MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 16|1968

MARKOFFsche Ketten

9. 6. bis 15. 6. 1968

Die Tagung wurde geleitet von den Herren Kai Lai Chung, Berkeley, und K. Krickeberg, Heidelberg. Insgesamt trafen sich 36 Teilnehmer, darunter 15 ausländische. Die Vortragsthemen reichten von der klassischen Theorie bis zur Ergodentheorie, Rändertheorie und der Theorie der Zufallsmengen. Auf der anderen Seite wurden Verbindungen hergestellt zu älteren Gebieten der Analysis, so zu Summierbarkeitsfragen und in der Potentialtheorie zu Arbeiten von W. Sierpinski.

Teilnehmer

D. Austin, Evanston
Ch. Bandelow, Bochum
D. Bierlein, Karlsruhe
U. Blanke, Bochum
W. Böge, Heidelberg
K. Bosch, Braunschweig
K. L. Chung, Berkeley
H. Dinges, Frankfurt
B. Eifrig, Heidelberg
G. Eicker, Freiburg
H. Engmann, Frankfurt
W. Fieger, Karlsruhe
G. Frederichs, Heidelberg
F. Göbel, Enschede
D. G. Kendall, Cambridge
K. Krickeberg, Heidelberg
V. Kurotschka, Freiburg
J. W. Lamperti, Cambridge
P. A. Meyer, Strasbourg
J. Michalicek, Hamburg
G. Neuhaus, Münster
W. Oberhofer, Bonn
F. Papangelou, London
A. Pittenger, Stanford
T. Postelnicu, Bucuresti
W. E. Pruitt, London
G. F. H. Reuter, London
H. Rost, Frankfurt
M. Schäl, Hamburg
L. Schmetterer, Wien
K. Schürger, Heidelberg
L. J. Snell, Hannover
W. Statuliavičius, Vilnius
R. Theodorescu, Bucuresti
W. Vogel, Bonn
M. Wolff, Tübingen

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

D. G. KENDALL: Random Sets

This will be an account of a general theory of Random Sets in an abstract space. The initial emphasis is on existence and construction-theorems parallel to the Daniell-Kolmogorov theorem. Then some special questions - stationarity, infinite divisibility - will be discussed.

Among many applications are noted (1) sets of residence for a Markoc chain, (2) sets of zeros for a diffusion, (3) sets of geometrical objects in statistical geometry.

H. ROST: Über eine von Stopzeiten erzeugte Ordnung von Verteilungen

Sei P ein Markoff-Kern auf abzählbarem Zustandsraum I; q eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf I. Gegeben seien zwei Verteilungen μ, γ auf I. Es wird eine Ordnung folgendermaßen eingeführt: $\mu \prec \gamma \Leftrightarrow \mu(f) \leq \gamma(f)$ für subharmonisches und q-integrables $f \geq 0$ mit $P(f) < \infty$.

Satz 1: Wenn $q \succ \delta_o$ (Punktmaß der Masse 1 in o) und ein f^* existiert mit $q(f^*) < \infty$, $o \leq f^* < Pf^* < \infty$ und $f^*(i) \to +\infty$, $i \to \infty$, gibt es eine Stopzeit τ so, daß q Verteilung von X_τ ist, wo $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markoff-Kette zu P ist mit der Startverteilung δ_o.

Beweis erfolgt über

Satz 2: $q \succ p$; dann gibt es Wahrscheinlichkeitsmaße $(H_i)_{i \in I}$ mit $H_i \succ \delta_i$, $i \in I$, und $q = \sum_i p_i H_i$ und den

Hilfssatz: $\mu \succ \delta_o$, $\mu(o) = 1 - \alpha < 1$ implziert: $\mu \succ \alpha P_o + (1-\alpha)\delta_o$. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt außerdem: $Ef(X_{\tau \wedge n}) \nearrow_{n \to \infty} q(f)$ für jede nicht-negative, subharmonische und q-integrable Funktion f.

Ch. BANDELOW: Recurrence properties of functions of Markov chains

Let $a_1, a_2, \ldots$ be a homogeneous Markov chain on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and with the state space I (countable abstract set), $f: I \to R^d$ (d-dimensional Euclidian space) and $s_n := \sum_{\nu=1}^{n} f(a_\nu)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. We investigate the recurrence sets

$$R = \{x \in R^d : P(\bigcap_{m \geq o} \bigcup_{n \geq m} \{|s_n - x| < \varepsilon\}) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0\}$$

$$\hat{R} = \{x \in R^d : P(\bigcap_{m \geq o} \bigcup_{n \geq m} \{|s_n - x| < \varepsilon\}) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0\}$$

$$R_i^* = \{x \in R^d : P(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{|s_n - x| < \varepsilon, a_n = i\}) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0\}$$

$$\hat{R}_i^* = \{x \in R^d : P(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \{|s_n - x| < \varepsilon, a_n = i\}) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0\}.$$

The results are generalizations of theorems by Chung and Fuchs (1951) on the recurrence of random walks.

K. BOSCH: Funktionen von Markoffschen Ketten

f sei eine eindeutige Abbildung des Zustandsraumes $I = \{0, 1, \ldots, N\}$ $(N \leq \infty)$ einer homogenen Markoffschen Kette $\{X_n\}$ auf die Menge $J = \{S_o, S_1, \ldots, S_M\}$. Dann ist $\{Y_n\} = \{f(X_n)\}$ genau dann eine homogene Markoffsche Kette mit von den Startwahrscheinlichkeiten unabhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten, wenn für beliebige $S_k, S_l \in J$ $P(X_1 \in f^{-1}(S_k) | X_o = j) = \text{const.}$ für alle $j \in f^{-1}(S_l)$. Jede beliebige Funktion f ist genau dann wieder Markoffsch, wenn die Übergangsmatrix des X_n-Prozesses die Darstellung $P = \alpha I + (1-\alpha) Q$, $(\alpha \in R)$ besitzt, wobei I die Einheitsmatrix und Q eine stochastische Matrix mit identischen Zeilen ist. Das erste Resultat wird auf beliebige Markoffsche Prozesse verallgemeinert. Abschließend werden Funktionen mehrerer unabhängiger Markoffscher Ketten über das direkte Produkt betrachtet. Als Beispiel wird die Addition mod (N+1) zweier Ketten behandelt.

R. THEODURESCU: Stochastic processes with complete connections

The aim of the present lecture is to present a new chapter of the theory of stochastic processes, which are generalizing the Markov ones. The operators governing the evolution are indicated and then several properties proved. The stress will be on ergodic and limit theorems.

Finally, it is shown that the general learning model is a special process with complete connections, whereas it follows that the theory of processes with complete connections plays an important role in the theory of stochastic models for learning.

L. SCHMETTERER: Über einen speziellen inhomogenen Markoffschen Prozeß

Es seien $x_n, y_n, n \geq 1$ Zufallsgrößen, welche Werte in einem euklidischen R_k $(k \geq 1)$ annehmen. Es sei $\{a_n\}$ eine positive Zahlenfolge und es sei $x_{n+1} = x_n - a_n y_n$, $n \geq 1$. Wenn man voraussetzt, daß $E(y_n | x_1, \ldots, x_n) = M_n(x_n)$, läßt sich unter gewissen Voraussetzungen für M_n und die Folge $\{a_n\}$ ein starkes Gesetz der großen Zahlen beweisen. Ebenso läßt sich die Konvergenz von $E(\|x_n^2\|)$ nachweisen. Wenn man genauere Information über die Geschwindigkeit der Konvergenz haben will, wird man auf ein Summierungsverfahren für Zahlenfolgen geführt, welches einen Mittelwertsatz gestattet: Es sei $\{d_i\}$ eine reelle Zahlenfolge mit $0 < d_i < 1$ und $\sum_{i=1}^{\infty} d_i = \infty$. Dann definiert die Matrix $(a_{n\nu})$ mit $a_{n\nu} = d_\nu \prod_{j=\nu+1}^{n} (1 - d_j)$ das genannte Verfahren, dessen Taubersche Eigenschaften für die Größenordnung der Konvergenzgeschwindigkeit maßgebend sind.

L. SCHMETTERER: Markoffsche Ketten auf endlichen Halbgruppen

Es sei S eine endliche Halbgruppe und ξ_n eine stationäre Markoffsche Kette mit Zustandsraum S. Man betrachte den Summenprozeß $s_n = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$, $n \geq 1$. Wenn man Aussagen über das asymptotische Verhalten von s_n machen will, ist es naheliegend, die Markoff-Kette $\begin{pmatrix} s_n \\ \xi_n \end{pmatrix}$ mit dem Zustandsraum $S \times S$ zu betrachten, deren Zustände zu klassifizieren und die bekannten Grenzwertsätze anzuwenden. Dieses Programm läßt sich speziell für den Fall einer einfachen Halbgruppe vollständig durchführen. (Literatur: Schmetterer, Revue Romaine de Mathématique Pure et Appliquées 9, 1877-1886 (1967))

J. L. SNELL: Markov chains and summability

Let p be the transition matrix for a denumerable Markov chain. Let o be any state. Define the matrix R by $R_{nj} = P_{oj}^{(n)}$. Then quite generally R is a summability method. If P is recurrent null or transient R is a regular method. Some properties of these summability methods are discussed.

M. SCHÄL: Eingebettete Markoff-Ketten in der Warteschlangentheorie

Es wird eine Klasse von stochastischen Prozessen definiert, die eine Verallgemeinerung eines Semi-Markoff-Prozesses darstellen und somit eine "eingebettete Markoff-Kette" enthalten. Die Definition dieser Klasse deckt sich im wesentlichen mit der eines "Markoffschen Erneuerungsprozesses mit Hilfspfaden" *) von R. Pyke und R. Schaufele. Ein Grenzwertsatz und ein Satz über die Konvergenzgeschwindigkeit werden angegeben. Als Beispiel wird das Modell $M|G|1$ betrachtet. Dabei werden die Resultate von D. K. Kendall über die geometrische Konvergenz der eingebetteten Markoff-Kette auf den zugrundeliegenden Prozeß ausgedehnt.

*) "Markov renewal process with auxiliary paths".

J.W. LAMPERTI: A class of Markov chains analogous to branching processes

We consider a Markov chain whose transition probabilities are given by $\sum_{j=0}^{k} P_{ij} = F(k)^i$, where $F(x)$ is the distribution of a random variable whose values are non-negative integers. Thus the random variable Z_{n+i} can be considered as the maximum among Z_n independent variables distributed by $F(x)$. Suppose $F(0+) > 0$. Then, as with branching processes, the most immediate question is wether or not extinction ($Z_n = 0$ for all large n) is certain to occur. Although as yet the necessary and sufficient condition for this has not been found, a fairly precise result is as follows: If $1 - F(x) \leq \frac{c}{x}$ for large x, where $c < \exp(-\gamma)$ - γ is Eulers constant - then extinction is certain. (In particular this is so if $F(x)$ has finite mean.) However, if $1 - F(x) \geq \frac{c}{x}$ for some $c > \exp(-\gamma)$, $P_i(Z_n \to \infty) > 0$ for all $i > 0$.

This type of process was suggested by certain (possibliy rather remote) analogies with some problems of equilibrium statistical mechanics, notably the existence of phase transitions in one-dimensionel systems with long-range interactions.

K. KRICKEBERG: Neuere Ergebnisse über mischende Transformationen in topologischen Maßräumen

Überblick über den Stand der Theorie mischender Transformationen in topologischen Maßräumen unendlichen Maßes im Sinne der Definition in [Krickeberg, Proceedings of the V. Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 1965, Vol.II, part 2, 431-446; 1967], gegliedert in drei Teile:

I. Allgemeine Theorie, II. Spezielle Klassen, III. Konstruktion solcher Transformationen. Vgl. F. Papangelou [Zeitschr.f. Wahrscheinlichkeitstheorie (1967)] und K. Krickeberg [Zeitschr.f.Wahrscheinlichkeitstheorie 7, 235-247 (1967)].

Das Hauptresultat zu I ist das der Nichtergodizität mischender Transformationen mit hinreichend schneller Verdünnung. Die wichtigste Klasse spezieller mischender Transformationen in Räumen unendlichen Maßes besteht aus den Verschiebungen im Raum der Trajektorien Markoffscher Ketten mit unendlichem stationärem (invariantem) Anfangsmaß. Die Hauptergebnisse betreffen Beziehungen zwischen der Mischungseigenschaft einerseits, der starken (individuellen) Grenzwerteigenschaft der Übergangswahrscheinlichkeiten und den Vere-Jonesschen Gleichungen andererseits, ferner gegenseitige Singularität und Totalstetigkeit der mit mischenden Transformationen definitionsgemäß verknüpften Maße. Die vollständigsten Ergebnisse lassen sich hier im Fall von Prozessen mit unabhängigen Zuwächsen erzielen. Unter III wird beschrieben, wie die mischenden Transformationen im Raum aller maßtreuen Transformationen hinsichtlich der starken Operatortopologie einerseits selten (von 1. Kategorie) sind, andererseits viele Klassen mischender Transformationen mit gegebener Verdünnungsgeschwindigkeit dicht liegen.

F. PAPANGELOU: An example of quasi-mixing Markov chains due to H. Kesten

The speaker described an example of a quasi-mixing chain which was communicated to him by H. Kesten and which answers in the negative a question raised in "F. Papangelou, Z. Wahrsch. und verw. G. (1967)". This chain is quasi-mixing, has $\gamma = 1$ and yet it is not mixing. Its state space is $\{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ and the transition probabilities are: $p_{ii} = p(i)$, $p_{i,i-1} = p\,(1-p(i))$, $p_{i,i+1} = q\,(1-p(i))$ where $p > q$, $p+q = 1$, $p(i) = 0 \; \forall i \leq 0$ while $p(i) \to \infty$ when $i \to +\infty$. This chain has the Strong Ratio Limit Property

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{ij}^{(m+n)}}{p_{kl}^{(n)}} = \frac{h(i)^{-1} h(j)\,\pi(j)}{h(k)^{-1} h(l)\,\pi(l)}$$

where $h(i) = \left(\frac{q}{p}\right)^i$.

P. A. MEYER: Un théorème sur les ensembles effilès

Soit (X_t) un processus standard à valeurs dans un espace localement compact E, et soit A un sousensemble borèlien de E; C. Dellachérie vient de démontrer que A est semi-polaire si et seulement si les trajectoires du processus (X_t) rencontrent p, s. A suivant un ensemble denombrable, ou encore si et seulement si tout compact contenu dans A est semi-polaire. Les méthodes de démonstration utilisent certains des résultats les plus profonds de l'école polonaise, et ont de nombreuses autres applications aux probabilités.

G. E. H. REUTER: An example of Kolmogorov

Kolmogorov (1951) gave an example of a transition probability matrix $P(t) = (p_{ij}(t);\ i,j=0,1,2,\dots)$ for which the derivatives $q_{ij} = p'_{ij}(0)$ have the values $q_{oo} = -\infty$, $q_{oj} = 1$ $(j \geq 1)$, $q_{ii} = -a_i$, $q_{io} = a_i$, $q_{ij} = 0$ $(j \neq i, 0)$ for $i \geq 1$. It will be shown that there is only one such (stochastic) $P(t)$, and that there is a one-parameter family $P^c(t)$ $(c \geq 0)$ of stochastic $P(t)$ with $p'_{ij}(0) = q_{ij}$, with $P^{c_1}(t) \leq P^{c_2}(t)$ for $c_1 \geq c_2$. The process corresponding to $P^c(t)$ can be described probabilistically in terms of the $P(t)$-process.

J. MICHALICEK: Über die geometrische Ergodizität bei Markoff-Ketten

Es wird ein Zusammenhang zwischen geometrischer Ergodizität und Spektraleigenschaften untersucht. Wenn p_{ij} eine aperiodische, irreduzible, geometrisch ergodische stochastische Matrix ist, dann gibt es eine Matrix der Bauart $p_{ij}\frac{m_i}{m_j}$, die einen Operator des l_p repräsentiert, so daß dessen Spektrum sich innerhalb eines Kreises mit $r < 1$ befindet, mit der Ausnahme eines Punktspektrums im Punkte 1 im positiv rekurrenten Fall. Weiter wird ein Kriterium gegeben, wann es einen Punkt in l_1 gibt, so daß $\| P^n x - \Pi x \| < M \varrho^n$ mit $\varrho < 1$.

K. L. CHUNG: Remarks on entrance laws

The canonical entrance law relative to the minimal semigroup at each passable boundary atom can be derived from that relative to the complete semigroup by a simple and suggestive formula. This is proved by known results of boundary theory, but may perhaps serve as a new beginning.

D. AUSTIN: The main limit theorem for Markov chains with weakened time-homogeneity condition

Tail field analysis is used to study the main limit theorem for certain types of Markov chains which do not have the time-homogeneity condition.

A. O. PITTENGER: Topics in boundary theory

Using a modification of existing proofs it is possible to give a proof for an initial decomposition of the transition matrix for a locally-Hunt process with a well defined Martin exit boundary. Under the assumption $\mathbb{B}_o$ is finite and atomic, a short analytic proof of a second decomposition of $P(t)$ is given which coincides with that obtained by Chung for Markov chains. This decomposition can then be used to obtain necessary conditions on the excessive functions of the process, and the excessive functions can then be used to describe sample path behaviour of the process.

B. Eifrig, Heidelberg