MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 17|1968

Funktionalgleichungen

17.6. bis 22.6.1968

Die 6. Tagung über Funktionalgleichungen stand, wie bisher, unter der Leitung der Professoren J. Aczél (Waterloo, Ont., Bochum), O. Haupt (Erlangen, Nürnberg) und A. M. Ostrowski (Basel). Leider konnte Herr Prof. Haupt wegen Erkrankung an der Tagung nicht teilnehmen.

Neben Lösungen einzelner Funktionalgleichungen und allgemeinen Sätzen bezüglich Funktionalgleichungstypen im Reellen und Komplexen kamen Gleichungen in Algebren und abstrakten Räumen noch stärker zur Geltung als bei früheren Tagungen. Besonders sind Anwendungen von verallgemeinerten Funktionen und Zusammenhänge mit Differentialgleichungen sowie ausführliche Behandlung von Funktionalgleichungen hervorzuheben. Erfreulicherweise haben zahlreiche Vorträge verschiedene Anwendungen aus der Geometrie, der Kontrolltheorie und der Informationstheorie eingehend behandelt.

In der an die Vorträge anschließenden, oft sehr lebhaften Diskussion wurden verschiedene Fragestellungen erörtert und weiter geklärt. Die Problem- und Bemerkungssitzungen erwiesen sich auch diesmal als sehr anregend und nützlich und konnten sogar die knappen Zusammenfassungen einiger Vorträge aufnehmen, die nicht ausführlich gehalten werden konnten.

Auch die diesjährige Tagung war überaus fruchtbar und ungewöhnlich anregend. Eine Einladung, die nächste Tagung im September 1969 in Kanada zu veranstalten, wurde dankend angenommen. Auf einhelligen Wunsch aller Teilnehmer wurde daher nach Rücksprache mit der Leitung des Forschungsinstituts Oberwolfach für den August 1970 die Veranstaltung einer Tagung über Funktionalgleichungen in Oberwolfach in Aussicht genommen.

Die Anzahl der Teilnehmer war doppelt so groß wie bei den beiden letzten Tagungen über Funktionalgleichungen in Oberwolfach. Insgesamt waren 36 wissenschaftliche Teilnehmer aus folgenden Ländern anwesend: Australien (1), Deutschland (6), Italien (1), Jugoslawien (3), Kanada (7), Polen (1), Rumänien (6), Schweiz (1), Ungarn (4), Vereinigte Staaten (6).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Mit Bedauern wurde festgestellt, daß zahlreiche eingeladene Kollegen, insbesondere aus Polen und Ungarn, nicht kommen konnten.

Teilnehmer

J.Aczél, Waterloo, Ont. (Kanada), Bochum
M.Bajraktarević Sarajevo (Jugoslawien)
J.A. Baker, Waterloo, Ont. (Kanada)
W.Benz, Bochum (Deutschland)
D.P.Cargo, Amherst, Mass. (USA)
Y.Chen, Bochum (Deutschland)
R.Ž.Djordjevic, Nis (Jugoslawien)
A.Dragomir, Timişoara (Rumänien)
W.Eichhorn, Würzburg (Deutschland)
I.Fenyö, Budapest (Ungarn)
P.Fischer, Budapest (Ungarn)
B.Forte, Pavia (Italien)
H.Haruki, Waterloo, Ont. (Kanada)
T.Howroyd, Melbourne (Australien)
D.V.Ionescu, Cluj (Rumänien)
P.Kannappan, Waterloo, Ont. (Kanada)
M.Kucharżewski, Katowice (Polen)
S.Kurepa, Zagreb (Jugoslawien)
W.Maier, Jena (Deutschland)
M.A. McKiernan, Waterloo, Ont. (Kanada)
U.Melchior, Bochum (Deutschland)
J.P.Mokanski, Guelph, Ont.(Kanada)
G.Muszély, Budapest (Ungarn)
M.N.Oguztöreli, Edmonton, Alta (Kanada)
V. Olariu, Bucureşti (Rumänien)
A.M.Ostrowski, Basel (Schweiz)
C.Popa, Timisoara (Rumänien)
F.Radó, Cluj (Rumänien)
S.Segal, Rochester, N.Y. (USA)
A. Sklar, Chicago, Ill. (USA)
H. Schmidt, Würzburg (Deutschland)
B.Schweizer, Amherst, Mass. (USA)
I.Stamate, Cluj (Rumänien)
G.Targonski, Bronx, N.Y. (USA)
E.Vincze, Miskolc (Ungarn)
B. Zupnik, Chicago, Ill. (USA)

Vortragsauszüge (Kurzfassungen der Vorträge sowie die Problemstellungen und Bemerkungen folgen - getrennt voneinander - in chronologischer Reihenfolge.)

H. HARUKI: On a "Cube Functional Equation"

In this lecture we solve the functional equation

$$f(x+t, y+t, z+t) + f(x+t, y+t, z-t) + f(x+t, y-t, z+t) + f(x+t, y-t, z-t) + f(x-t, y+t, z+t) + f(x-t, y+t, z-t) + f(x-t, y-t, z+t) + f(x-t, y-t, z-t) = 8 f(x, y, z)$$

where $f(x, y, z)$ is a real-valued continuous function of three real variables x, y, z in the whole xyz-space and x, y, z, t are real variables.

Gefördert durch
Deutsche Forschungsgemeinschaft

M.A. McKIERNAN: Boundedness on a set of positive measure and the mean value property characterizes polynomials on a space V^n

Let $\{y_i\}_{i\in I}$ be a finite collection of fixed vectors in an n-dimensional vector space V^n over the reals $\mathbb{R}$, where card $(I) = N \geq n$. Let $\{\mu_i\}_{i\in I}$ be a set of real numbers such that $\sum_{i\in I} \mu_i = 1$. We consider functions $f : V^n \to \mathbb{R}$ which satisfy the functional equation

$$(1) \qquad \sum_{i\in I} \mu_i f(x+ty_i) = f(x) \quad \text{for all} \quad x \in V^n, \; t \in \mathbb{R}, \; t \geq 0 .$$

Theorem 1. If f satisfies (1) and if i) $\sum_{i\in J} \mu_i \neq 0$ for all $J \subset I$, ii) the y_i span V^n, iii) f is bounded on some set of positive measure in V^n, then f is a polynomial on V^n of degree at most $\frac{N(N-1)}{2}$.

This theorem is an immediate corollary of the more general

Theorem 2. Let V be a module over a commutative ring Q; let $A \subset Q$ be closed under addition; for $y \in V$, let T_y denote the translation operator defined on all functions $f : V \to \mathbb{R}$ by $(T_y f)(x) = f(x+y)$; let ω_t, for $t \in Q$, be the operator defined by $\omega_t = \sum_{i\in I} \mu_i (T_{ty_i} - 1)$ where $\{\mu_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}$, $\{y_i\}_{i\in I} \subset V$, card $I = N$. Let Λ be the commutative algebra (over $\mathbb{R}$) of all finite linear combinations of translation operators. If $\sum_{i\in I} \mu_i = 1$, $\sum_{i\in J} \mu_i \neq 0$ for all $J \subset I$, then the ideal Ω_A generated in Λ by the operators $\{\omega_t\}_{t\in A}$ includes all finite difference operators of the form

$$(T_{ty_1} - 1)^{k_1} (T_{ty_2} - 1)^{k_2} \cdots (T_{ty_N} - 1)^{k_N} \quad \text{for } k_1 + k_2 + \dots + k_N > \frac{N(N-1)}{2}$$

for all $t \in A$.

W. EICHHORN: Funktionalgleichungen in Vektorräumen und Algebren

Solche Funktionalgleichungen (Urbild- und|oder Bildbereich der unbekannten Funktionen ein Vektorraum oder eine Algebra) sind unter anderem von Interesse

(i) als definierende Relationen für Klassen von Algebren (siehe Problem 10, weiter unten),

(ii) als Hilfsmittel zur Strukturuntersuchung gegebener Algebren,

(iii) bei der Lösung von Funktionalgleichungssystemen, sofern es möglich ist, diese als eine einzelne Gleichung in einer Algebra aufzufassen.

Zu jedem der drei Gesichtspunkte wurden Beispiele gegeben.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

W. BENZ: Über die Funktionalgleichung $f(1+x) + f(1+f(x)) = 1$

Die folgenden Resultate wurden vorgelegt: Es gibt genau einen injektiven Antiendomorphismus f der multiplikativen Gruppe L^* eines (nicht notwendig kommutativen) Körpers L, der für $x \neq 0, -1$ der Funktionalgleichung $f(1+x) + f(1+f(x)) = 1$ genügt, nämlich $f(x) = \frac{1}{x}$. Weiterhin: Gibt es einen injektiven Endomorphismus f der Gruppe L^*, der für $x \neq 0, -1$ der genannten Funktionalgleichung genügt, so ist L kommutativ. Auf zwei Anwendungen wurde hingewiesen: Enthält eine auf der projektiven Geraden über L minimal dreifach transitive Gruppe Γ alle Translationen und Dilatationen, so ist L kommutativ und $\Gamma \equiv PGL(2, L)$. Gilt in der Kettengeometrie (k, L, Γ), k ein im Zentrum von L gelegener Unterkörper, das Winkelaxiom von Wilhelm Süss, so ist L kommutativ und $\Gamma = PGL(2, L)$.

C. POPA: Structures abstraites attachées à des équations fonctionnelles

Dans le travail on considère l'équation fonctionnelle

$$F(x, f_1(\alpha_1(x)), \ldots, f_n(\alpha_n(x))) = \theta$$

où F, α_i sont des applications connues et on cherche les applications f_i.

En associant à un ensemble une famille de relations d'équivalence définies sur cet ensemble, on obtient une structure que nous avons nommée ε-structure ou structure d'équivalence. En définissant convenablement les homomorphismes entre les ε-structures, on aboutit a la conclusion que chaque solution de l'équation fonctionnelle considérée est un tel homomorphisme.

D. P. CARGO: Function semigroups and functional equations

The relations L, R, D and H, first studied by I. A. Green, are completely characterized for a function system J with the right subinverse property. These results are applied to (1) the generalized idempotency equation $g^{n+1} = g$ and to (2) Babbage's equation $g^n = m$ where m is a given subidentity.

Theorem 1. If J is the semigroup of all partial functions from a set X to itself, then the general solution f of (2) is uniquely a disjoint union $f = f_o \cup f$, where (a) f_o is a permutation on the range of f, (b) $f^n(x) = x$ for all $x \in \operatorname{dom} f_o$, (c) $\operatorname{dom} f_o \cap \operatorname{dom} f_i = \phi$, (d) $\operatorname{dom} f_o \cap \operatorname{ran} f_1 = \emptyset$ and (e) $f_1^n = \phi$.

Theorem 2. Let n = 1 and let e be a fixed idempotent. Suppose all solutions in e/H to the equation $g^n = e$ are known. Then we can determine (a) all

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

permutation solutions to (2) for any $M \in e/D$; (b) all solutions to (2), for any $m \in e/D$, provided the functions f_1 such that $f_1^n = \Phi$ are known; (c) all solutions to (1) which lie in e/D .

A. SKLAR: Lösungen der allgemeinen Konjugationsgleichungen

Es seien M_1, M_2 nichtleere Mengen und n eine positive ganze Zahl. Es sei G eine Funktion, die eine Teilmenge von M_1^n in M_1 abbildet, und H eine Funktion, die eine Teilmenge von M_2^n in M_2 abbildet. Wir nennen eine Funktionalgleichung der Gestalt

$$F(G(x_1, \ldots, x_n)) = H(F(x_1), \ldots, F(x_n)) ,$$

in welche die unbekannte Funktion F die Menge M_1 in M_2 abbildet, eine "allgemeine Konjugationsgleichung". Diese enthalten als Spezialfälle die am häufigsten untersuchten Funktionalgleichungen, z. B. die Abelsche und die Schrödersche Gleichung für $n = 1$, die Cauchysche und verwandte Gleichungen für $n = 2$. Wir können alle solche Gleichungen mit Hilfe von algebraischen Systemen, bearbeitet von B. Schweizer und Verf. [The algebra of multiplace vector-valued functions, Bull. AMS 73, 510-515, 1967; A grammar of functions, Aequat. Math., to appear], sowohl dem Begriff der "kanonischen Zerlegung" einer Funktion [Verf., Canonical decompositions, stable functions and fractional iterates, Aequat. Math., to appear] gemeinsam behandeln. Speziell ist es möglich, eine nützliche algebraische Charakterisierung aller Lösungen einer Konjugationsgleichung zu geben.

D. ZUPNIK: Interassociativity

Two groupoids (Υ, F) and (Υ, G) are GF-associative if $FG\,x\,yz = G\,x\,Fyz$ for every $x, y, z \in \Upsilon$. GF-associativity may be characterized by: Every right multiplication R_x of F commutes with every left multiplication λ_y of G.

Theorem 1. Let (Υ, F) and (Υ, G) be GF-associative. Then

a) if F has a right identity e, then $G(x,y) = F(x, fy)$ for every $x, y \in \Upsilon$ where $f = \lambda_e$ has domain Υ and as range a subset of the right nucleus of $F (= \{x \mid FF_{yzx} = F_y F_{zx}\})$.

b) if F has a right identity e, and G has e as left identity, then $F = G$ is a semigroup.

c) if there exist $a \in \mathcal{T}$ such that the right multiplication R_a of F, and the left multiplication $\lambda_a \in G$ are both onto $\mathcal{T}$, then there exists a semigroup $(\mathcal{T}, H)$ with e as identity such that $H(x,y) = F(x, f^*y) = G(g^*x, y)$ where f^* is a function such that $R_a f^* = j$ and g^* is a function such that $\lambda_a g^* = j$ (By j, we denote the identity function on $\mathcal{T}$).

Theorem 2. Let $(\mathcal{T}, F)$ be an arbitrary groupoid with right identity. Then if the composition of L_a and L_b is also a left multiplication of $(\mathcal{T}, F)$, then $L_a L_b = L_{Fab}$.

Theorem 3. Let $F = \{f\}$ be a set of functions with $\operatorname{Ran} f \subseteq \operatorname{Dom} f = \mathcal{T}$, and such that there exists $a \in \mathcal{T}$ so that for every $x \in \mathcal{T}$ there exists at least one $f \in F$ for which $fa = x$. Then for every $x \in \mathcal{T}$ there exists at most one function t with $\operatorname{Ran} t \subseteq \operatorname{Dom} t = \mathcal{T}$ for which $ta = x$, and which commutes with every $f \in F$. I. e. if $t_i f = f t_i$ for every $f \in F$ and $t_1(a) = t_2(a)$, then $t_1 = t_2$.

B. SCHWEIZER: Semigroups on the space of probability distribution functions

Let Δ be the set of all functions F which are leftcontinuous and non-decreasing from $\mathbb{R}$ into $[0,1]$, i.e., probability distribution functions in the extended sense. For any F, G in Δ and any $h \geq 0$, let A and B be the properties defined by: $A(F,G,h) \Leftrightarrow F(x-h) - h \leq G(x)$ for $-\frac{1}{h} \leq x \leq h + \frac{1}{h}$ and $B(F,G,h) \Leftrightarrow G(x) \leq F(x+h) + h$ for $-h - \frac{1}{h} \leq x \leq \frac{1}{h}$; and let $\mathcal{L}(F,G) = \inf\{h \mid A(F,G,h)$ and $B(F,G,h)\}$ hold. D. Sibley has shown, that $\mathcal{L}$ is a metric on Δ, that the metric space $(\Delta, \mathcal{L})$ is compact and that, for any sequence $\{F_n\}$ in Δ, $\mathcal{L}(F_n, F) \to 0$ if $\{F_n\}$ converges weakly to F. Continuous, associative operations (i. e., topological semigroups) on the space $(\Delta, \mathcal{L})$ are of interest in the study of triangle inequalities for probabilistic metric spaces and in other connections as well. Convolution is one such; and others may be defined with the aid of the known solutions to the topological semigroup problem on the unit interval. However, the general problem of finding all nonisomorphic topological semigroups (i. e., all non-equivalent solutions to the functional equation of associativity) on the space $(\Delta, \mathcal{L})$ is unsolved.

M. BAJRAKTAREVIĆ: Sur la solution générale de certaines équations fonctionelles

En supposant que $\mathcal{C}$ soit un corps commutatif; X_i $(i = 1, \ldots, n)$, $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, Y - des ensembles donnés non vides dont les éléments sont désignés respectivement par x_i, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, y; f_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$

des applications $f_o : X \to \mathcal{C}$, $f_i : X_i \times Y \to \mathcal{C}$, on donne les solutions générales des équations fonctionnelles

$$f_o(x) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, y) = \theta ,$$

$$f_o(x) + \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i, y) = \theta ,$$

$$f_o(x) + \prod_{i=1}^{p} f_i(x_i, y) + \sum_{i=p+1}^{n} f_i(x_i, y) = \theta ,$$

$$f_o(x) + \prod_{i=1}^{p} f_i(x_i, y) \cdot \sum_{i=p+1}^{n} f_i(x_i, y) = \theta ,$$

$$f_o(x) + \prod_{i=1}^{p} f_i(x_i, y) + \prod_{i=p+1}^{n} f_i(x_i, y) = \theta ,$$

$$f_o(x) + \sum_{i=1}^{p} f_i(x_i, y) \cdot \sum_{i=p+1}^{n} f_i(x_i, y) = \theta$$

et d'un certain nombre d'équations fonctionnelles se réduisant aux équations citées ci-dessus par des transformations simples.

M. KUCHARŹEWSKI: Einige Ergebnisse über die Funktionalgleichungen mit Matrizenargumenten

Bezeichnen wir mit $GL(n, R)$ bzw. $\widetilde{GL}(n, R)$ die Gruppe bzw. Halbgruppe aller quadratischen Matrizen der Ordnung n über dem reellen Zahlkörper R . Das folgende Funktionalgleichunssystem

(1) $\quad F(B \cdot A) = F(B) \cdot F(A)$, $\quad F : GL(n, R) \to \widetilde{GL}(m, R)$,

(2) $\quad g(B \cdot A) = F(B) \cdot g(A) + g(B)$, $\quad g : GL(n, R) \to R^m$

wird betrachtet.

Insbesondere werden die Lösungen von (1), (2) im Falle $n = 2$, $m = 3$ bestimmt (Z. Karenska).

Ist F eine Lösung von (1) , so stellt das Paar (3) F, $g = (F - e) \cdot v$ eine Lösung von (1), (2) dar, wenn e eine Einheitsmatrix der Ordnung m und v ein konstanter Vektor ist.

Es entsteht jetzt die Frage, wann (3) die einzige Lösung von (1), (2) ist. Jede

der nachstehenden Bedingungen ist dafür hinreichend. 1^o Es gibt ein $\varrho_o \neq 0$, so daß die Matrix $F(\varrho_o E) - e$ nicht singulär ist (M. Kucharzewski, M. Kuczma). 2^o Es gibt ein $\varrho_o \neq 0$, so daß die Matrix $F(E_1(\varrho_o)) - e$ nicht singulär ist (A. Zajtz). 3^o die Matrixfunktion $F(x)$ nicht reduzibel und $\operatorname{Det} F(x) \not\equiv 1$ ist. Aus diesen Bedingungen folgt, daß (3) die einzige Lösung von (1), (2) ist, wenn F die Form

$$F(X) = \varphi(\Delta)\, \underset{(1)}{X} \times \underset{(2)}{X} \ldots \times \underset{(p)}{X} \times \underset{(1)}{Y} \times \ldots \times \underset{(q)}{Y} \qquad (\Delta = \operatorname{Det} X)$$

hat $(Y = (X^{-1})^T$; das Zeichen "$\times$" bedeutet das Kroneckersche Produkt der Matrizen) (A. Zajtz).

B. FORTE: On a system of functional equations in information theory

We start from the axiomatic definition of the measure of the amount of information without probabilities. Then we try to derive among others both Shannon's and Rényi's entropies for incomplete distributions as special measures of information. This leads to the following system of functional equations:

$$(\mathfrak{p}) \begin{cases} \theta(u,-x) = x + \theta(1-u, x) \quad \text{for } \forall\ (u,x) \in B \\ \theta\left[1-u,\ x+\theta\left(\frac{1-v}{u}, y\right)\right] + \theta\left(\frac{1-v}{u}, y\right) = \theta\left[1-v, y+\theta\left(\frac{1-u}{v}, x\right)\right] + \theta\left(\frac{1-u}{v}, x\right) \\ \qquad \text{for } \forall\ (u,v) \in \mathcal{L},\ x \in R,\ y \in R, \end{cases}$$

where R is the set of real numbers, and $B = \{(u,x) : u \in [0,1],\ x \in R\}$, $\mathcal{L} = \{(u, v) : u \in (0,1],\ v \in (0,1],\ u+v \geq 1\}$.

One can prove the following two theorems:

Theorem 1: If i) $\theta(u,x) \in C(B)$, ii) $\theta(u,0) = 0$ (entropy idempotency), iii) $\theta(u,x)$ is strictly monotonic (increasing) with respect to x for every $u > 0$, iV) $\theta(u,x)$ satisfies $(\mathfrak{p})$, then either

(1) $\theta(u,x) = \frac{1}{1-\alpha} \log\left[1 - u + ue^{-(1-\alpha)x}\right]$ or (2) $\theta(u,x) = -ux$.

Function (1) defines Rényi's entropy, function (2) defines Shannon's entropy.

Theorem 2: If i) $\theta(u,x) = C^3(\mathcal{L})$, ii) $\theta(u,x)$ satisfies $(\mathfrak{p})$, then

(1) $\theta(u,x) = \frac{1}{1-\alpha} \log\left[1 - u + ue^{-(1-\alpha)x}\right]$, or (2) $\theta(u,x) = -ux$, or

(3) $\theta(u,x) = -\frac{1}{k} \log(1 + e^{kx})$, $k \neq 0$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

R. Ž. DJORDJEVIĆ: Remarques concernant une équation fonctionnelle

Considérons l'équation fonctionnelle suivante:

(1) $$f(z+x, y, z) + f(y, y+z, x) + f(z, x, x+y) = 0 ,$$

où $x, y, z \in R$ (R l'ensemble des nombres réels) et $f: R^3 \to R$.
L'équation (1) est le cas particulier $g = h = f$ de l'équation

$$f(z+x, y, z) + g(y, y+z, x) + h(z, x, x+y) = 0 .$$

Il n'est pas difficile de démontrer que cette équation a la solution générale dans la forme $f(u, v, w) = F(u-w, v, w)$, $g(u, v, w) = G(u, v-u, w)$, $h(u, v, w) = - F(v, w-v, u) - G(w-v, u, v)$, où F et G sont des fonctions arbitrairs de R.

Mes efforts, effectués en vue de resoudre l'équation (1), ne m'ont permis de déterminer aucune solution non triviale de l'équation (1).

Cependant, j'ai obtenu les résultats suivants:

Théorème 1. Si la fonction f satisfait l'équation fonctionnelle (1), nous avons $f(u, v, w) + f(v, w, u) + f(w, u, v) = 0$.

Théorème 2. L'équation (1) n'a pas des solutions de degré moins de cinq et plus de 0.

Théorème 3. L'équation (1) n'a pas des solutions sous la forme d'un polynôme de degré n arbitraire, qui comprend tous les monômes de degré au plus n.

Les résultats obtenus nous incitent à poser les trois hypothèses suivantes:

Hypothèse 1. L'équation fonctionnelle (1) n'a pas de solution sous la forme d'un polynôme.

Hypothèse 2. L'équation fonctionnelle (1) n'a aucune fonction analytique comme solution non triviale.

Hypothèse 3. L'équation fonctionnelle (1) n'a pas de solutions non triviales de tout.

W. MAIER: Additive Inhaltsmasse im positiv gekrümmten Raum

Die auf H. Kneser zurückgehende Integraldarstellung von Inhaltsmassen im R_{n-1} fester Krümmung wurde für reguläre Simplexe durch H. Ruben mit Fehlerintegralen als Integrandenfaktoren in Zusammenhang gebracht. Die Vielfachheit von Eigenwerten einer quadratischen Form benutzte B. Weissbach zur Klassifikation von Simplexen entsprechend dem Zerfall gewisser Integrale; Simplexe vom Typ 1

hängen nur von n unabhängigen Bestimmungsstücken ab und genügen einer einfachen Funktionalgleichung. – Die letzten Arbeiten von L. Schläfli zur vieldimensionalen Geometrie behandelten Quotienten von Inhaltsmassen aus Räumen verschiedener Krümmung. Mit Begriffen der Verbandstheorie gelang es A. Effenberger, aus den Winkeln verschiedener Ordnung im Simplex gewisse Invarianten aufzubauen. Durch Konstruktionen der Ergänzungsgeometrie können damit Schläflis Quotienten im Fall fester Nenner zur Herleitung linearer Funktionalgleichungen für konvexe Simplexe benutzt werden.

F. RADÓ: Behandlung von Fragen über Kollineationen mit Funktionalgleichungsmethoden

Ist K ein Schiefkörper, $K^* = K \setminus \{0\}$, $\bar{K} = K \cup \{\infty\}$, so setzen wir $x + \infty = \infty + x = \infty$ für $x \in K$, $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$ für $x \in K^* \cup \{\infty\}$ ($\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$ sind nicht erklärt). Die Abbildung $\bar{e}: \bar{K} \to \bar{K}$ heißt ein Endomorphismus von $\bar{K}$, falls $\bar{e}(x+y) = \bar{e}(x) + \bar{e}(y)$, $\bar{e}(xy) = \bar{e}(x)\bar{e}(y)$, jedesmal wenn die bezügl. Operationen erklärt sind. Die Einschränkung $e: M \to K$ von $\bar{e}$ auf $M = \bar{e}^{-1}(K)$ soll als ein partieller Endomorphismus von K bezeichnet werden. Man bezeichnet $M^* = e^{-1}(K^*)$. Es wird im Vortrag eine Kennzeichnung der partiellen Endomorphismen ohne Benutzung des Elements ∞ gegeben.

Es sei P die Punktmenge der projektiven Ebene über K und $\mathcal{C} \subset P$. Die Kollineation $\varphi: \mathcal{C} \to P$ wird als ausgeartet bezeichnet, wenn es Geraden g_1, g_2 mit $\varphi(\mathcal{C}) \subset g_1 \cup g_2$ gibt. Es gelten die folgenden Verallgemeinerungen eines Satzes von J. Aczél und W. Benz: Ist die Kollineation $\varphi: \mathcal{C} \to P$ nicht ausgeartet und enthält $\mathcal{C}$ vier Geraden, so ist φ bis auf projektive Kollineationen als Faktoren durch $K(x_1, x_2, x_3) \to K(e(\rho x_1), e(\rho x_2), e(\rho x_3))$ gegeben, wo e ein partieller Endomorphismus von K ist und ρ wie folgt bestimmt wird: $\rho x_i \in M$, $i = 1, 2, 3$, $\exists\, j$, $\rho x_j \in M^*$. Wird darüber hinaus die Injektivität von φ verlangt, die Menge $\mathcal{C}$ dagegen so verallgemeinert, daß sie nur noch 3 Geraden und einen Punkt zu enthalten braucht, so gilt statt der obigen Darstellung die folgende: $K(x_1, x_2, x_3) \to K(e(x_1), e(x_2), e(x_3))$, wobei e ein Endomorphismus von K ist.

M. N. OGUZTÖRELI: A class of functional equations in optimal control theory

(Paper under publication in the Rend. Acc. Lincei. 1968.)

I. FENYÖ: Über ein Problem von M. Hosszú

Es wird die Funktionalgleichung

$$f(x+y-xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$$

im Bereich der Distributionen (im Sinne von L. Schwartz) mittels gewisser Distributionstransformationen gelöst.

V. OLARIU: Sur les itérés d'un ordre quelquongue des quelques operateurs differentielles

On part de l'équation fonctionnelle (1) $f_\lambda(x) * f_\mu(x) = f_{\lambda+\mu}(x)$ où λ et μ sont des nombres complexes et $f_\lambda(x)$ est une distribution qui dépend analitiquement de λ, le signe $*$ indique la convolution des fonctions entre quelles il est posé. Si les distributions $f_\lambda(x)$ ont des propriétés convenables, on peut définir, à l'aide de (1) toutes les solutions élémentaires d'un operateur différentiel, étroitement lié à $f_\lambda(x)$ et de ses itérés.

Ainsi, si $f_\lambda(x)$ pour $\lambda = 0$ est la distribution de Dirac, $f_\lambda(x)\big|_{\lambda=0} = \delta(x)$, (1) montre que $f_{-\lambda}(x)$ est une sorte de "inversion élémentaire" de $f_\lambda(x)$ et si $f_\lambda(x)\big|_{\lambda=-k} = L^k\delta$, , $k = 1, 2, \ldots$, (1) donne aussi que $f_k(x)$ est la solution élémentaire de l'operateur L^k. (L^k est l'itéré d'ordre k de L.) Il résulte que si on peut définir les itérés d'un ordre quelquonque L^λ de l'opérateur L, (1) donne les solutions élémentaires correspondents.

Exemple: Si $f_\lambda(x) = \dfrac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} e^{ax}$, $\quad x_+ = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$,

on a $f_o(x) = \delta(x)$ et $f_{-k}(x) = L^k\delta(x)$; $Ly = \dfrac{dy}{dx} - ay$, a étant un scalaire ou une matrice.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gy. I. TARGONSKI: Endomorpisms of function algebras and Schröder's equation

The paper is part of a program to increase the use of functional analysis in the theory of functional equations of one variable.

ω is a mapping of an arbitrary set u into itself; z is a linear algebra. A contravariant exponential functor assigns to u the function set z^u and to ω the mapping z^w of z^u into itself. z^w turns out to be a linear endomorphism of z^u, of the form $z^\omega f = f_o \omega$. This occurs in the Schröder equation and its generalization, the linear functional equation of the first order, (the Kordylewski-Kuczma equation).

The "reversal equation" algebra is this: in a given function algebra, every endomorphism generated by a contravariant exponential functor, in other words a right composition ("substitution"). As known, the answer is affirmative for the algebra of all continuous mappings of a compact Hausdorff space into the reals; but compactness of the domain is not necessary since the answer is also affirmative for the algebra of all complex polynomials. The answer is however negative for the algebra of all bounded functions of the unit interval; if E is a proper subset of the unit interval, ψ_E its characteristic function, and $h(x)$ a mapping of the unit interval into itself, then $(\Omega\, f)(x) = \psi_E(x) f[h(x)]$ is an endomorphism which cannot be represented as a right composition. It can however be so represented if we restrict ourselves to the subalgebra of real functions vanishing at some fixed x_o, provided $h(x)$ takes on the value x_o.
Necessary and sufficient conditions for the "reversal equation" to be answerable in the affirmative are not known.

J. A. BAKER: The functional equation $f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2$

Using a result of W. H. Wilson, Bull. Amer. Math. Soc. 26, 300-312 (1919), we prove the following:

Theorem. Let f be a complex-valued function defined on a real vector space X such that $f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2$ for all $x, y \in X$.

I. f is continuous along rays (i.e. $\forall\, x \in X$ the mapping $r \to f(rx)$ is a continuous function of the real variable r), then either

(a) f is linear (i.e. $f(rx + sy) = r f(x) + s f(y)$ for all $x, y \in X$ and all real r and s) or

(b) $f(x) = c \sin L(x)$ $\forall\, x \in X$ where c is a complex constant and L is a complex-valued linear function defined on X.

II. X is a linear topological space and f is continuous then I. holds and in case (b) L is continuous.

III. If $X = R^n$ and f is measurable on some subset of positive measure then f is continuous.

Part II. generalized a result of S. Kurepa, Ann. Pol. Math. 10 1-5, 1961, and Part III. generalized results of S. Kurepa, Monatsh. d. Math. 64, 321-329, 1960, and S. L. Segal, Amer. Math. Monthly 70, 306-308, 1963.

A. OSTROWSKI: Über eine Klasse von Funktionalungleichungen

Setzt man $T(f,g) = \int_0^1 fg\,dx - \int_0^1 f\,dx \int_0^1 g\,dx$, so wurde die Ungleichung $|T(f,g)| \leq \frac{1}{4} \operatorname{Osz} f \operatorname{Osz} g$ bewiesen und im Zusammenhang mit einigen Tschebyscheffschen Ungleichungen auf die allgemeinsten linearen Mittelwertsbildungen übertragen. Von den weiteren Resultaten seien angeführt:

1) $|T(f,g)| \leq \frac{1}{8}\left(\int_0^1 f'^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 g'^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$;

2) $\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|^s dx\,dy \leq (\lg 4)\int_0^1 |f'(x)|^s dx$, $(s \geq 1)$.

Gy. MUSZÉLY: Über die stetigen Lösungen der Ungleichung

$pf(p) + (1-p)f(1-p) \geq pf(q) + (1-p)f(1-q)$. Die in dem Intervall (0,1) stetigen Lösungen lassen sich in der Form

$$f(p) = (1-p)\cdot g(p-\tfrac{1}{2}) + \int_0^{p-\frac{1}{2}} g(t)\,dt + C$$

darstellen, wobei g eine in dem Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ungerade, stetige, wachsende Funktion und C eine beliebige Konstante sind.

P. FISCHER: Sur l'inégalité $\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i f(q_i)$

On s'occupe de l'inégalité suivante

$\sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i f(q_i)$ (*) où $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ et $p_i > 0$, $q_i > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et $n \geq 2$, mais fixé. On démontre les résultats suivants

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Théorème 1. Tous les solutions de (*) sont monotones.

Théorème 2. Tous les solutions de (*) sont différentiables si $n \geq 3$.

Théorème 3. On considère la décomposition de f dans la forme $f = g_1 + g_2 + h$ où h est une fonction des sauts, g_1 est une fonction absolument continue et g_2 est une fonction singulière continue, alors aussi h_1, g_1 et g_2 satisfont à (*). On donne encore la solution générale de (*) dans la domaine des fonctions de sauts et celle des fonctions absolument continues. Ces résultats sont généralisations de résultats de M.M.Aczél et M. Pfanzgal (Metrika 11, 91 - 105, 1966).

J. ACZÉL: Über Zusammenhänge zwischen Differential- und Funktionalgleichungen

Eine Differentialgleichung $y'' = \varphi(x,y,y')$ läßt mit y auch $x \to y(h(x))$ als Lösung zu, wenn $\varphi(h,y(h),y'(h))h'^2 + y'(h)h'' =$ $= \varphi(x,y(h),y'(h)h')$ ist. Dies geht in die von y unabhängige Gestalt $h'' = f(x,h,h')$ über, wenn $\varphi(x,y,y'h') =$ $= \varphi(h,y,y')h'^2 + y'f(x,h,h')$ d.h. $\varphi(x,y,zu) = \varphi(v,y,z)u^2 +$ $+ zf(x,v,u)$ (1) ist.
Die Herren A. Moor und L. Pintér haben (1) durch Zurückführung auf $f(x,y,zu) = f(v,y,z)u^2 + zf(x,v,u)$ (2) und $\gamma(zu) = \gamma(z)u^2 + z\gamma(u)$ (3) ; und die Gleichung (3) unter Differenzierbarkeitsvoraussetzung gelöst (Publ. Math. 13, 207-223, 1966). Hier werden (3), (1) und (2) kürzer und ohne irgendwelche Regularitätsvoraussetzung (auch nicht Stetigkeit) gelöst.

P. KANNAPPAN: A Functional Equation for the Cosine

It is well known that, the complex-valued, measurable solutions of D'Alembert's functional equation

(A) $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$, for x,y real,

are $f(x) = \cos ax$, where "a" is <u>any</u> complex constant. Here, the functional equation

(B) $f(x+y+2A)+f(x-y+2A) = 2f(x)f(y)$,

where f is a complex-valued, measurable function of a real variable and $A \neq 0$ is a real constant, is considered. It is shown that f is continuous and that apart from the trivial solutions ($f \equiv 0,1$), the only functions which satisfy (B) are cosine functions $\cos ax$ and $-\cos bx$ where for the constants a and b only a <u>denumerable</u> set of (real) numbers is admissible. Equation (B) is similar to the equation

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$f(x-y+A)-f(x+y+A) = 2f(x)f(y)$$

considered by E.B. Van Vleck (Ann. Math. (2) 13, 154, 1913), where f is assumed real and continuous and the general solution is $f(x) = \sin cx$, for a sequence $c = \frac{(4j+1)\pi}{2A}$, $(j=0,1,\ldots)$.

T.D. HOWROYD: Some Uniqueness Theorems for Functional Equations

If $\omega = H(u,v,x,y)$ is continuous and implicitly defines v as a continuous function of w,u,x,y; F is continuous, strictly increasing (or decreasing) and satisfies a Lipschitz condition in its first place; ϕ has measurable majorant on a set of positive measure and satisfies

$$\psi(F(x,y)) = H(\phi(u),\phi(y),x,y),$$

then ϕ is locally bounded. Further if $r \in [-\frac{1}{2},1)$, $s \in (0,\infty)$ and

$$H(u,v,x,y) - H(U,V,x,y) \leqslant rs\,(|u-U| + |v-V|),$$

$$H(u,u,x,x) - H(v,v,x,x) \geqslant s\,|u-v|,$$

then ϕ is uniquely determined by two initial conditions. These results have extensions to the case where x,y are complex variables or n-dimensional vectors.

E. VINCZE: Über eine Klasse der alternativen Funktionalgleichungen

Wir betrachten die Funktionalgleichung

(1) $\qquad F[f(x+y),f(x),f(y)] = 0,$

wobei x,y die Elemente einer beliebigen Abelschen Gruppe Q sind, die gesuchte Funktion f die Gruppe Q in (oder auf) einen beliebigen Körper K der Charakteristik 0 abbildet, weiterhin $F(u,v,w)$ ein gegebenes Polynom von u,v,w ist. Es sei weiter

(1a) $\qquad F_1[f(x+y),f(x),f(y)] = F_2[f(x+y),f(x),f(y)]$

eine beliebige "Umordnung" der Funktionalgleichung (1) in dem folgenden Sinne: Die Gleichung (1a) entsteht aus (1) mit endlich vielen Additionen, Multiplikationen und ihren Inversoperationen angewandt an den Funktionen $f(x+y)$, $G[f(x),f(y)]$, wobei $G(u,v)$ eine rationale Funktion von u,v ist, mit einverstanden auch die Fälle, wo $G(u,v) = G_1(u)$, $G(u,v) = G_2(v)$, $G(u,v) = \text{konst.}$ sind. Wir nennen die Funktionalgleichung

$$h\{F_1[f(x+y),f(x),f(y)]\} = h\{F_2[f(x+y),f(x),f(y)]\}$$

(oder ihre "Umordnung" in dem obigen Sinne) eine algebraisch alternative Funktionalgleichung von (1), wenn die rationale Funktion h keine eindeutige Inversfunktion hat. Unter anderem gilt der folgende

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Satz : Jede algebraisch alternative Gleichung der beiden Funktionalgleichungen

(2) $f(x+y) - f(x) - f(y) = 0$,

(3) $g(x+y) - Ag(x)g(y) - Bg(x) - Bg(y) - C = 0$, $B^2=AC+B$

besitzt nur dieselben nichtkonstanten Lösungen, wie (2) bzw. (3).

D.V. IONESCU: Sur l'équation fonctionnelle de M. Fréchet.

On sait que pour la différence d'ordre n de la fonction f, on a la représentation $\overset{n}{\underset{h}{\Delta}} f(x) = \int_x^{x+nh} \varphi(s) f^{n}(s)ds$, lorsque $f \in C^n [x,x+nh]$, qui est un cas particulier de la représentation $[x_o,x_1,\dots,x_n;f] = \int_{x_o}^{x_n} \varphi(s) f^{n}(s)ds$, lorsque $f \in C^n [x_o,x_n]$. Dans cette formule la fonction φ est positive sur (x_o,x_n) et l'on a $\int_{x_o}^{x_n} \varphi(s)\, ds = \frac{1}{n!}$.

M. Fréchet a considéré la différence $\overset{n}{\underset{h_1,\dots,h_n}{\Delta}} f(n)$ à n pas $h_1,\dots,h_n$ et a démontré que les seules solutions continues de l'équation fonctionnelle $\overset{n}{\underset{h_1,\dots,h_n}{\Delta}} f(n) = 0$, quelsque soient $h_1,\dots,h_n$ sont les polynomes de degré au plus égal a $n-1$. Dans cette communication nous donnons la représentation

$$\overset{n}{\underset{h_1,\dots,h_n}{\Delta}} f(x) = \int_x^{x+h_1+\dots+h_n} \Psi(s) f^{n}(s)ds$$

lorsque $f \in C^n [x,x+h_1+\dots+h_n]$ et sous certaines hypothèses sur les $h_1,\dots,h_n$. Nous montrerons que la fonction Ψ s'obtient par un problème aux limites, qu'elle est positive sur l'intervalle $(x,x+h_1+\dots+h_n)$ et que

$$\int_x^{x+h_1+\dots+h_n} \Psi(s)\, ds = h_1 h_2 \dots h_n.$$ De cette représentation on peut déduire des conclusions intéressantes sur certaines équations fonctionnelles.

I. STAMATE: Funktionalgleichungen der Polynome.

Es werden die hauptsächlichsten Ergebnisse über die Funktionalgleichungen von M. Fréchet, Th. Anghelutza, Brouwer, A. Marchaud, T. Popoviciu, D.V. Ionescu, J. Herbrand etc, erwähnt.
Die Arbeit ist in folgende Kapitel eingeteilt: Funktionalgleichungen einer Veränderlichen, Funktionalgleichungen mit mehreren Veränderlichen, abstrakte Funktionen, als limes definierte Polynome, integrofunktionale Gleichungen.
In der Zusammenfassung werden die vom Verfasser bearbeiteten integro-funktionalen Gleichungen eingeführt, in denen die Gleichungen mehrere unbekannte Funktionen enthalten.

S. KUREPA: Relations Between Additive Functions

We consider additive functions f and g such that

$$f(A(x)) = P(x)\, g\,(B(x))$$

holds for all but at most a finite number of x's, with A and B quotients of polinomials and P a continuous function.

Problemstellungen und Bemerkungen

1. Remarque sur la série

$$g(x) = \sum a_r(\,\varphi(x)\,)^r$$

où $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. E. Vincze a posé la question suivante: Comment est-ce possible caractériser les fonctions $g(x)$ qui peuvent être écrites sous la forme suivante:

$$g(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(\varphi(x))^r$$

où x est réel arbitraire, les a_r sont réeles et où $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
On donne plusieurs théorèmes pour caractériser ces fonctions, parmi lesquels sont les suivants: Si φ est une fonction non-continue et si la fonction entière $x \to F(x) = \sum a_r x^r$ n'est pas identiquement égal à une constante, on a que la fonction g ne peut pas être mesurable dans aucun intervalle. On donne la

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

généralisation suivante de ce theorème: Soit donnée une fonction réelle φ qui possède la propriété suivante: Si A est un ensemble de positive mesure, alors l'image $\varphi(A)$ est dense partout. Soit $x \to F(x) = \sum a_r x^r$ une telle fonction entière (a_r soit réel) pour laquelle $F'(x) \not\equiv 0$, alors on a que la fonction $x \to F(\varphi(x))$ ne peut pas être continue dans aucun point, de plus elle ne peut pas être mesurable dans aucun intervalle.

P. Fischer

2. Problem. O.E. Gheorghiu has mentioned the functional equation

$$(*) \qquad F(x,y)\,F(z,t) = F(xz-yt, xt+yt+yz)$$

stating only that $F(x,y) = (x^2+xy+y^2)^a$ with arbitrary constant $\underline{a}$ is a solution. The equation implies

$$F(x,y) = \begin{cases} m(y)\,g(\frac{x}{y}) & y \neq 0 \\ m(x) & y = 0 \end{cases},$$

where m is a multiplicative function:

$$\text{(i)} \quad m(xy) = m(x)m(y)$$

$$\text{(ii)} \quad g(u)g(v) = m(u+v+1)\,g\left(\frac{uv-1}{u+v+1}\right) \qquad (u+v+1 \neq 0)$$

$$\text{(iii)} \quad g(u)g(-1-u) = m(-1-u-u^2)\ .$$

How can the general solution of (*) be determined explicitly? How that of (i), (ii), (iii) ?

J. Aczél

3. Remark. A detailed report was given on the method of W.A.Luxemburg (Lectures on A.Robinson's theory of infinitesimals and infinitely large numbers. Second ed. 1964. p. 82) on the solution of the Cauchy equation $(*)$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$. With means of non-standard analysis the following was proved: if f is a solution of $(*)$ on $\mathbb{R}$ and f is bounded on some interval in $\mathbb{R}$, then $f(x) = x\,f(1)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

I. Fenyő

4. Remark. M.V. Zareckij's paper " Sur quelques équations fonctionnelles liées à l'équation de Cauchy " (Russian), Doklady Ak. Nauk Beloruss SSR 11 (1967), 487-491, states that

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

(1) $$F(x+y,z) + F(x,y) = F(x,y+z) + F(y,z)$$

is necessary and sufficient in order that

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + F(x,y)$$

should have a solution f. This statement is false, but it becomes true if we combine (1) with

(2) $$F(x,y) = F(y,x) ,$$

because the general solution of (1) is

$$F(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y) + T(x,y) ,$$

where f is arbitrary, T is an arbitrary biadditive $(T(x_1+x_2,y) = T(x_1,y) + T(x_2,y);\ T(x,y_1+y_2) = T(x,y_1) + T(x,y_2))$ skew-symmetric $(T(y,x) = -T(x,y))$ function, while the <u>general solution of the system (1), (2) is</u>

(3) $$F(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y).$$

See e.g. J. Aczél, Glasnik mat. fiz. astron. 20, 65-73, 1965, where also the general solution of the functional equation

(4) $$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

is given as $f(x) = \frac{1}{2} F(x,x)$ where F is an arbitrary biadditive, symmetric function. <u>The function F belonging to a given solution f</u> can be given by

(5) $$F(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y).$$

The formal coincidene of (5) with (3) suggests more general research on such dualities as that which seems to exist between (4) and the system (1), (2).

J. Aczél.

5. Remark to Problem 2, above. The general complex-valued (real-valued) solution of the functional equation

$$F(x,y)\, F(z,t) = F(xz-yt,\ xt+yz+yt) ,$$

assumed valid for all real x,y,z and t is

$$F(x,y) = \varphi(x+\frac{y}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\, y)$$

where φ is an arbitrary complex-valued (real-valued) function of a complex variable satisfying

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$$\varphi(z\omega) = \varphi(z)\varphi(\omega)$$

for all complex z and ω.
The measurable (complex-valued) solutions are $F \equiv 0$, $F \equiv 1$, and

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y = 0 \\ \left(x + \frac{y}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} y\right)^n e^{c \ln(x^2+xy+y^2)} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

where n is an arbitrary integer and c a complex constant.
The measurable real valued solutions are

$$F \equiv 0,\ F \equiv 1 \ \text{ and } \ F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y = 0 \\ (x^2 + xy + y^2)^a & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

where $\underline{a}$ is a real constant.

J.A. Baker

6. Remark. The above remark gives answer also to the other question which I have posed under 2:

$$m(x) = \varphi(x) \quad \text{(the restriction of } \varphi \text{ to reals)}$$
$$g(x) = \varphi\left(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right).$$

J. Aczél

7. Remarque. On considère l'équation suivante:

$$(*) \qquad \|f(x+y)\| = \|f(x) + f(y)\|$$

où cette relation est valide presque partout (au sens de mesure de Lebesgue de deux dimensions). On peut démontrer que pour tous f on peut trouver une fonction F qui a les propriétés suivantes

$$F(x+y) = F(x) + F(y)$$

et $F(x) = f(x)$ presque partout (au sens de measure de Lebesgue d'une dimension).

P. Fischer

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

8. Remark to the above problem posed by P. Fischer: I belive that it would be desirable to establish the extension in the following sense (also for the real Cauchy equation): if the functional equation is supposed to be satisfied for all $(x,y) \in S$ then the extension should satisfy it everywhere and be equal to f on

$$S' = \{x \mid \exists y: (x,y) \in S\} \cup \{y \mid \exists x: (x,y) \in S\} \cup \{z = x+y \mid (x,y) \in S\}$$

J. Aczél

9. Remark. Means in n-space.
The following theorem is proved. The case $n=1$ of the theorem was proven by Aczél (On mean values, Bull. Amer. Math. Soc. 54, 392-400, 1948). R^n denotes the n-dimensional Euclidean vector space.
Theorem. Suppose that M is either an open n-cell or a closed n-cell and that there is a continuous function $(x,y) \to xy$ from $M \times M$ to M which is cancellative ($ax = ay$ or $xa = ya$ implies $x=y$) and medial ($xy \cdot uv = xu \cdot yv$). Suppose further that M contains an idempotent e ($e = ee$) which, in the case that M is a closed n-cell, is not in the bounding (n-1)-sphere. Then there exist commuting, invertible linear transformations $L_1, L_2: R^n \to R^n$ and a homeomorphism f of M onto a subset of R^n such that $f(xy) = L_1(f(x)) - L_2(f(y))$ for all x,y in M. If, in addition to the above hypotheses, we have commutativity ($xy = yx$) and idempotency ($x = xx$) in M, then there exists a homeomorphism f of M onto a subset of R^n such that $f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$ for all x,y in M.

K. Sigmon

10. Problem. V sei ein Vektorraum über einem Körper K, $L: V \to \mathrm{Hom}(V,V)$ sei eine Abbildung von V in die Algebra der linearen Transformationen von V. L sei linear:

$$L(\alpha x+\beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \qquad (\alpha,\beta \in K;\ x,y \in V) .$$

Durch jede solche Abbildung L ist eine Algebra in V bestimmt, wenn man als Multiplikation $(x,y) \to xy \in V$ in V definiert:

$$(1) \qquad xy := L(x)y$$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

(= Anwendung der linearen Transformation $L(x)$ auf den Vektor $y \in V$) . Umgekehrt definiert jede Algebra in V eine solche Abbildung L.
Gesucht ist eine Funktionalgleichung (oder ein System von Funktionalgleichungen) für Abbildungen L mit den genannten Eigenschaften derart, daß die durch die Lösungen $L(x)$ vermöge (1) definierten Algebren eine <u>neue</u> Klasse nichtassoziativer Algebren bilden.
Ein Beispiel einer solchen Funktionalgleichung ist

$$M(x)\, L(x) = \mu(x)\, I \;, \begin{cases} M\colon V \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(V,V), \text{ linear} \\ \mu\colon V \longrightarrow K \\ I \text{ die Identität } V \longrightarrow V. \end{cases}$$

Diese Funktionalgleichung wurde behandelt in W. Eichhorn: Funktionalgleichungen in Vektorräumen, Kompositionsalgebren und Systeme partieller Differentialgleichungen. Aequationes Math., im Erscheinen.

W. Eichhorn

11. Remark. A result and a problem for Boole algebras.
From the axiomatic definition of the information we have the following problem, formulated for Boole algebras. Let A be a Boole algebra and let G be an arbitrary abelian group (specially, the additive group of real numbers). We define the set A^{*2} by

$$A^{*2} = \{(x,y)\colon x \in A,\ y \in A,\ x \cap y = 0\} .$$

Let $\varphi\colon A^{*2} \longrightarrow G$ a mapping, satisfying the conditions

(1) $$\varphi(x,y) = \varphi(y,x) \qquad [(x,y) \in A^{*2}]$$

and

(2) $$\varphi(x \cup y,z) + \varphi(x,y) = \varphi(x,y \cup z) + \varphi(y,z)$$
$$[(x,y) \text{ and } (x \cup y,z) \in A^{*2}] .$$

It is trivial, that if $g\colon A \longrightarrow G$ is an arbitrary mapping $\varphi\colon A^{*2} \longrightarrow G$ is defined by

$$\varphi(x,y) = g(x) + g(y) - g(x \cup y) \qquad [x,y \in A^{*2}],$$

then $\varphi(x,y)$ is a solution of the system of functional equations (1) and (2)
We have proved the following
<u>THEOREM. Let</u> A <u>be a finite Boole algebra and</u> G <u>an abelian group. If the mapping</u> $\varphi\colon A^{*2} \longrightarrow G$ <u>satisfies the conditions</u> (1) <u>and</u> (2) <u>then there exists a mapping</u> $g\colon A \longrightarrow G$, <u>such that</u>

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

(3) $$\varphi(x,y) = g(x) + g(y) - g(x \cup y)$$

holds for all $(x,y) \in A*^2$.

For an infinite Boole algebra we don't know, whether the theorem holds or not. This is an open question.

Z. Daróczy

12. Remark. Functional equations on algebraic systems.

The functional equation

(1) $$f_o(x+y) + f_1(x-y) = \sum_{k=1}^{n} f_{2k}(x)\, f_{2k+1}(y)$$

containing several unknown functions $f_i : G \to R$, where $(G,+)$ is a group and $(R,+,\cdot)$ a ring, leads to a generalized additive type equation using identity

$$f_o(x+y+z) + f_1(x+z+y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[f_{2k}(x+y)\, f_{2k+1}(z) - f_{2k}(x)\, f_{2k+1}(z-y) + f_{2k}(x+z)\, f_{2k+1}(-y)\right]$$

and supposing

(2) $$f_o(x+y+z) = f_o(x+z+y) \quad \text{or} \quad f_1(x+y+z) = f_1(x+z+y)\ , \quad x,y,z \in G$$

The method can be applied also for more general equations as e. g.

$$f_o(x \circ y) + f_1(x * y) = F\left[f_1(x),\dots,f_n(x);\ f_{n+1}(y),\dots,f_{2n}(y)\right]\ ,$$

where F is given and $\circ$, $*$ are given binary operations satisfying certain generalized associative laws resp. suppositions similar to (2).

M. Hosszú

13. Remark. In connection with the discussion of derivations, I would like to call attention to the following result of W. Nöbauer (Funktionen auf kommutativen Ringen, Math. Ann. 147, 11-175, 1962): Let $(U,+,\cdot,\circ)$ be the tri-operational algebra of functions over an integral domain I; let R be the set of rational functions in U; and let D be a transformation from R into U satisfying the three conditions

(1) $D(f+g) = Df + Dg$,

(2) $D(f\cdot g) = (Df)\cdot g + f\cdot(Dg)$,

(3) $D(f\circ g) = D(f\circ g)\cdot Dg$.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

If $|I|$ is finite, then D is trivial in the sense that $Df = 0$ for every f in R. If $|I|$ is infinite, then D is trivial or the ordinary (formal) derivative. This shows that adding the chain rule to the sum and product rules has important consequences.

B. Schweizer

14. Problem. It is known, that e.g. in the family of all power series in two real variables, convergent everywhere, the harmonic functions are exactly those satisfying the functional equation

$$u(x,y) = 2 \operatorname{Re} u \left(\frac{x + iy}{2}, \frac{y - ix}{2}\right) .$$

Is it possible to derive from this a characterisation entirely in terms of real variables?

Gy.I. Targonski

15. Remarque. On donne la solution générale de l'équation

$$\prod_{i=1}^{n} A_i(x_{i_1}, \dots, x_{i_{p_i}}) = 0$$

sous l'hypotèse que les variables sont indépendantes et appartiennent à un ensemble arbitraire M; les éléments des matrices considerées sont des fonctions définies sur M avec des valeurs dans un corps commutatif K. Pour trouver la solution de cette équation on a utilisé des résultats de là théorie des matrices semi-inverses et inverses généralisées.

I. a. Pour l'équation matricielle $AX = B$ la condition de comptibilité est: $B = AA^{\perp}B$, et la solution est

$$X = A^{\perp}B + (E - A^{\perp}A)\,U .$$

b. On peut écrire la condition de compatibilité sous la forme: $B = AA^{\perp}U$ ou $(E - AA^{\perp})B = 0$. Des résultats analogues pur l'équation $XA = B$.

II. Soit l'équation $A(x)\,B(y)\,C(z) = 0$, qui est un cas particulier de l'équation considerée (les variables sont indépendantes) et le lemme établi par E. Arghiriade (Rev. de math. pure et appl. no 9. 1967) est le suivant:

L'équation fonctionnelle matricielle $A(x,y)\,B(z) = 0$ admis la solution generale $A(x,y) = A_1(x,y)P$, $B(z) = QB_1(z)$, où A_1, B_1

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

sont des matrices arbitraires, P, Q étant des matrices constantes soumises à la condition: $PQ = 0$.

Nous avons: $A(x)B(y) = M(x,y)P$

(1) $C(z) = Q\,N(z)$

avec $PQ = 0$, d'où $A(x)B(y)(E - P^{\perp}P) = 0$. Donc

(2) $A(x) = M_1 P_1$; $B(y)(E - P^{\perp}P) = Q_1 N_1(y)$,

avec $P_1 Q_1 = 0$.

La condition de compatibilité étant $N_1(y) = V(y)(E - P^{\perp}P)$, nous avons

(3) $B(y) = Q_1 V(y)(E - P^{\perp}P) + W(y)(P^{\perp}P)$.

Les relations (1),(2),(3) ($P^{\perp}$ est la semi-inverse de P) donnent la solution générale dans le cas consideré. La téchnique utilisée est la même pourle cas générale.

En considérant l'équation de J. Aczél: $F(x,z) = G(x,y)H(y,z)$ pour des matrices rectangulaires de la même manière (sous certains conditions) nous avons obtenus quelques résultats, de quels nous nous ocuperons dans une autre note.

E. Arghiriade - A. Dragomir

16. Remark on the paper read by J. Aczél.

It appears that one can formulate an espect of Aczél's lecture and of the paper by A. Moór and L. Pintér (Publ. Math. Debrecen 13, 207-223, 1966), as follows. Given an algebra F of n times differentiable functions, D_n a not necessarily linear differential operator of order n, and S the solution set $\{f \mid D_n(f) = 0\}$. Question: given an $f_o \in F$, $D_n(f_o) = 0$, does there exist an n-parameter family of substitution operators $H_{\bar{r}_n}$, such that $H_{\bar{r}_n} y_o$ is the solution set S, or possibly some interesting subset of S; possibly the choise of the "generating element" y_o is also relevant. If D_n is linear, a study of the commutator $[D_n, H_{\bar{r}_n}]$ may be helpful. It is not impossible that early work by P. Appell (Acta Math. 15, 281-315, (1891)) may have some connections with this.

Gy. I. Targonski

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

17. Bemerkung zum Vortrag von Herrn Professor FENYÖ.
Es handelt sich um die Funktionalgleichung

$$(1) \qquad f(x) + f(y) = f(x+y-xy) + f(xy)$$

und wir nehmen an, daß f an den Stellen $x = \pm 1$ stetig ist.
Mit $y = -x$ folgt aus (1)

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) + f(-x) = f(x^2) + f(-x^2) = g(x^2) = \ldots = g(x^{2^k}) = \ldots$$

Wegen der Stetigkeit von f bei $x = \pm 1$ folgt auch

$$f(y) + f(-y) = g(y) = \lim_{k\to\infty} g(y^{2^k}) = g(1) = 2b \qquad (|y| < 1)$$

das heißt

$$(2) \qquad \varphi(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - b = -[f(-x) - b] = -\varphi(-x)$$

ist eine ungerade Funktion. Damit geht die Gleichung (1) in

$$(3) \qquad \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y-xy) + \varphi(xy)$$

über, und dabei gilt auch

$$(4) \qquad \varphi(x) + \varphi(-y) = \varphi(x-y+xy) + \varphi(-xy),$$

die mit $y \to -y$ aus (3) folgt. Addieren wir die Gleichungen (3) und (4), so ergibt sich wegen (2)

$$2\varphi(x) = \varphi(x+y-xy) + \varphi(x-y+xy) .$$

Dies ist aber die Jensensche Gleichung, was man mit den Substitutionen $x+y-xy = u$ und $x-y+xy = v$ leicht einsieht, das heißt wegen der Stetigkeit von $\varphi(x)$ (obgleich erst bei $x = \pm 1$) erhält man - wie das bekannt ist - die Lösung $\varphi(x) = ax + c$; infolge (2) ist $c = 0$. Wir haben also $f(x) = ax + b$ als Lösungen unter der oben erwähnten Annahme.

E. Vincze

18. Problem.
Was sind die Lösungen der Funktionalgleichung

$$f_o\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(a_i)$$

für die reellen Funktionen $f_o, f_1, f_2, \ldots$ von reellen Veränderlichen, wobei $\sum_i a_i$ eine (nicht unbedingt absolut) konvergente Reihe mit der Nebenbedingung $|a_i| \geq |a_{i+1}| > 0$ $(i=1,2,\ldots)$ ist.

E. Vincze

19. Remark. The solution of Belousov's system of matrix functional equations

(i) $$F(X+Y) = F(X) + F(Y)$$

(ii) $$F\left[(F(X) - X)(F(Y) - Y)\right] = 0$$

where variables and function values are $n \times n$ real matrices is given under the assumption of boundedness above on a set of positive Lebesgue n^2-dimensional measure.

S.L. Segal

20. Remark. Kemperman's question: To find an additive non measurable function Φ on the reals and non-zero constants a_k such that $\sum a_k \Phi(x^k)$ converges precisely when $\sum a_k x^k$ converges.

S.L. Segal

21. Remark. On the set of solutions of the translation equation. James Hamilton (Fordham University, Bronx, New York) found the following results. Let $F(u,v)$ be a function defined for all reals, and a solution of the translation equation

(1) $$F\left[F(u,v), w\right] = F\left[u, v+w\right].$$

A one parameter family of functions of one variable is given by

$$F(c,t) = f_c(t) \quad , \quad (c = \text{const.})$$

the "index set" Λ_F is defined as the set of values $F(c,0)$, where c ranges over all reals. Three statements are given:

I. The function $F(c_1;t) - F(c_2,t)$ either vanishes everywhere, or nowhere, and then $\{f_c(t)\}$ is isomorphic to Λ_F.
The equivalence relation of "shift relatedness" between $F(c_1,t)$ and $F(c_2,t)$ prevails if

(2) $$\exists a \quad \forall t \qquad F(c_1, t+a) = F(c_2,t) \quad .$$

This relation generates a decomposition of $f_c(t)$ (and those of the index set) into disjoint classes. Thus e.g. $F(u,v) = ue^v$ has three equivalence classes, $u > 0$, $u = 0$ and $u < 0$. Let now Λ_α be the subset of Λ_F belonging to one equivalence class, and S_α the corresponding subset of $\{f_c(t)\}$. Then

II. The codomain of each function is identical with Λ_α, and conversely, the set of all functions in $\{f_c(t)\}$ with a given codomain forms an equivalence class, and the codomain is the corresponding subset of the index set Λ_F.

Hamilton concludes by studying two different solutions $F(u,v)$ and $G(u,v)$ of (1). Decomposing $\{f_c(t)\}$ and $\{g_c(t)\} = \{G(c,t)\}$ into equivalence classes he finds

III. For a class $S_\alpha \subset \{f_c(t)\}$ to be shift related to a class $V_\beta \subset \{g_c(t)\}$ it is necessary that $\Lambda_\alpha = \Lambda_\beta$. Here shift relatedness is to be understood in the generalized sense

$$\exists a \quad \forall t \qquad F(c_1,t) = G(c_2,t+a) .$$

Gy.I. Targonski

22. Bemerkung: Einige Bemerkungen über die Cauchy-Binet'sche Funktionalgleichung.

Man betrachtet von dem Standpunkte der allgemeinen Lösung die Funktionalgleichungen

$$f_1(xy) = 2f_1(x)f_1(y) + C$$
$$f_1(xy) = f_1(x)f_1(y) + f_2(x)f_3(y) + C$$
$$f_1(xy) = 2f_2(x)f_3(y) + C$$

Diese Funktionalgleichungen sind von der Funktion $f_1(x) = f(x,0,0,0)$ verifiziert, wo $f(x,y,z,t)$ die Lösung der CAUCHY-BINET'schen Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} & f(\alpha x+\beta y+\gamma z, \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z, \alpha t+\beta v+\gamma w, \alpha_1 t+\beta_1 v+\gamma_1 w) = \\ = \; & f(x,y,t,v)f(\alpha,\alpha_1,\beta,\beta_1) + f(x,z,t,w)f(\alpha,\alpha_1,\gamma,\gamma_1) + \\ & + f(y,z,v,w)f(\beta,\beta_1,\gamma,\gamma_1) \end{aligned}$$

Man stellt fest, daß die vier Funktionen $f_1(x) = f(x,0,0,0)$, $f_2(x) = f(0,x,0,0)$, $f_3(x) = f(0,0,x,0)$, $f_4(x) = f(0,0,0,x)$ die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} f_1(xy) & f_2(xy) \\ f_3(xy) & f_4(xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_3(x) & f_4(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(y) & f_2(y) \\ f_3(y) & f_4(y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & C \\ C & C \end{pmatrix}$$

erfüllen.

O. Gheorghiu - B. Crstici

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Dies war die erste Funtkionalgleichungstagung seit der Einweihung des neuen Gästehauses, dessen moderne und elegante Einrichtungen allgemeinen Beifall fanden. Trotz des Personalmangels haben sich die Teilnehmer aufs freundlichste umsorgt gefühlt. Die Leiter der Tagung möchten die angenehme Pflicht erfüllen, zugleich im Namen aller Teilnehmer der Institutsleitung aufs herzlichste für die Ermöglichung der Tagung und ihrer vorzüglichen Organisation zu danken.

I. Fenyö (Rostock)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft