in sich abbildet. - Gibt es Strecken ohne Mittelpunkt, so ist $\alpha$ von der Identität verschieden, $G$ nicht kommutativ und $\mathfrak{L}$ kein Positivbereich von $G$.

Ein Konstruktionsverfahren für solche Längengruppen (im Sinne einer Erweiterungstheorie) wird angegeben. Insbesondere zeigt man, daß

alle Längengruppen $(G, P, \alpha)$, deren (bez. der von P induzierten Ordnung) konvexer Gruppenabschluß der Kommutatorgruppe von G abelsch ist, vollständig charakterisierbar sind durch kommutative geordnete Gruppen.

GARNER, C.: Regular Skew Polyhedra in Hyperbolic Space

A "Regular Skew Polyhedron" is a generalization of an ordinary regular polyhedron, obtained by allowing a polyhedron to have a regular skew polygon instead of a plane polygon as vertex figure.

It is known that there are only three regular skew polyhedra in Euclidean three-space. It will be shown that there are exactly 32 in hyperbolic three-space, which are derived from honeycombs whose cells and vertex figures are not inscribed in equidistant surfaces.

The method of deriving these polyhedra is based upon the reflection groups connected with Coxeter's graphical symbols for heneycombs. A few examples of interest are discussed.

GUPTA, H. N.: On some Peculiarities in Cartesian Spaces over arbitrary ordered Fields

In this talk, an n-dimensional Cartesian space over an ordered field F will be conceived of as a space of ordered n-tuples of elements of F with the relations of "betweenness" (a 3-place relation), and "equidistance" (a 4-place relation), defined in the standard way. (Other relations such as collinearity, orthogonality, are definable in terms of betweenness and orthogonality). If the "Streckenabtragung" axiom is assumed to hold, then, as is wellknown, the underlying field is necessarily Pythagorean. If, however, the underlying field is not Pythagorean, interesting things happen. It is one of the purposes of the talk to present some of these pecularities.

Reference will be made to some of the recent results obtained by the speaker and other scholars in this field.

HAVEL, V.: Koordinatisierung und Endomorphismen von 4-Geweben

Es werden die Koordinatenbereiche für 4-Gewebe erster, zweiter und dritter Art eingeführt; das sind sogenannte Doppelsysteme erster, zweiter und dritter Art. Die Sätze über die in diesem Sinne algebraische Beschreibung der Endomorphismen der 4-Gewebe werden angegeben.

HAVLICEK, K.: Über einen Satz von K. Petr
Zum Gedenken des hundertjährigen Geburtstages von K. Petr

Unter dem Begriff der Verzweigung eines Punktes $X$ der projektiven Ebene $\pi$ über $\mathbb{C}$ mittels einer endlichen Menge $M$ von Kollineationen versteht man die Gesamtheit der Punkte in $\pi$, in welche alle Kollineationen der Menge $M$ den gegebenen Punkt $X$ abbilden.

Es sei z.B. $c$ die rationale kubische Kurve in $\pi$ mit verschiedenen Tangenten in ihrem Doppelpunkt und $G_6$ die bekannte Gruppe der automorphen Kollineationen der Kurve $c$. Die Zerlegung der Gruppe $G_6$ liefert gesetzmäßig manche geometrische Eigenschaften der Kurve $c$, von denen man als wichtigste folgende anführen kann:

Die Verzweigung eines beliebigen Punktes der Kurve $c$ mittels $G_6$ besteht allgemein aus 6 Punkten dieser Kurve, welche man in zwei Dreiecke teilen kann, die dreifach homolog sind, wobei die zugehörigen Homologiezentren die drei Wendepunkte der Kurve $c$ sind. (Diese Konstruktion hat schon K. Petr 1906 entdeckt, jedoch ohne Zusammenhang mit der Gruppe $G_6$ ).

Die gruppentheoretische Auffassung ergibt noch weitere Eigenschaften

der Kurve c, einschließlich der Eingliederung in die Geometrie der elliptischen kubischen Kurve.

HÜBNER, G.: <u>Ein Axiomensystem der räumlichen absoluten Geometrie</u>

Das Axiomensystem von NOLTE wird so abgeschwächt, daß einerseits auch elliptische Räume erfaßt werden - dies geschieht durch Zulassung eines Polartetraeders - und daß andererseits auch endliche Modelle möglich sind, die bisher wegen der Existenz eines eigentlichen B ü n d e l s ausgeschlossen waren. Es werden nämlich nur noch gewisse eigentliche B ü s c h e l gefordert, so daß u.a. Modelle über fast allen endlichen Körpern mit Charakteristik $\neq 2$ existieren.

Trotz der Abschwächung gelingt die Einbettung in einen projektiven Raum sowie die Konstruktion einer quadratischen Form, die die Metrik induziert.

Eine Erweiterung auf beliebige Dimensionen scheint möglich; wünschenswert wäre ferner die Einbeziehung der Charakteristik 2.

JUNKERS, W.: <u>Eine Kennzeichnung der desarguesschen projektiven Ebenen durch mehrwertige Ordnungsfunktionen</u>

Bei der Untersuchung mehrwertiger Ordnungsfunktionen ist es sinnvoll, neben dem bewährten, als "Geradenrelation" bezeichneten Axiom auch dessen logische Umkehrung zu betrachten. Insbesondere gilt der folgende

SATZ: Eine projektive Ebene ist genau dann desarguessch, wenn es eine Ordnungsfunktion auf ihr gibt, die sowohl der Geradenrelation als auch deren Umkehrung genügt.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

KLOPSCH, P.: <u>Über die n-dimensionale absolute Geometrie</u>

Die "metrischen Teilräume" der n-dimensionalen absoluten Geometrie im Sinne von F. Bachmann und H. Kinder lassen sich durch einfach zu beschreibende "metrische Teilbereiche" M (n+1)-dimensionaler metrischer Vektorräume $V = V_{n+1}(K, f)$ darstellen (K kommutativ, Char $K \neq 2$). Ist der zu M gehörige metrische Raum nicht elliptisch, so ist seine Bewertungsgruppe isomorph zu der von den Symmetrien $\sigma_x$, $x \in M$, erzeugten Untergruppe der $0(V)$.

Ein metrischer Teilbereich M von V heißt invariant, wenn für alle Symmetrien $\sigma$ von V $M\sigma \subseteq M$ gilt.

Unter speziellen Voraussetzungen über V (der Skalarenkörper K von V ist global, oder K ist beliebig, aber V ist isotop) wurden die invarianten metrischen Teilbereiche von V vollständig beschrieben.

MISFELD, J.: <u>Eine topologische Kennzeichnung der projektiven Räume über den reellen Zahlen</u>

Die erste Frage, die sich im Zusammenhang mit der Themenstellung ergibt, ist die Kennzeichnung der projektiven Räume über topologischen Körpern. Der Ansatz von H. LENZ (Vorles.ü.proj.Geom. Leipzig 1965) liefert nur im kompakten Fall eine Kennzeichnung. In der Note "Topologische projektive Räume", Abh.Math.Sem.Univ. Hamburg, Bd.32 Heft 3-4, konnte ich zeigen, daß die projektiven Räume über topologischen Körpern gerade durch den Begriff des *topologischen projektiven Raumes* beschrieben werden, also durch projektive Räume, die eine topologische Struktur besitzen, so daß Hüllenbildung von Punkt und Teilraum und Schnittbildung von Hyperebene und Teilraum stetige Operationen sind. Jeder n-dimensionale topologische projektive Raum (in diesem Sinne) läßt sich also topologisch und algebraisch in der Form $(K^{n+1})^*/K^*$ über einem topologischen Körper K darstellen.

Es ist dann nach weiteren topologischen Eigenschaften des projektiven Raumes zu suchen, so daß als Koordinatenbereich nur der Körper der reellen Zahlen in Frage kommt. Bei der Untersuchung spezifischer Eigenschaften reeller projektiver Räume findet man, daß solche Räume eine Topologie besitzen, bezüglich der sie zusammenhängend sind. Eine weitere wesentliche Eigenschaft reeller projektiver Räume ist die Tatsache, daß ihre Topologie mit der aus der Anordnungsstruktur der reellen projektiven Räume abgeleiteten Ordnungstopologie übereinstimmt. Es taucht hiermit des Problem auf, diese letzte Eigenschaft rein topologisch zu formulieren. Als Ergebnis erhält man, daß die projektiven Räume über dem Körper der reellen Zahlen unter den desarguesschen topologischen projektiven Räumen dadurch gekennzeichnet sind, daß sie zusammenhängend und nach Herausnahme zweier Hyperebenen unzusammenhängend sind.

PEJAS, W.: Bewegungsgruppen vom Dehnschen Typ

Sei $G(a,J) := \{\alpha \in 0_n(K,f) \mid f(\alpha(a),a) \in 1+2J\}$, wobei $n \geq 3$, K ein kommutativer Körper von Char $\neq 2$, f eine reguläre symmetrische Bilinearform, J ein Ideal eines Bewertungsringes von K und $a \in V$ (mit $f(a,a) = 1$) ist.

Es wird eine Anisotropie-Eigenschaft von f angegeben, welche notwendig und hinreichend dafür ist, daß G(a, J) eine "Bewegungsgruppe" im Sinne des Axiomensystems der absoluten Geometrie von Bachmann-Ahrens-Kinder ist.

PIEPER, I.: Über zweiseitige geschlitzte Inzidenzgruppen

Der Gruppenraum einer elliptischen oder euklidischen Bewegungsgruppe ist eine geschlitzte zweiseitige Inzidenzgruppe (für die Be-

griffe vgl. KARZEL, H.: Bericht über projektive Inzidenzgruppen Jahresber. d. DMV 67, KARZEL, H.: Metrische Geometrie, Vorlesungsausarbeitung, Hamburg, KARZEL, H. u. H. MEISSNER: Geschlitzte Inzidenzgruppen und normale Fastmoduln, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 31).

Um umgekehrt unter den geschlitzten Inzidenzgruppen diejenigen zu kennzeichnen, die sich als Gruppenraum solcher Bewegungsgruppen darstellen lassen, können

1. Verträglichkeitseigenschaften der Inzidenzgruppe oder
2. Dualitätseigenschaften des Raumes

herangezogen werden. Dabei kann ein von H. KARZEL für projektive Inzidenzgruppen gewonnenes Ergebnis (vgl. H. KARZEL, Zweiseitige Inzidenzgruppen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 31) noch verschärft werden.

SCHRÖDER, E.: <u>Projektive Ebenen mit pappusschen Geradenpaaren</u>

Von R.P. Burn stammt die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Hessenberg:

Gibt es in einer projektiven Ebene $\pi$ ein pappussches Geradenpaar, so ist $\pi$ eine pappussche Ebene.

Es wird dargelegt, daß sich dieser Satz recht durchsichtig beweisen läßt, wenn man Begriffsbildungen aus der Minkowskischen Geometrie heranzieht. Genauer:

In der zu $\pi$ dualen Ebene $\pi^*$ lassen sich auf einfache Weise Koordinaten derart einführen, daß $\pi^*$ projektiver Abschluß einer Minkowskischen Ebene, also pappussch und desarguessch ist.

In den Beweis geht eine Kennzeichnung der Bewegungsgruppen Minkowskischer Ebenen ein, die ebenfalls erläutert wird.

SÖRENSEN, K.S.: Zur Darstellung topoligischer geschlitzter Inzidenzgruppen

Desarguessche geschlitzte Räume bzw. Inzidenzgruppen lassen sich nach H. Karzel und H. Meißner [Geschlitzte Inzidenzgruppen und normale Fastmoduln, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 31 (1967) 69-88] durch Vektorbereiche bzw. normale Fastmoduln darstellen. Eine geschlitzte Inzidenzgruppe heißt topologisch, wenn sie weiter mit einer Topologie versehen ist, so daß sie bez. der Gruppen- und der topologischen Struktur eine topologische Gruppe und bez. der geschlitzten und der topologischen Struktur ein topologischer geschlitzter Raum ist.

Es wird zuerst eine Darstellung topologischer geschlitzter Räume (insbesondere also topologischer affiner und topologischer projektiver Räume) mit Hilfe einer speziellen Klasse topologischer Vektorräume angegeben. Dann wird gezeigt, daß jede topologische endlichdimensionale desarguessche geschlitzte Inzidenzgruppe $G$ durch einen topologischen normalen Fastmodul und, falls $G$ zweiseitig und nicht affin ist, sogar durch eine topologische lokale Algebra dargestellt wird.

STRAMBACH, K.: Sphärische Kreisebenen

Zeichnen wir auf der 2-Sphäre ein System $\mathfrak{S}$ von Jordankurven aus, so daß durch je drei verschiedene Punkte genau eine Kurve ("ein Kreis") aus $\mathfrak{S}$ geht, so sprechen wir von einer sphärischen Kreisebene. Es wird bewiesen:

Jede sphärische Kreisebene, die eine punkttransitive bzw. geradentransitive Gruppe $\Gamma$ von Kreisverwandtschaften zuläßt, ist die klassische Möbiusgeometrie der ebenen Schnitte der Kugelfläche.

TIMM, J.: <u>Zur Konstruktion schwach affiner Vektorräume und schwacher binärer Doppelstrukturen</u>

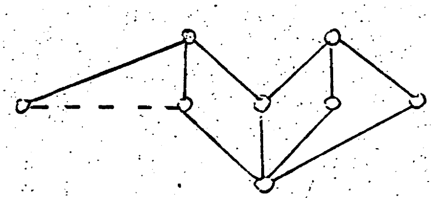
Sperner konstruierte mit Hilfe einer gemeinsamen Verallgemeinerung der Fast- und Alternativkörper, den sogenannten $\mathfrak{S}$-Systemen, schwach affine Vektorräume beliebiger Dimension. Die Frage nach den Eigenschaften der so konstruierten Geometrien hängt eng von der Frage nach der Existenz von $\mathfrak{S}$-Systemen ab, die weder Fast- noch Alternativ- (oder allgemeiner Quasi-) Körper sind.

Es wird eine Verallgemeinerung der Dickson-Zassenhaus-Methode zur Konstruktion schwacher algebraischer Doppelstrukturen angegeben, mit deren Hilfe man solche "echten" $\mathfrak{S}$-Systeme aus Schiefkörpern erhalten kann.

WILLE, R.: <u>Über die Existenz endlicher projektiver Ebenen</u>

Für jede natürliche Zahl n wird eine primitive Klasse $\mathfrak{M}(n)$ modularer Verbände angegeben derart, daß alle endlich erzeugten freien Verbände in $\mathfrak{M}(n)$ endlich sind und daß folgendes Existenzkriterium für endliche projektive Ebenen gilt:

SATZ: Es gibt genau dann eine endliche projektive Ebene der Ordnung n, wenn sich der partielle Verband zu einem Verband aus $\mathfrak{M}(n)$ vervollständigen läßt.



Irene Pieper (Hamburg)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft