Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 20/68

Eigenwertaufgaben und ihre numerische Behandlung

11. bis 17.7.1968

Auf dieser Tagung unter der Leitung von Prof. Dr. Dr. h. c. Dr. e. h. L. Collatz und Dr. W. Wetterling wurde in insgesamt 20 Vorträgen über verschiedene Aspekte des vielfältigen Gebiets der Eigenwertaufgaben die enge Beziehung deutlich, die hier zwischen den physikalisch-technischen Anwendungen, der mathematischen Theorie und der Numerik besteht. Es wurden Eigenwertaufgaben bei Operatoren in allgemeinen Räumen, bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, bei Integralgleichungen und bei Matrizen behandelt, ferner Verallgemeinerungen auf mehrparametrige und nichtlineare Probleme. Hierbei standen im Vordergrund die Fragen der Bestimmung von Schranken für Eigenwerte, der Konvergenz bei Diskretisierung und der Konvergenz bei Entwicklung nach Eigenfunktionen. Der enge Zusammenhang mit physikalischen Problemen wurde deutlich bei mehreren Vorträgen über isoperimetrische Probleme und über verschiedene Fragestellungen der Mechanik.

Als besonders fruchtbar und auch für weitergehende Entwicklungen erfolgversprechend erweist sich die Anwendung abstrakter funktionalanalytischer Methoden; es können z.B. das klassische Rayleigh-Prinzip und Eigenwerteinschließungen wie die nach Krylov-Bogoljubov,

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Temple u.a. weitgehend verallgemeinert werden. Auch mit der neuen, vieldiskutierten Intervallrechnung bemüht man sich um exakte Schranken für Eigenwerte und Eigenvektoren.

Die 45 Teilnehmer, darunter 10 aus Chile, Italien, den Niederlanden, Österreich, Schweiz und USA konnten durch den regen Gedankenaustausch viele Anregungen für ihre wissenschaftliche Arbeit gewinnen.

Teilnehmer

Ansorge, R., Clausthal-Zellerfeld
Albrecht, J., Berlin
Bandle, C., Zürich
Börsch-Supan, W., Mainz
Bohl, E., Hamburg
Braess, D., Münster
Bredendiek, E., Hamburg
Bresters, W., Enschede/Holland
Brosowski, B., München
Collatz, L., Hamburg
Dirschmid, H., Wien
Feldmann, H., Hamburg
Fischer, H., Tübingen
Galligani, I., Ispra/Italien
Grigorieff, R.D., Frankfurt
Hadeler, K.P., Hamburg
Hersch, J., Zürich
Hotz, G., Saarbrücken
de Jager, E.M., Enschede/Holland
Kornstaedt, H.-J., Berlin
Krawczyk, R., Karlsruhe
Kremer, F., Köln
Kupka, I., Hamburg
Leipholz, H., Karlsruhe
McLaurin, J.W., Zürich
Mennicken, R., Köln
Natterer, F., Hamburg
Nickel, K., Karlsruhe
Nicolovius, R., Hamburg
Nitsche, J., Freiburg
Nixdorff, K., Konstanz
Opfer, G., Hamburg
Pallaske, U., Köln
Riesenkönig, W., Valparaiso/Chile
Schneider, A., Köln
Schock, E., Bonn
Stummel, F., Frankfurt
Törnig, W., Jülich
Troch, I., Wien
Troesch, B.M., Los Angeles/USA
Werner, B., Hamburg
Wetterling, W., Hamburg
Ziegler, M., Clausthal-Zellerfeld

Vortragsauszüge

MENNICKEN, R.: Zu F.W. Schäfke's verallgemeinertem Äquikonvergenzprinzip

Referiert wurde das von Schäfke in der Math. Zeitschrift Bd. 80 angegebene verallgemeinerte Äquikonvergenzprinzip. Mitgeteilt wurden ferner die von Mennicken u. Sattler in der Math. Zeitschrift 93 bewiesenen, den Anwendungsbereich des Äquikonvergenzprinzips erweiternden hinreichenden Bedingungen für das Erfülltsein der von Schäfke gemachten Annahmen und der dort aufgrund dieses Prinzips bewiesene Satz über Biorthogonalentwicklungen analytischer Funktionen nach Eigenlösungen linearer Differentialgleichungen. Angedeutet wurde die Möglichkeit einer Verallgemeinerung auf entsprechende Systeme linearer Differentialgleichungen. Berichtet wurde, daß aus diesen Ergebnissen die Mehrzahl der bekannten Entwicklungen analytischer Funktionen nach speziellen Funktionen der Mathematischen Physik unmittelbar ableitbar ist, wobei für viele Entwicklungen die Angabe des genauen Konvergenzgebietes erstmals möglich wird. Hingewiesen wurde auf die Herleitung derartiger Entwicklungssätze durch Schäfke in der Math. Zeitschrift Bd. 75, durch Schneider in der Math. Zeitschrift Bd. 82 und durch Mennicken u. Sattler in der Math. Zeitschrift Bd. 89.

FISCHER, H.: Scharfe Fehlerschranken beim Differenzenverfahren für die schwingende Saite.

1. Die Differentialgleichung

$$y'' + \lambda\, p(x) y = o, \quad y(o) = y(1) = o, \quad p(x) \geq 1, \quad |p(x) - p(y)| \leq B\, |x-y|$$

sei mit dem Differenzenverfahren

$$\frac{\Delta^2 y_{i-1}}{h^2} + \lambda^{(n)}\, \bar{p}_i\, y_i = o, \qquad y_o = y_n = o$$

behandelt. Fehlerschranke:

$$\frac{\lambda_k - \lambda_k^{(n)}}{\lambda_k} < \frac{h}{4}\left(B + \frac{h}{3}\left(7B\sqrt{\lambda_k^{(n)}} + 2P\lambda_k^{(n)}\right)\right) = F_{n,k}.$$

2. $F(B) = \{p \mid p(x) \geq 1 \text{ und } |p(x) - p(y)| \leq B|x-y|\}$.

Gesucht $\max\limits_{p \in F(B)} \dfrac{\lambda_1[p] - \lambda_1^{(n)}[p]}{\lambda_1[p]}$.

Für ein leicht abgewandeltes Differenzenverfahren ist dieses Maximum eindeutig mit Hilfe eines Gradientenverfahrens zu gewinnen. Die Bestimmung des Màximums läuft auf mehrdimensionale Optimierung einer konkaven Funktion hinaus.

Es werden einzelne scharfe Schranken angegeben. Der Vergleich mit der Fehlerschranke $F_{n,k}$ ergibt, daß diese schon befriedigend scharf ist.

HERSCH, J.: Harmonische Verpflanzung und isoperimetrische Sätze für Eigenwerte

Eine in einem Gebiet $\subset R^N$ gegebene Funktion, deren Niveauflächen mit denjenigen einer harmonischen Funktion zusammenfallen, wird in ein anderes Gebiet "harmonisch" verpflanzt; u. U. bleibt ihr Dirichlet'sches Integral bei dieser Verpflanzung invariant. So können einige isoperimetrische Sätze, welche für $N = 2$ und einfachen Zusammenhang mit der "konformen Verpflanzung" bewiesen wurden, auf höheren Zusammenhang, sowie auf höhere Dimensionen (speziell auf den Raum) erweitert werden. Insbesondere der Satz von Polya-Szegö: $\lambda_1 \dot{r}^2$ = Max für den Kreis ($\dot{r}$ = maximaler Abbildungsradius des betrachteten ebenen Gebietes, λ_1 = erster Eigenwert der homogenen Membran mit eingespanntem Rand.).

ALBRECHT, J.: Verallgemeinerung von Einschließungssätzen von L. Collatz

I. Für Matrix-Eigenwertaufgaben $Ax = \lambda Bx$ gilt:

VORAUSSETZUNGEN:

1. A reell, symmetrisch;
2. B reell, symmetrisch, positiv definit.

DEFINITIONEN:

1. $B = C^T C$ (Cholesky-Zerlegung)
2. $q_i = \dfrac{[(C^T)^{-1} Ay]_i}{[Cy]_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

SATZ: $\min\limits_{i=1,\ldots,n} q_i \leq \lambda_s \leq \max\limits_{i=1,\ldots,n} q_i$.

II. Für selbstadjungierte, volldefinite Eigenwertaufgaben mit Differentialgleichungen $Mu(x) = \lambda\, Nu(x)$ in $a \leq x \leq b$ und wesentlichen oder natürlichen Randbedingungen an den Stellen $x = a$ und $x = b$,

wobei $$Mu(x) = \sum_{\mu=o}^{n} (-1)^{\mu} (p_{\mu}(x)\, u^{(\mu)}(x))^{(\mu)};$$

$$Nu(x) = \sum_{\nu=o}^{n} (-1)^{\nu} (q_{\nu}(x)\, u^{(\nu)}(\lambda))^{(\nu)};\quad m > n \geq o,$$ gilt:

DEFINITIONEN:

1. $M_{\nu_1} = M_{\nu_o}, \ldots$ [Verfahren der schrittweisen Näherungen]
2. $\Phi_{\nu}(x) = \dfrac{v_o^{(\nu)}(x)}{v_1^{(\nu)}(x)}$ $(\nu = o, 1, \ldots, n)$.

VORAUSSETZUNGEN: $o < \Phi_{\nu}(x) < \infty$ in $a \leq x \leq b$ $(\nu = o, 1, \ldots, n)$

SATZ: $\min\limits_{\nu=o,1,\ldots,n} \left(\min\limits_{o \leq x \leq b} \Phi_{\nu}(x) \right) \leq \lambda_s \leq \max\limits_{\nu=o,1,\ldots,n} \left(\max\limits_{a \leq x \leq b} \Phi_{\nu}(x) \right)$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

GALLIGANI, I.: Numerical Experiments with direct and iterative methods for solving the algebraic eigenproblem

Recently developed techniques of minimizing a function produce efficient iterative methods for finding a few of the eigenvalues and associated eigenvectors of a non Hermitian matrix by searching for the vectors which minimize a particular function.

The numerical solution of the time dependent diffusion equations requires the determination of the algebraically largest eigenvalue of a "large" sparse matrix. This eigenvalue is determined by a "trial and error" procedure, which has been proved to converge.

Different methods for solving the algebraic eigenproblem have been compared by carrying out "experimental" calculations on "representative" problems for which exact results are known.

STUMMEL, F.: Differenzenapproximation von Rand- und Eigenwertaufgaben elliptischer Differentialgleichungen

Im ersten Teil des Vortrags werden die wichtigsten Eigenschaften regulärer, koerzitiver Rand- und Eigenwertaufgaben erläutert am Beispiel des Dirichletschen Randwertproblems für stark elliptische Differentialgleichungen 2m-ter Ordnung mit einem Differentialoperator (2m-1)-ter Ordnung im Eigenwertterm. Für solche Aufgaben genügt die inhomogene Gleichung stets der Fredholmschen Alternative, die zugehörigen Eigenwerte haben endliche Vielfachheit und bilden eine höchstens abzählbar unendliche Folge, die keinen Häufungspunkt im Endlichen besitzt.

Im zweiten Teil des Vortrags wird eine Differenzenapproximation dieser Dirichletschen Rand- und Eigenwertaufgabe definiert. Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen konvergiert in der komplexen Zahlenebene das Spektrum und die Resolventenmenge der Differen-

zenapproximation gegen das Spektrum und die Resolventenmenge der Differentialgleichungsaufgabe. Die Eigenwerte des Differentialgleichungsproblems werden dabei durch die Eigenwerte der Differenzenapproximation entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit approximiert.

KORNSTAEDT, H.-J.: Eine Verallgemeinerung des TEMPLE'schen Einschließungssatzes auf normale Operatoren

Aus einem allgemeinen Einschließungsprinzips von Hadeler wird mit Hilfe einer einfachen Variante des Einschließungssatzes von Krylov-Bogoljubov eine Verallgemeinerung des Temple'schen Einschließungssatzes auf normale Operatoren hergeleitet.

BANDLE, C.: Über das Stekloffsche Eigenwertproblem

Es sei G ein Gebiet der z-Ebene, das von einer Kurve Γ begrenzt werde. Das Stekloffsche Eigenwertproblem lautet:

$$\Delta u = o \quad \text{in } G$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \mu \rho u \quad \text{längs } \Gamma$$

($\frac{\partial}{\partial n}$ = Ableitung nach der äußeren Normalen von Γ, $\rho(z)$ = spezifische Masse auf Γ, μ = Eigenwert).
Wie bei der Membran können mit Hilfe der konformen Abbildung obere Schranken für die Eigenwerte angegeben werden. Weinstock hat die isoperimetrische Ungleichung von Szegö (freie Membran) auf des Stekloffproblem übertragen. Im Fall von symmetrischen Gebieten gelten ähnliche Sätze wie diejenigen von Pólya über symmetrische Membranen.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

BOHL, E.: Monotone Operatoren in halbgeordneten Räumen

Sei X ein reeller Vektorraum, welcher durch einen Archimedischen Kegel K mit Ordnungseinheiten halbgeordnet sei. Jede Ordnungseinheit definiert dann auf X eine Norm.

Wir haben lineare Aufgaben der Form $x = (A_1 - A_2)x + b$ betrachtet mit linearen monotonen Operatoren A_1, A_2 auf X. Dazu ergibt sich ein Konvergenzsatz für das Iterationsverfahren mit einer allgemeinen Fehlerabschätzung, welche eine Reihe bekannter Fälle im R^n umfaßt. Außerdem erhält man Aussagen über Eigenwerte und einen "Quotientensatz" für monotone Operatoren.

DIRSCHMID, H.: Zur Einschließung der Eigenwerte normaler vollstetiger Operatoren in separablen Hilberträumen

Die Einschließung der absoluten Beträge der Eigenwerte eines vollstetigen Operators T in einem separablen Hilbertraum H wird auf die Aufgabe zurückgeführt, den absoluten Betrag des kleinsten Eigenwertes eines vollstetigen normalen Operators nach oben und unten abzuschätzen. Mit Hilfe der Orthogonalinvarianten des Operators T werden Einschließungsaussagen abgeleitet, und es wird ein Satz über die numerische Bestimmung der Vielfachheit angegeben. Durch Bildung des zu T assoziierten Operators vom Grade n in geeignet konstruierten Hilberträumen gelingt es, ein Einschließungsintervall für den n-ten Eigenwert von T zu bestimmen.

TROESCH, B.A.: Isoperimetrische Fragen bei Wasserwellen und Membranen

Isoperimetrische Probleme der folgenden Art werden betrachtet:

1. Wasserwellen in einem untiefen Behälter mit vorgeschriebener

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Oberfläche und festem Voluminhalt. Es wird gezeigt, für welche konvexe Behälterform die höheren Frequenzen der Bewegung am größten sind. (Gewöhnliche Differentialgleichung)

2. Oberschwingungen von Membranen
a) mit vorgeschriebenem Umfang oder
b) Oberfläche.
Der Charakter der Randkurve (Analytizität) stellt für b) eine ungelöste Frage dar. (Partielle Diff.Gl.)

3. Bei Wasserwellen in allgemeinen (d.h. tiefen) Behältern wird die Behälterform mit der größten Grundfrequenz gesucht. Nur für genügend kleine Eigenwerte ist das Verhalten der Lösung am Rande abgeklärt. (Part. Diff.Gl. mit Eigenwert in Randbed.)

In allen drei Fällen sind numerische Näherungswerte (oder Schranken) vorhanden.

KRAWCZYK, R.: <u>Schranken für Eigenlösungen reeller Matrizen</u>

Im ersten Teil werden mit Hilfe einer Intervallarithmetik Schranken für reelle Eigenlösungen quadratischer Matrizen ermittelt. Als Daten benötigt man Näherungswerte eines Eigenwertes und des dazugehörenden Eigenvektors. Als Ergebnis erhält man einen Intervallvektor, welcher die exakte Eigenlösung enthält.

Im zweiten Teil wird ein iteratives Verfahren angegeben, mit dem die oben gewonnenen Schranken verbessert werden können.

SCHOCK, E.: <u>Kompakte Operatoren in (M)-Räumen</u>

Ein tonnelierter Raum E ist ein (M)-Raum, wenn alle beschränkten Teilmengen von E relativkompakt sind. Seien U und V absolutkonvexe Nullumgebungen von E, dann ist

$\delta_n(V,U) = \inf\{\delta > o,\ V \subset \delta U + E_n,\ E_n \subset E,\ \dim E_n \leq n\}$

$T: E \dashrightarrow E$ kompakt $\Longleftrightarrow \exists\ U$ mit $\overline{T(U)}$ kompakt.

Es wird gezeigt:

Ist T verwandt mit einem kompakten Operator S eines Hilbertraumes H und sind $\mu_n(S)$ die Eigenwerte von $(S^*S)^{1/2}$, so gilt für alle Nullumgebungen V mit $V \subset U$

$$\sup_n \delta_n(V,U)^{-1} \mu_n(S) < \infty.$$

Sind $\lambda_n(T)$ die Eigenwerte von T, so gilt für alle natürlichen Zahlen m, alle $p > o$ und ein $c > o$

$$\sum_{n=o}^{m} |\lambda_n(T)|^p \leq \sum_{n=o}^{m} \mu_n(S)^p \leq c \sum_{n=o}^{m} \delta_n(V,U)^p.$$

Ist T verwandt mit einem symmetrischen Operator S in einem Hilbertraum, so gilt

$$\sup_n \delta_n(V,U)^{-1} |\lambda_n(T)| < \infty.$$

"T verwandt mit S": siehe A. PIETSCH, Zur Fredholmschen Theorie in lokalkonvexen Räumen, Studia Math. 22 (1963).

McLAURIN, J.W.: <u>Approximation von Eigenwerten und Eigenfunktionen eingespannter Platten</u>

Es wird über ein Verfahren zur Berechnung von oberen und unteren Schranken für die Eigenwerte einer eingespannten Platte beliebiger Form berichtet. Die Methode besteht darin, exakte Partikulärlösungen der Plattengleichung ($\Delta^2 u = \lambda u$) zu konstruieren, welche die Randbedingungen des Plattenproblems approximativ erfüllen. Der Abstand zwischen dem Eigenwert der Partikulärlösung und einem Eigenwert des Plattenproblems kann dann mit Hilfe eines Lemmas von MOLER und PAYNE abgeschätzt werden. Ein weiteres Resultat derselben Autoren ermöglicht ferner die Abschätzung des L_2-Abstandes

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

der Partikulärlösung von einer Eigenfunktion. Es werden numerische Resultate für quadratische und elliptische Platten mitgeteilt.

NIXDORFF, K.: <u>Die SCHAEFERsche Theorie, eine Hilfe für den Ingenieur</u>

Bei einer bestimmten Klasse zweiparametriger Eigenwertaufgaben kann der Verlauf der Eigenwertkurven mit der Schaeferschen Theorie abgeschätzt werden. Für die Bedürfnisse des Ingenieurs genügt dann bei vielen dieser Aufgaben das Durchrechnen von zwei einparametrigen Eigenwertaufgaben anstelle der ursprünglichen Aufgabe. Dadurch ergibt sich eine große Einsparung an Rechenzeit.

Im Vortrag wurde die Schaefersche Theorie erläutert und ihre Anwendung an einem technischen Beispiel vorgeführt.

GRIGORIEFF, R.D.: <u>Konvergenz des Eigenwertproblems gewöhnlicher Differentialgleichungen</u>

Es wird die Konvergenz einer umfangreichen Klasse von Differenzenapproximationen des allgemeinen Eigenwertproblems linearer regulärer gewöhnlicher Differentialgleichungen m-ter Ordnung, $m \geq 1$, untersucht, in der z.B. die in den Büchern von BABUŠKA-PRÁGER-VITÁSEK, COLLATZ und FOX angegebenen Verfahren enthalten sind. Unter der Voraussetzung der Konsistenz der Approximation und einer Stabilitätsbedingung für den Differenzenoperator, der den Differentialquotienten m-ter Ordnung approximiert, wird die Konvergenz der Eigenwerte der algebraischen Vielfachheit nach bewiesen. Bei geeigneter Normierung konvergieren auch die Eigenfunktionen einschließlich der Differenzenquotienten bis zur Ordnung m-1 gleichmäßig. Es wird gezeigt, daß die Konvergenzordnung der Eigenfunktionen (bzw. Eigenwerte) mindestens gleich (bzw. mindestens gleich der n-ten Wurzel aus)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

dem Abschneidefehler ist, wobei n die Ordnung des Pols der Resolvente des approximierten Problems an der Stelle des Eigenwerts ist.

LEIPHOLZ, H.: Über die Berechnung von Eigenwerten bei nichtselbstadjungierten Problemen mit Hilfe eines verallgemeinerten Rayleigh-Quotienten

Der Rayleigh-Quotient ist für selbstadjungierte Probleme wohlbekannt. Bei Volldefinitheit ist der kleinste Eigenwert sein Minimum. Auf dieser Tatsache bauen die bekannten Rechenverfahren zur näherungsweisen Eigenwertbestimmung auf.

Für ein nichtselbstadjungiertes Problem kann man mit Hilfe des adjungierten einen entsprechenden Quotienten herstellen, der für die Eigenwerte zwar nicht unbedingt extremal, aber doch stationär wird. Darauf lassen sich Rechenverfahren wie beim klassischen Fall gründen, die dann auch bei einigen praktisch wichtigen Aufgaben erfolgreiche Anwendung finden.

HADELER, K.P.: Verallgemeinerte Eigenwertaufgaben

1. Nichtlineare Eigenwertaufgaben.

Sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbertraum und $\mathfrak{G}$ der reelle lineare Raum der beschränkten symmetrischen Operatoren. Sei $(c, d) \subset \mathbb{R}$ und $T: (c, d) \to \mathfrak{G}$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Die Ableitung heiße T'. Sei $p: \mathfrak{H} - \{o\} \to W \subset (c, d)$ ein stetiges Funktional mit $p(\alpha x) = p(x)\ \forall \alpha x \neq o$. T und p sind durch $(T(p(x))x, x) = o$, $(T'(p(x))x, x) > o$ verbunden. Es werden Aussagen über das Spektrum $\sigma(T) = \{\alpha \in \bar{W},\ o \in \sigma(T(\alpha))\}$ gesucht. Unter einigen Stetigkeits- und Kompaktheitsvoraussetzungen lassen sich die klassischen Extremalprinzipien (Rayleigh, Weyl-Courant, Poincaré-Ritz) sowie die Einschließungsprinzipien von Temple, Krylov-Bogoljubov u.a. übertragen.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

2. Mehrparametrige Eigenwertaufgaben.

Verschiedene Typen von zweiparametrigen Aufgaben werden benutzt, um die komplexen Eigenwerte reeller Matrizen sowie bei der Untersuchung dynamischer Instabilität auftretende "Pseudoeigenwerte" zu berechnen.

BÖRSCH-SUPAN, W.: Numerische Fragen beim allgemeinen Eigenwertproblem

Für das Eigenwertproblem des Paares symmetrischer Matrizen D, C mit positiv (semi-)definitem, nahezu singulärem C wird unter gewissen Voraussetzungen nachgewiesen, daß "große" Eigenwerte existieren, die "nicht-großen" gut konditioniert sind und daß die Überführung in ein "spezielles" Problem mittels Cholesky-Zerlegung von C und dessen Weiterbehandlung durch geeignete Pivotstrategie numerisch stabil ausgeführt werden kann.

SCHNEIDER, A.: Singuläre S-hermitesche Differentialgleichungssysteme im Normalfall

Auf einem beliebigem Intervall der reellen Achse wird ein reelles System der Form

$$C_1(x)\,y'(x) + D_1(x)\,y(x) = \lambda\{C_2(x)\,y'(x) + D_2(x)\,y(x)\}$$

betrachtet, das im Sinne der Theorie S-hermitescher Randeigenwertprobleme ein S-hermitesches, rechtsdefinites und normales System im Normalfall ist. Hierfür kann die Kodairasche Theorie für gewöhnliche reelle selbstadjungierte Differentialgleichungen übertragen werden. Speziell für Nullflächen $\mathfrak{N}_a(\lambda)$ und $\mathfrak{N}_b(\lambda)$ in den Grenzgebilden $\mathfrak{R}_a(\lambda)$ und $\mathfrak{R}_b(\lambda)$ mit $\overline{\mathfrak{N}_b(\lambda)} = \mathfrak{N}_b(\bar{\lambda})$ und $\overline{\mathfrak{N}_n(\lambda)} = \mathfrak{N}_n(\bar{\lambda})$, deren Existenz durch die Matrixnotierung leicht zu bestäti-

gen ist, läßt sich auf dem Raume der stückweise glatten Vektoren mit endlicher Norm eine Resolvente R_λ definieren, die die Bedingungen

$$\| R_\lambda \| \leq \frac{1}{|\psi m \lambda|}$$

$$(R_\lambda u, v) = (u, R_{\bar{\lambda}} v)$$

erfüllt. Erzeugt man R_λ zu sogenannten charakteristischen Nullflächen, die durch reelle (getrennte) selbstadjungierte Randbedingungen definiert werden, so gilt auch die Hilbertrelation

$$R_{\lambda_1} = R_{\lambda_2} + (\lambda_2 - \lambda_1) R_{\lambda_1} R_{\lambda_2} .$$

Im Falle der Existenz von $R'_{\bar{\lambda}}$ erhält man in $R'_{\bar{\lambda}} + \lambda E$ einen selbstadjungierten Operator, für den dann die übliche Spektraltheorie anwendbar wird. Im übrigen ergibt sich aus der Theorie noch ein geometrischen Analogon zum zweiten Weylschen Satz.

I. Kupka (Hamburg)