MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 21/1968

Abstrakte Räume und Approximation

18.7. bis 27.7.1968

Im Juli 1968 fand in Oberwolfach eine Tagung über "Abstrakte Räume und Approximation" unter Leitung von Prof.P.L.Butzer (Aachen) und Prof.B.Sz.-Nagy (Szeged) statt. Insgesamt 49 Mathematiker aus 13 Ländern, darunter 19 zum ersten Mal, nahmen an dieser Tagung teil, die dem Andenken an Jean Favard gewidmet war. Dies kam in einem besonderen Vortrag über sein Leben und Werk zum Ausdruck, der von Prof.G.Alexits gehalten wurde. 39 Vorträge gaben einen Überblick neuester Ergebnisse und Forschungen über abstrakte Räume und Approximationstheorie. In einer weiteren Sitzung kamen neue und ungelöste Probleme aus diesen Gebieten zur Sprache. Neben dem umfangreichen Tagungsprogramm hatten die Teilnehmer auch im persönlichen Gespräch Gelegenheit zu Austausch von Meinungen und Informationen.

Die vollständig ausgearbeiteten Vorträge werden demnächst in der Serie "International Series of Numerical Mathematics" des Birkhäuser Verlags erscheinen.

Teilnehmer

G.Alexits, Budapest
H.Amann, Freiburg
H.Berens, Aachen
J.Blatter, Austin (Texas)
T.K.Boehme, Santa Barbara (Calif.)
B.Brosowski, München
P.L.Butzer, Aachen
J.L.B.Cooper, London
Ph.C.Curtis, jr.,Los Angeles
R.G.Douglas, Ann Arbor (Mich.)
E.Görlich, Aachen
M.von Golitschek, Würzburg
H.Günzler, Göttingen
P.R.Halmos, Ann Arbor (Mich.)
H.P.Helfrich, Freiburg
R.A.Hirschfeld, Nijmegen
I.I.Hirschman, St.Louis (Mo.)
H.Johnen, Aachen
J.P.Kahane, Paris
J.Korevaar, La Jolla (Calif.)
H.Lange, Freiburg
L.Leindler, Szeged
J.Löfström, Lund
G.G.Lorentz, Syracuse(N.Y.)
P.Masani, Bloomington (Ind.)
M.W.Müller, Stuttgart
B.Sz.-Nagy, Szeged
R.O'Neil, Albany (N.Y.)
R.J.Nessel, Aachen
J.A.Nitsche, Freiburg
A.M.Ostrowski, Basel
Pia Pfluger, Zürich
R.S.Phillips, Stanford
Elena Popoviciu, Cluj
T.Popoviciu, Cluj
Th.J.Rivlin, Yorktown Heights (N.Y.)
P.G.Rooney, Toronto (Ont.)
P.O.Runck, Clausth.-Zellerfeld
K.Scherer, Aachen
R.B.Schnabl, Wien
H.S.Shapiro, Ann Arbor (Mich.)
A.Sharma,Edmonton (Alberta)
I.Singer, Bucarest
E.Stark, Aachen
G.Sunouchi, Sendai
W.Trebels, Aachen
W.Walter, Karlsruhe
U.Westphal, Aachen
K.Zeller, Tübingen

Gefördert durch
DFG Deutsche
Forschungsgemeinschaft

ALEXITS, G.: Jean Favard in Memoriam

Eine zusammenfassende Betrachtung des Lebenslaufes und der wissenschaftlichen Tätigkeit J. Favard's.

ALEXITS, G.: Über die Charakterisierung von Funktionsklassen mit bester linearer Approximation

Bezeichne B einen Banachraum, C eine Menge aus B und $\{y_\nu\}$ ein geordnetes System von Elementen. Wir setzen

$$E_n^{(B)}(C, \{y_\nu\}) = \sup_{x\in C} \inf_{a_{nk}} \| x - \sum_{k=1}^{n} a_{nk} y_k \|_B \quad .$$

Bezeichne nun $C(\{E_n\},\{y_\nu\})$ die Menge aller Elemente $x\in B$, deren beste lineare $\{y_\nu\}$-Approximation $\leq E_n$ ist, wobei $\{E_n\}$ eine monoton gegen Null konvergente Zahlenfolge bedeutet. C heißt charakterisierbar durch $\{y_\nu\}$-Approximation, wenn es ein $\{E_n\}$ und eine absolute Konstante K gibt derart, daß es gilt: $C(\{KE_n\}, \{y_\nu\}) \subset C \subset C(\{E_n\}, \{y_\nu\})$. Sei B in einem Hilbert Raum H enthalten und es gelte $\|x\|_B \geq$ Konst. $\|x\|_H$ für alle $x\in B$. Das Hauptresultat der Arbeit kann etwa wie folgt zusammengefaßt werden. Bezeichne $E_n^{(B)}(C) = \inf_{\{y_\nu\}} E_n^{(B)}(C, \{y_\nu\})$, wo das Infimum für alle Folgen $\{y_\nu\} \subset B$ zu bilden ist. Man betrachte alle Zahlen $e_n > 0$, für welche $e_n \cdot y_k \in C$ $(k = 1,2,\ldots,2n;\ n = 1,2,\ldots)$ gilt und bezeichne $E_n^* = \sup e_n$.

Satz: Ist C abgeschlossen und charakterisierbar durch eine $\{y_\nu\}$-Approximation, wo $\{y_\nu\}$ ein beschränktes Orthonormalsystem ist, so gilt $\{E_n^*\} \approx \{E_n^{(B)}(C)\} \approx \{E_n^{(B)}(C, \{y_\nu\})\}$, d. h. alle drei Zahlenfolgen sind von derselben Größenordnung.

BERENS, H.: Über Approximationsprozesse auf Banachräumen

Sei X ein Banachraum mit Elementen f,g,... und Norm $\|\cdot\|$. Eine Familie $\mathcal{S} = \{S_\rho : \rho > 0\}$ von kommutativen, beschränkten linearen Operatoren auf X in sich mit der Eigenschaft

$$\|S_\rho f\| \leq M\|f\| \qquad (\text{glm. in } \rho > 0;\ f\ X)$$
$$\lim_{\rho\to\infty} \|S_\rho f - f\| = 0 \qquad (f\in X)$$

heißt ein Approximationsprozeß im starken Sinne an die Identität I in X für $\rho\to\infty$.

Es wird das Approximationsverhalten von $\mathcal{S}$ in X im Rahmen der Theorie der intermediären Räume untersucht unter der Einschränkung: Sei B ein abgeschlossener linearer Operator in X mit dichtem Definitionsbereich D(B) in X, welcher mit $\mathcal{S}$ folgenderweise verknüpft ist: (i) Es existiert ein $\gamma_o > o$, so daß $s\text{-}\lim_{\rho\to\infty} \rho^{\gamma_o}\{S_\rho f - f\} = B f\,(f\in D(B))$. (ii) $S_\rho[X] \subset D(B)$ $(\rho > o)$ und $\|B S_\rho f\| \leqslant N \rho^{\gamma_o} \|f\|$ $(\rho > o;\ f\in X)$.

Als eine Anwendung werden die Rieszmittel des Fourierumkehrintegrals betrachtet.

BOEHME, T.K.: Approximation of Continuous Functions

Let C_o be the space of continuous functions on $(-\infty, \infty)$ which vanish for $t < o$ and have zero in their support. Let f and g be any two functions in C_o and let $N > o$ and $\varepsilon > o$. Mikusiński has shown there always exists an integer K and real numbers α_i, β_i $i = 1,2,\ldots,K$, $\beta_i \geqslant o$ such that

$$\left|f(t) - \sum_{j=1}^{k} \alpha_i\, g(t-\beta_i)\right| < \varepsilon$$

for all t in $[-N,N]$.

A function $g\in C_o$ can be made positive by convolution if there is a $p_o \in C_o$ such that $g * p_o(t) \geqslant o$ for all t. We show that the conclusion " α_i real numbers" in Mikusinskis theorem can be strengthend to "$\alpha_i \geqslant o$" if and only if g cannot be made positive by convolution.

BROSOWSKI, B.: Nichtlineare Approximation in normierten Vektorräumen

Es sei R ein normierter Vektorraum und V eine nichtleere Teilmenge von R. Ein Element $v_o \in V$ heißt eine Minimallösung für ein Element $f\in R$ bezüglich V, wenn jedes Element $v\in V$ der Ungleichung $\|f - v_o\| \leqslant \|f - v\|$ genügt. Es wurde ein stets hinreichendes Kriterium für eine Minimallösung abgeleitet und bewiesen, daß dieses Kriterium dann und nur dann auch eine notwendige Bedingung ist, wenn die Menge der approximierenden Elemente eine Sonne bildet. Verschiedene Anwendungen und Beispiele wurden genannt, so auch ein stets notwendiges Kriterium für eine Minimallösung. Sowohl das stets notwendige als auch das stets hinreichende Kriterium sind eine Verallgemeinerung des Kolmogoroffschen Kriteriums aus der Theorie der Tschebyscheff-Approximation auf normierte Vektorräume.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

BUTZER, P.L., SCHERER, K.: Über Sätze von Bernstein, Jackson, Stečkin und Zamansky.

Die klassischen Approximationssätze von Jackson und Bernstein sowie die Sätze von Zamansky (1949) und Steckin (1951) über Polynome bester Approximation werden auf Banachräume übertragen und bewiesen. Dies geschieht im Rahmen der Theorie der intermediären Räume unter Verwendung von verallgemeinerten "Jackson"- und "Bernstein"-Ungleichungen, die von Peetre eingeführt wurden. Die gleichen Sätze werden auch für eine generelle Klasse von linearen Approximationsprozessen auf Banachräumen bewiesen, die modifizierte Formen von "Jackson"- und "Bernstein"-Ungleichungen genügen. Anwendungen finden diese Sätze für die Räume $C_{2\pi}$, $C(T_n)$, $L^p(T_n)$, $1 < p \leqslant \infty$ und $L^p(E_n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

COOPER, J.L.B.: Functional Equations for Linear Transformations

A map of a function space A(X) of functions defined on X to itself will be called appropriate if it is of the form $f(x) \to Q(x)f(Vx)$ where V is a map of X to itself. A group of such maps is called an appropriate group. A map T from a function space A(X) to a function space B(U) is said to obey an appropriate functional equation if there are appropriate groups $W(g)$, $W^*(g)$ so that $TW(g) = W^*(g)\,T$.

The appropriate functional equations when X and U are intervals of the real line and W, W^*, are representations of the additive real group are shown, under general assumptions, to reduce to four canonical forms. Solubility of these equations is discussed. Other groups will be considered briefly.

CURTIS, Ph.C. Jr.: Rational and Harmonic Approximation on Plane Setr.

Let K be a compact plane set. Let R(K) be the uniform closure of the rational functions with poles of $\complement K$ and A(K) be those continuous complex functions holomorphic on the interior of K. Let H(K) be the uniform closure of all functions of the form $\sum \alpha_i \log |z-z_i|$, α_i real and $z_i \notin K$, and let D(K) be those real functions continuous on K and harmonic at interior points. Recent results giving various conditions on K which imply on one hand that R(K) = A(K) and on the other hand that H(K) = D(K) were presented. Sufficient conditions in terms of capacity were given for points on the boundary of K to be peak points for the respective functions spaces. These conditions in terms of logarithmic capacity imply that R(K) = D(K), but the analogous

conditions in terms of analytic capacity are known to imply that $R(K) = A(K)$ only when the interior of K is empty.

DOUGLAS, R.G.: On Toeplitz and Wiener-Hopf Operators

We study Toeplitz operators T_ϕ on the Hilbert space H^2 for functions ϕ in $H^\infty + C$. The algebra $\mathfrak{A}$ generated by $\{T_\phi : \in H^\infty + C\}$ is shown to contain the ideal $\mathfrak{K}$ of compact operators and $\mathfrak{A}/\mathfrak{K}$ is shown to be naturally isometrically isomorphic to $H^\infty + C$. The operator T_ϕ is shown to be Fredholm iff ϕ is invertible in $H^\infty + C$. Necessary and sufficient conditions involving the harmonic extension of ϕ to the disk are found for the invertibility of ϕ in $H^\infty + C$ and the analytical index of T_ϕ is computed. Extensions of these results to the case of systems are obtained and for the corresponding class of Wiener-Hopf operators.

Analogous considerations enable us to study the Wiener-Hopf operators W_ϕ defined in H^2 of the upper half plane for ϕ an almost periodic function. The latter is joint work with L. Coburn.

GÖRLICH, E.: Distributional methods in saturation theory

Let $f(x) \in L^p(E^n)$, $1 < p < \infty$. R.J. Nessel proved by means of the Fourier transform method which was introduced by P.L. Butzer, that in $L^p(E^n)$, $1 < p \leq 2$, the generalized singular integral $W_t^\varkappa(f;x)$ $(\varkappa > 0;\ t > 0)$ of Weierstrass has the saturation order $O(t)\ (t \to 0+)$ and the saturation class

$$V_\varkappa^p = \{f(x) \in L^p(E^n);\ |v|^\varkappa f^\wedge(v) = g^\wedge(v),\ g(x) \in L^p(E^n)\}.$$

This result is extended to the spaces $L^p(E^n)$, $2 < p < \infty$, by using a distribution theoretical generalization of the Fourier transform method and a "dual" argument. Then the saturation class turns out to be the class of Bessel potentials

$$L_\varkappa^p = \{f(x) \in L^p(E^n);\ (1+|v|^2)^{\varkappa/2} f^\wedge = g^\wedge,\ g(x) \in L^p(E^n)\},$$

which is defined for $2 < p < \infty$ in terms of the Fourier transform of tempered distributions.

Using a Lemma of E.M. Stein one can show the equivalence of the conditions $f(x) \in V_\varkappa^p$ and $f(x) \in L_\varkappa^p$ for $1 < p \leq 2$. As the definition of $V_\varkappa^p$ cannot be extended immediately to $2 < p < \infty$, the space $L_\varkappa^p$ thus may be regarded as the extension of $V_\varkappa^p$ which is appropriate for the saturation theory.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Employing known results of Calderón, Stein, Nikolskiĭ, Aronszajn, Mulla and Szeptycki, Besov and Taibleson, several equivalent characterizations of the condition $f(x) \in L^p_\varkappa$ are obtained, in particular, in case $\varkappa = 1,2,\ldots,$ by means of ordinary Lipschitz- and differentiability conditions.

GOLITSCHEK, von, M.: Jackson-Sätze für Polynome $\sum_{i=o}^{s} a_i x^{p_i}$

Wir betrachten gleichzeitig die Ergebnisse von Ch. Müntz und D. Jackson im Raume $C[0,1]$ mit der Norm $\| f \| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Es stellt sich die Frage, ob nicht den Jackson-Sätzen entsprechend asymptotische Aussagen für

$$\tilde{E}_s(f; \{p_i\}) := \min_{a_i}(\max_{x\in[0,1]} | f(x) - \sum_{i=o}^{s} a_i x^{p_i}|)$$ gelten.

Wir charakterisieren die Exponentenfolge $\{p_i\}$ durch die Größen

$$\Delta := \liminf_{n\to\infty} \left(\sum_{0<p_i\leq n} 1/p_i \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} 1/i \right)$$

$$\tilde{\Delta} := \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{0<p_i\leq n} 1/p_i \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} 1/i \right)$$

und machen die drei Voraussetzungen 1) $0 = p_o < p_1 < p_2 < \ldots ; \in \mathbb{R}$; 2) Es existiere ein $\Lambda > o$, so daß für $i = 0,1,2,\ldots$ stets $p_{i+1} - p_i \geq \Lambda$; 3) $\Delta > o$. Dann erhalten wir für jedes $\varepsilon > o$ und für $s \to \infty$:

<u>Hauptsatz:</u> Sei $f \in C^k[0,1]$, $k \geq o$, $f^{(k)} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$. Dann ist

I) für $\tilde{\Delta} \leq 1/2$: $\tilde{E}_s(f;\{p_i\}) = (p_s)^{\varepsilon} \cdot \mathcal{O}\left((p_s)^{-2\Delta\min\{k+\alpha,\, q^*\}}\right)$;

II) für $\tilde{\Delta} > 1/2$: $\tilde{E}_s(f;\{p_i\}) = (p_s)^{\varepsilon} \cdot \mathcal{O}\left((p_s)^{-\min\{\frac{\Delta}{\tilde{\Delta}}(k+\alpha),\, 2\Delta q^*\}}\right)$.

$$\text{Dabei ist } q^* := \begin{cases} \min \mathcal{Q}^*;\ \mathcal{Q}^* = \{q \in \mathbb{N} \mid q \leq k,\ q \notin \{p_i\},\ f^{(q)}(o) \neq 0\} ; \\ +\infty \quad , \text{ falls } \mathcal{Q}^* = \emptyset \text{ leer ist} . \end{cases}$$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

GÜNZLER, H.: Abstrakte fastperiodische Differentialgleichungen

Ist A der infinitesimale Erzeuger einer einparametrigen, "fastperiodischen" Gruppe beschränkter linearer Transformationen in einem uniform konvexen Banachraum und u Lösung von

$$\dot{u} = Au + f$$

mit Stepanoff - fastperiodischem f, so wird gezeigt, daß u fastperiodisch ist, sobald es auf einer relativ dichten Menge auf $(-\infty, +\infty)$ beschränkt bleibt. Dies umfaßt als Spezialfall einen Satz von Amerio über Lösungen der inhomogenen Wellengleichung.

HALMOS, P.R.: Invariant subspaces

A (closed) subspace M of a (complex) Hilbert space H is invariant under a (bounded linear) operator A on H in case $AM \subset M$. The set of all subspaces invariant under a set $\mathfrak{A}$ of operators is a complete lattice containing $\{0\}$ and H (Lat $\mathfrak{A}$); the set of all operators that leave invariant a set L of subspaces is a weakly closed algebra containing 1 (Alg L).
Always $\mathfrak{A} \subset \text{Alg Lat}\,\mathfrak{A} \subset \text{Max}$, $L \subset \text{Lat Alg}\,L \subset \text{Max}$, (where Max denotes the algebra of all operators or the lattice of all subspaces). If the lower inclusion is an equality, the algebra (or lattice) is reflexive; if the upper one is an equality, it is transitive.
The main problems of invariant subspace theory are to find and characterize all reflexive and transitive algebras and lattices.

Typical recent results: a commuting algebra of normal operators is reflexive (Sarason); if Lat $\mathfrak{A}$ is a chain and $\mathfrak{A}$ includes a maximal abelian self-adjoint algebra, then $\mathfrak{A}$ is reflexive (Arveson, Radjavi - Rosenthal); a complete chain of subspaces is reflexive (Ringrose); a complete atomic Boolean algebra of subspaces is reflexive (Halmos).

6

The "classical" approach to the invariant subspace problem is to determine Lat for certain algebras , or, at least, to show that it is not equal to Min (= { {0}, H}), Typical results here concern compact operators (von Neumann - Aronszajn - Smith), polynomially compact operators (Bernstein - Robinson), and "limit polynomially compact operators" (Arveson - Feldman); compact perturbations of Hermitian operators (Livshitz, Schwartz); the unilateral shift (Beurling); and indefinite integration (Brodskii, Donoghue, Kalisch).

HIRSCHFELD,R.A.: A non-unitary version of Stone's Theorem

Let G be a locally compact abelian group, E a quasi-complete locally convex vector space and $\rho : s \to U_s$ a continuous linear representation of G into E. On putting $U_f = \int f(x)U_s ds$, $f \in \mathcal{K}(G)$ (= space of all continuous compact functions on G, normed by $\|f\| = \|\hat{f}\|_\infty$), ρ is lifted from G to $\mathcal{K}(G)$. Let $E_\rho \subset E$ stand for the subspace of all $x \in E$ for which the "orbit" $B_x = \{U_f x : \|f\| \leq 1\}$ is bounded and put $p_\rho(x) = \sup\{p(y) : y \in B_x\}$ for every continuous semi-norm p on E. In this way, E_ρ is equipped with a locally convex topology τ_ρ. The decisive property of the spectral subspace (E_ρ, τ_ρ) is that $s \to \langle U_s x, x' \rangle$ is a Fourier-Stieltjes transform for $x \in E_\rho$ and $x' \in (E_\rho, \tau_\rho)'$. If E is semi-reflexive, there is a Borel spectral measure P from $\hat{G}$ to (E_ρ, τ_ρ) such that

$$U_s = \int (s,\lambda)\, dP(\lambda) \quad \text{on } E_\rho .$$

Functorial properties and applications.

HIRSCHMAN, JR., I.I.: Finite Section Wiener Hopf Equations

Let $\nu(k)$ satisfy the conditions $\nu(k) \geq 1$, $\nu(k+j) \leq \nu(k)\nu(j)$ for all integers j and k. The set G_ν of those complex functions f for which $\|f\| = \sum |f(k)|\nu(k)$ is finite constitute, as is well known, a Banach algebra with unit if convolution is used for multiplication. For $f \in G_\nu$ we set $E^+(n)f(k)$ equal to f(k) if $k \geq n$ and to 0 otherwise;

similarly $E^-(n)f(k)$ is $f(k)$ if $k \leq n$, and is 0 otherwise. For $c \in G_\nu$ fixed we define the Wiener-Hopf operators

$$W^+(\infty)f = E^+(0)c*f \ , \quad f \in E^+(0)G_\nu \ , \quad W^-(\infty)f = E^-(0)c*f \ , \quad f \in E^-(0)\ G_\nu \ .$$

We also define the finite section Wiener-Hopf operators

$$W^+(n)f = E^+(0)E^-(n)c*f \qquad f \in E^+(0)E^-(n)G_\nu \ ,$$
$$W^-(n)f = E^-(0)E^+(-n)c*f \qquad f \in E^-(0)E^+(-n)G_\nu \ .$$

In 1963 Glen Baxter, <u>Illinois Jour. Math.</u>, 7(1963), pp. 97-103, proved that if $W^+(\infty)$ and $W^-(\infty)$ are invertible there exists a constant A and an integer N such that $\| W\ (n)^{-1}\|$, $\| W\ (n)^{-1}\| \leq A$ for $n \geq N$. It is my intention to survey the subsequent development of this "finite section" inequality.

KAHANE, J.P.: <u>Approximation uniforme par des caractères: ensembles de Kronecker, ensembles de Dirichlet</u> .

Soit E un compact sur la droite. C'est un ensemble de Dirichlet si $\liminf_{\lambda\to\infty} \| 1 - e^{i\lambda x} \|_{C(E)} = 0$. C'est un ensemble de Kronecker si, pour toute fonction f continue et de module 1 sur E, $\liminf_{\lambda\to\infty} \| f - e^{i\lambda x} \|_{C(E)} = 0$.

On indique quelques proprietés de ces ensembles, et des procédés de construction. La condition $N_\varepsilon(E) = o\ (\log \frac{1}{\varepsilon})\ (\varepsilon \to 0)$, où $N_\varepsilon(E)$ est le nombre minimum d'intervalles de longueur ε recouviant E, entraine que E est un ensemble de Dirichlet, et par suite un ensemble d'unicité.

Question ouverte: un ensemble de Dirichlet indépendant sur les rationnels est-il necessairement de Kronecker?

KOREVAAR, J.: A. Approximation by linear combinations of monomials $s^m t^n$.

It is an old problem to obtain meaningful extensions of the Müntz-Szász theorem to the case of two (or more) variables. Let I^2 be the unit square $0 \leq s, t \leq 1$, and $C_0(I^2)$ the subspace of $C(I^2)$ consisting of the functions that vanish where st does. One question is for which sets Ω of points (m,n) with positive integral coordinates the corresponding set of monomials $A = \{s^m t^n \mid (m,n) \varepsilon \Omega\}$ spans $C_0(I^2)$. This problem is related to the question of sets of uniqueness Ω for bounded analytic functions $f(z,w)$. Recent joint work with S. Hellerstein shows that A is a spanning set whenever Ω has positive upper density. Other results have been obtained, but many questions remain.

B. Approximation by potentials of distributions of unit masses.

Let D be an open set in the plane with connect~~ing~~ed complement. One may ask which harmonic functions in D can be approximated (uniformly on compact subsets) by potentials of distributions of unit masses on ∂D. It is known that all harmonic functions can be so approximated when D is connected and bounded (G. R. MacLane, Korevaar) or connected and unbounded, and contained in, but not containing, a half-plane (Korevaar's student J. Elkins). What can one say when D is not connected? For example, let C_1 and C_2 be mutually exterior analytic Jordan curves, D the union of their interiors. In this case the class of approximable harmonic functions depends on, and can be described in terms of, the arithmetic character of the number $\bar{\omega} = \omega(\infty)$, where $\omega(z)$ is the harmonic measure of C_1 relative to the exterior of D (joint work with C. Chui).

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

LEINDLER, L.: Strong summability of Fourier series

It is well known that $f(x) \in \mathrm{Lip}\ 1$, then we have only the approximation $f(x) - \sigma_n(x) = \mathcal{O}\left(\frac{\log n}{n}\right)$ $\left(\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=o}^{n} s_k(x)\right)$ but for the conjugate function $\tilde{f}(x) - \tilde{\sigma}_n(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ holds. In connection with these results P. L. Butzer raised the problem: Does, for all $f(x) \in \mathrm{Lip}\ 1$,

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=o}^{n} |\tilde{s}_k(x) - \tilde{f}(x)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

hold? Alexits and Leindler proved that this is not the case, namely there exists a function $f(x) \in \mathrm{Lip}\ 1$ such that

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=o}^{n} |\tilde{s}_k(o) - \tilde{f}(o)| \geqslant c\,\frac{\log n}{n}$$

with $c > o$.

About this poblem we present some more general theorems, considering the means

$$\left\{ \frac{1}{(n+1)^{\beta}} \sum_{k=o}^{n} (k+1)^{\beta-1} |s_k(x) - f(x)|^p \right\}^{1/p} \qquad (p, \beta > o)$$

if $f^{(r)}(x) \in \mathrm{Lip}\ \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$.

LÖFSTRÖM, J.: On the rate of convergence of some difference schemes for parabolic initial value problems with constant coefficients.

Let $E(t)f$ be the solution of the initial value problem $(\partial/\partial t + P(D))u(x,t) = o$, $t > o$; $u(x,o) = f(x)$, $(x \in \mathbb{R}^d)$. Here $P(\xi)$ is homogenous of order m and positive for $\xi \neq o$. Denote by $E_h(t)f$ the solution of a corresponding (esplicit or implicit) difference scheme with constant coefficients, $(t = Nk,\ k = \lambda h^m,\ N = 1,2,\ldots)$, which is stable in $L_p = L_p(\mathbb{R}^d)$. Suppose that $(E_h(t)f)^\wedge(\xi) = \exp(-tP_h(\xi))f^\wedge(\xi)$ if

$\hat{f}$ vanishes outside $h|\xi| < \varepsilon_o$ and that $P_h(\xi)$ approximates $P(\xi)$ with order exactly s in the sense that

$$P_h(\xi)-P(\xi)=h^s|\xi|^{m+s}Q(h\xi), \text{ where for all } \beta, |D^\beta Q(\eta)| \leq C_{\beta}, o<|\eta|<\varepsilon_o$$

and $|Q(\eta)| \geq Q_o > o$, $o < |\eta| < \varepsilon_o$. Then holds

<u>Theorem:</u> i) $\sup\limits_{t=Nk} \| E_h(t)f-E(t)f \|_{L_p} = o(h^s)$ implies $f=o$,

ii) $\sup\limits_{t=Nk} \| E_h(t)f-E(t)f \|_{L_p} = \mathcal{O}(h^\sigma)$ if and only if $f \in B_p^{\sigma,\infty}$ $(o<\sigma \leq s)$.

The space $B_p^{\sigma,\infty}$ is a Besov space, which by a result by J. Peetre can be defined by the norm

$$\| f \|_{B_p^{\sigma,\infty}} = \| f \|_{L_p} + \sup_{-\infty < n < +\infty} 2^{n\sigma} \| \phi_n * f \|_{L_p},$$

where $\hat{\phi}_n(\xi) = \hat{\phi}(2^n\xi)$, support $\hat{\phi} = \{2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$ and $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_n(\xi) = 1$, $\xi \neq o$. The proof makes use of the concept of local Fourier multipliers on L_p, a technique that can also be applied to convergence problems for singular integrals on $L_p(\mathbb{R}^d)$.

LORENTZ, G.G.: <u>Interpolation Theorems for Operators</u>

Sei ϕ eine positive abnehmende Funktion auf (0,1). Der Raum $\Lambda(\phi)$ besteht aus allen messbaren Funktionen f auf (0,1) mit $\| f \|_\phi = \int_0^1 \phi f^* dx < \infty$, wo f^* die abnehmende Umordnung von $|f|$ bedeutet. Für drei Paare von Räumen $\Lambda(\phi_i)$, $\Lambda(\psi_i)$, $i = 1,2$, $\Lambda(\phi)$, $\Lambda(\psi)$ wird die Frage beantwortet, ob es richtig sei, daß jeder lineare Operator mit Norm ≤ 1 aus $\Lambda(\phi_i)$ nach $\Lambda(\psi_i)$, $i = 1,2$, sich zu einem linearen Operator mit Norm ≤ 1 aus $\Lambda(\phi)$ nach $\Lambda(\psi)$ erweitern läßt. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen werden angegeben. Die wichtigste unter ihnen: $\min\limits_x \{\Phi_1(x)/\Psi_1(y), \Phi_2(x)/\Psi_2(y)\} \leq \Phi(x)/\Psi(y)$, $0 < x, y \leq 1$, wo $\Phi_1(x) = \int_0^x \phi_1(t)\, dt$, usw. bedeutet. Das wichtige Werkzeug des Beweises ist eine neue Relation $g \prec f$. Sie bedeutet, daß es zu jeder Zerlegung $f = f_1 + f_2$ von f eine solche von g, $g = g_1 + g_2$ gibt, für die $\| g_i \|_{\psi_i} \leq \| f_i \|_{\phi_i}$, $i = 1,2$.

MASANI, P.R.: Explicit form for the Fourier-Plancherel transform over locally compact abelian groups.

Let X be a l.c.a. group with Borel family $\mathfrak{B}$, and $\hat{X}$, $\hat{\mathfrak{B}}$ be the dual entities. Let μ be a Haar measure on $\mathfrak{B}$, and $\hat{\mu}$ be the unique Haar measure on $\hat{\mathfrak{B}}$ given by the Inversion Thm. for $L_1(X,B,\mu)$. Let $H = L_2(X,B,\mu)$, $\mathfrak{B}_0 = \{B : B \in \mathfrak{B} \& \mu(B)<\infty\}$ and define $\hat{H}$, $\hat{\mathfrak{B}}_0$ simelarly. Write $[x,\alpha] = \alpha(x)$, $x \in X \& \alpha \in \hat{X}$.
We introduce the set functions

$$\xi_{\hat{B}}(x) = \int_{\hat{B}} \overline{[x,\alpha]}\, \hat{\mu}(d\alpha), \qquad \eta_B(\alpha) = \int_B \overline{[x,\alpha]}\, \mu(dx), \quad x \in X, \quad \alpha \in \hat{X}, B \in \mathfrak{B}, \hat{B} \in \hat{\mathfrak{B}}$$

We show that ξ is a H-valued countably additive, orthogonally, scattered measure (c.a.o.s. measure) which spans H, and η is a $\hat{H}$-valued c.a.o.s. measure which spans $\hat{H}$.

It follows that the correspondence $V : f \to \int_X f(x)\, \eta_{dx}$ is a unitary operator on H onto $\hat{H}$, and that for all $g \in \hat{X}$, $V^*(g) = \int_{\hat{X}} g(\alpha)\, \xi_{d\alpha}$. V is the Fourier-Plancherel transform, and V^* is its inverse. Known results concerning V & V^* follow readily from these explicit formulae. But some new results are also suggested pertaining to the case in which X, $\hat{X}$ have the Lebesgue property.

MÜLLER, M.W.: Über die Approximation durch Gammaoperatoren

Die Gammaoperatoren sind eine Folge linearer positiver Integraloperatoren, die in einer gewissen Analogie zu den bekannten Operatoren von Bernstein, Meyer-König und Zeller, sowie Szász-Mirakyan konstruiert sind. Alle diese Operatoren hängen formal zusammen mit Limitierungsverfahren und Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Der Name Gammaoperator rührt daher, daß als Kern des Integraloperators G_n die Dichtefunktion der Gammaverteilung verwendet wird. Das zugehörige Limitierungsverfahren ist das von Meyer-König eingeführte T'_a- Verfahren zur Limitierung von Funktionen, das auf einer Integraltransformation mit demselben Kern beruht.
Es wird die Approximation von Funktionen mit beschränkter Variation untersucht und die Nicht-Konkavität 1.Ordnung stetiger Funktionen mit Hilfe gewisser Monotonieeigenschaften der Folge ihrer G_n-Bilder charakterisiert.

SZ.-NAGY, B.: Kontraktionen des Hilbertschen Raumes von der Klasse C_0

Die Kontraktion T des Hilbertraumes heißt von der Klasse C_0, falls sie keinen unitären Bestandteil besitzt und es eine Funktion $u(x) = \sum_0^\infty c_n \lambda^n \in H^\infty$, $u(\lambda) \not\equiv 0$, gibt mit

(*) $$u(T) = 0 .$$

[H^∞ ist die Klasse der in der Einheitsscheibe holomorphen, beschränkten Funktionen; u(T) wird als

$$u(T) = \lim_{r \to 1-0} \sum_0^\infty c_n r^n T^n$$

definiert, wobei der Limes im starken Sinne existiert.]

Z. B. gehören alle Kontraktionen T für die das Spektrum die Einheitsscheibe nicht bedeckt und $L - T^* T$ endliche Spur hat, zur Klasse C_0.

Für $T \in C_0$ gibt es eine "Minimalfunction" $m_T(\lambda)$, d.h. eine "innere" Funktion ($|m_T(e^{it})| = 1$ f.ü.) mit $m_T(T) = 0$ und mit der Eigenschaft, daß alle Funktionen $u \in H^\infty$ für die (*) gilt, sind Vielfachen (in H^∞) von $m_T(\lambda)$.

Die Minimalfunktion spiegelt die Spektraleigenschaften von T wider. Sie ermöglicht auch, invariante Teilräume zu finden. Insbesondere ergibt sich die Existenz nicht-trivialer invarianter Teilräume.

O'NEIL, R.: Adjoint operators and interpolation of operators

For the operators which occur in the theory of interpolation of operators an adjoint may be defined. Using this notion it is shown that if a linear operator is simultaneously of restricted weak types p_i, q_i : i = 0,1: then for all f in the domain of T we have the following inequality. Let h = T f, for all $s > o$,

(1) $$s\,\overline{h}(s) \leq \int_0^\infty K(r,s)\, f^*(r)\, \frac{dr}{r}$$

where the kernel is given by (M is a constant)

$$(2) \qquad K(r,s) = M \int_0^s \frac{r^{1/p_0}}{t^{1/q_0}} \wedge \frac{r^{1/p_1}}{t^{1/q_1}}\, dt \, .$$

These inequalities may be used to give particularly simple proofs of certain interpolation theorems.

OSTROWSKI, A: Das Restglied d. Euler-Maclaurin'schen Formel

Die klassischen Resultate lassen sich klarer zusammenfassen und verschärfen, wenn man vom Begriff der Konvexität Gebrauch macht. Diesen Resultaten lassen sich mehrere neue Abschätzungen an die Seite stellen.

PHILLIPS, R.: Scattering Theory for the Acoustic Equation

The approach to scattering theory developed by Lax and Phillips leads itself to the study of the analytic properties of the scattering matrix $S(z)$ for the acoustic problem

$$u_{tt} = su$$

in an exterior demain G with $u \equiv 0$ in the boundary ∂G. It can be shown that $S(z)$ is meromorphic in the entire z plane and holomorphic in Im $z \leq 0$. In the case of star-shaped bodies $S(z)$ is even holomorphic in a half-plane of the form Im $z < \beta > o$. This theory combined with a recent result due to Ludwig and Morawetz shows that in the case of a convex body, $S(z)$ has only a finite number of poles in any half-plane of the form Im $z < \beta > o$. Finally suppose that then purely imaginary poles for the scattering matrix for each of two scattering objects O_1 and O_2 are ordered $\{i\,\sigma_n^{(j)}\}$, $j=1,2$, $\sigma_1^{(j)} \leq \sigma_2^{(j)} \leq \sigma_3^{(j)} \leq \ldots$. If $O_1 \subset O_2$ then $\sigma_1^{(1)} \geq \sigma_1^{(2)}$ and if O_1 is in addition star-shaped then $\sigma_n^{(1)} \geq \sigma_n^{(2)}$ for all n.

POPOVICIU, E.: Über den Begriff der Konvexität in Bezug auf ein Approximationsverfahren

Die allgemeine Theorie der Interpolation besitzt Implikationen sowohl hinsichtlich des Studiums der besten Approximation im Tschebyscheff'schen Sinne als auch hinsichtlich des Studiums des Verhaltens der Elemente einer Menge im Bezug auf ein gegebenes Interpolationsverfahren, das sinnvoll für die Elemente der betrachteten Menge ist.

In dieser Arbeit wird eine Menge $\mathfrak{F}_n$ von Funktionen betrachtet, die interpolierend n-ter Ordnung in einem Intervall $[a,b]$ sind. Die Menge der über $[a,b]$ stetigen Funktionen teils sich im Bezug auf $\mathfrak{F}_n$ in zwei Klassen: die mit den Elementen von $\mathfrak{F}_n$, oder kurz mit $\mathfrak{F}_n$, vergleichbaren Funktionen und die mit $\mathfrak{F}_n$ unvergleichbaren Funktionen. Die Klasse der mit $\mathfrak{F}_n$ vergleichbare Funktionen enthält zwei Unterklassen, welche durch mit $\mathfrak{F}_n$ strikt vergleichbare Funktionen gebildet werden. Diese Unterklassen bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(\mathfrak{F}_n; [a,b]; +)$ und $\mathcal{C}(\mathfrak{F}_n; [a,b]; -)$ und sie besitzen folgende grundlegende Eigenschaft: welches immer das Funktionspaar $h_1 \in \mathcal{C}(\mathfrak{F}_n; [a,b]; +)$ und $h_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{F}_n; [a,b]; -)$ auch sei, die Differenz $h_1(x) - h_2(x)$ verschwindet – mit Zeichenwechsel – in höchstens n verschiedenen Punkten aus (a,b).

In der Arbeit werden einige Folgerungen der oben angegebenen Eigenschaft untersucht und es werden verschiedene Verallgemeinerungsmöglichkeiten dieser Eigenschaft angegeben. Es wird auf mehrere Arbeiten des Verfassers über den Begriff der Konvexität hingewiesen.

POPOVICIU, T.: Über Approximationspolynome, welche das Konvexitätsverhalten einer Funktion bewahren

In vorliegender Arbeit wird bewiesen, daß das Polynom bester Approximation n-ten ($n \geq 1$) Grades der Funktion f auf den Punkten

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$$

die Konvexität (n – 2)-ter Ordnung der Funktion f in einem Teilintervall nicht verschwindender Länge des Intervalls $[x_1, x_{n+2}]$ bewahrt.

Aufgrund eines bekannten Satzes von Ch. de la Vallée-Poussin erfreut sich auch das Polynom bester Approximation n - ten Grades einer auf einem endlichen und geschlossenen Intervall stetigen Funktion einer analogen Eigenschaft.

RIVLIN, T.J.: A Duality Theorem and Upper Bounds for Approximation

The duality theorem referred to is the following: Let V be a subspace of the normed linear space X. For each $f \in X$

$$\inf_{v \in V} \|f - v\| = \max_{T \in A} |Tf| ,$$

where A is the set of linear functionals on X of norm 1 satisfying $TV = 0$. This duality theorem has frequently been used to provide lower bounds for the degree of approximation of f by elements of V. Our prupose is to show that it can provide upper bounds in certain cases. Our major tool is the Peano representation of T and the observation that the result of applying T to the kernel in that representation is a function having no change of sign in the interval under consideration.

ROONEY, P.G.: Generalized H_p spaces and Laplace transforms

Doetsch (Math. Zeit. 43 (1937)) unified the work of Paley-Wiener & Hille & Tamarkin relating H_p spaces for the right half-plane and Laplace transformations. The lecturer has given several generalizations of Doetsch's work in various directions (Can. J. Math. 10(1958), 11(1959), 16(1964)). Here we give a generalization that unifies all these diverse previous ones in one theory, and extends them considerably.

RUNCK, P.O.: Bemerkungen zu den Approximationssätzen von Jackson und Jackson-Timan.

Betrachtet werden folgende drei Probleme, die mit den Sätzen von Jackson zusammenhängen: A) simultane Approximation 2π-periodischer Funktionen, durch trigonometrische Polynome, B) Approximation von Funktionen in $[-1,1]$ durch algebraische Polynome, C) simultane Approximation von Funktionen in $[-1,1]$ durch algebraische Polynome mit der Timanschen Verbesserung an den Intervallenden. Im Fall A) werden vermöge verallgemeinerter de la Vallée-Poussin-Summen gute Approximationskonstanten für den Jacksonsatz bei der gleichzeitigen Approximation erhalten.

Im Fall B) werden für sup $\{E_n(f) \mid f \in Lip_1 1\}$ Abschätzungen von oben und unten angegeben.

Im Fall C) gilt die Aussage: Es sei $f \in C^p[-1,1]$ mit dem Stetigkeitsmodul $\omega(f^{(p)},\delta)$. Dann existieren Polynome $P_n(x)$ $(n > 2p+1)$ mit der Eigenschaft:

$$|f^{(\rho)}(x) - P_n^{(\rho)}(x)| \leq C_\rho \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{p-\rho} \omega\left(f^{(p)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right) \qquad (0 \leq \rho \leq p)$$

$$|P_n^{(\rho)}(x)| \leq C_\rho (\Delta_n(x))^{p-\rho}\, \omega(f^{(p)}, \Delta_n(x)) \qquad (C_\rho > 0) \quad \text{mit}$$

$\Delta_n(x) = \max\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$. (Für $\rho = 0$ vgl. das von Herrn Prof. Lorentz gestellte Problem-Tagung über Aproximationstheorie 1963 – sowie Teljakowskii Mat. Sb. 70(1966)).

SCHNABL, R.: Eine Verallgemeinerung der Bernsteinpolynome

S. Bernstein hat für eine $[0,1]$ definierte, reelle Funktion f die Folge

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

von Polynomen angegeben, die f gleichmäßig approximieren, wenn f stetig ist.

Die Punkte des Intervalls [0,1] können vermittels ihrer Darstellung in baryzentrischen Koordinaten als mögliche Verteilung der Masse 1 auf die Eckpunkte {0} und {1} des Intervalls [0,1] aufgefaßt werden. Analog zu dieser Auffassung wird der Raum K(S) der positiven normierten Radonmaße auf dem kompakten Raum S, versehen mit der schwachen* Topologie, betrachtet. Für gewisse Funktionen auf K(S) werden "Bernsteinpolynome" erklärt und deren Eigenschaften untersucht.

SHAPIRO, H.S.: Application of Fourier Methods to Approximation Theory

Let σ denote a finite measure on Euclidean k-space R^k and $f \in L^p(R^k)$, where $1 \leq p \leq \infty$. For $a > 0$, we define the functional $D_{\sigma,p}(f;a) = \| \int f(t-au)\,d\sigma(u) \|_{L^p}$. In terms of the behaviour of this fundtional as $a \to 0$ one can, by different choices of σ, characterize a great many quantities of interest in approximation theory, including various measures of smoothness, degree of approximation generated by convolution integrals, etc. We have proved several general theorems establishing inequalities (for fixed f) between $D_{\sigma_1,p}(f;a)$ and $D_{\sigma_2,p}(f;a)$. These permit us to derive, from a unified source, direct and inverse theorems of approximation theory, saturation theorems, and inequalities relating moduli of smoothness of different orders. To prove the general theorems, the divesibility theory of Fourier transforms is used extensively. An inequality of Littlewood-Paley type also plays an important role.

SHARMA, A.: Convergence of a class of interpolatory splines

The object of this paper is to investigate the convergence properties of periodic cubic splines which interpolate a given function at one or more inner points of the given mesh intervals. If the number of interpolatory conditions in each mesh interval is more than one (as in our Theorem 2) the deficency of the spline increases. On the other hand the increase of deficiency of the spline is compensated by the increase in smoothness at the points of interpolation. Thus the

following theorem is proved:

Let $f(x) \in C^2[0,1]$ be 1-periodic and $\phi(x) \in C^2[0,1]$ be the 1-periodic cubic spline with points $x_i = \frac{i}{n}$ satisfying the conditions

$$\phi\left(\frac{i+\lambda-1}{n}\right) = f\left(\frac{i+\lambda-1}{n}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

where $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{3}$ or $\frac{2}{3} \leq \lambda \leq 1$. If $\omega_2(\delta)$ is the modulus of continuity of $f''(x)$, then

$$\max_x \left|\phi^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\right| \leq 15n^{r-2}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right), \quad r = 0,1,2.$$

(This paper was written together with A. Meir.)

SINGER, I.: Some remarks and problems on bases in Banach spaces

We make some remarks on certain recent results on bases in Banach spaces and raise some new problems. In § 1 we consider the problem of describing, up to isomorphisms, all block subspaces with respect to the various usual bases in concrete Banach spaces and, in particular, the subspaces spanned by all infinite subsequences of these bases. We conjecture that except for spaces isomorphic to Hilbert space l^2, in every Banach space B with a basis $\{z_n\}$ there exists a subspace not isomorphic to any block subspace with respect to $\{z_n\}$. The validity of this conjecture for B = C ([0,1]) would imply the existence of a separable Banach space having no basis. In § 2 we give a new proof of our joint result with A. Pelczynski (Studia Math., 1964), according to which in every infinite dimensional Banach space with a basis there exist two non-equivalent basis, and we raise the following problem: Can every block basis sequence $\{y_n\}$ with respect to a symmetric basis $\{x_n\}$ of a Banach space E be extended to an unconditional basis $\{z_n\}$ of E? An affirmative answer would yield a simple proof of a recent result of J. Lindenstrauss and M. Zippin on Banach spaces with a unique unconditional basis (up to an equivalence). Finally, in § 3 we consider the problem of existence of bases having subsequences which span non-complemented subspaces. We conjecture that every Banach space with a basis, not isomorphic to l^2, has such a basis.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

SUNOUCHI, G.: <u>Derivatives of a trigonometric polynomial of best approximation.</u>

Let $T_n(f)$ be a trigonometric polynomial of best approximation of order n for f(x) with respect to the $L^p (1 \leq p \leq \infty)$ norm, that is $\|f - T_n(f)\|_p = E_n^{(p)}(f)$. Then we show that $\|T_n^{(r)}(f)\|_p = \mathcal{O}(n^{r-\alpha})$ $(r > \alpha > 0)$ where r is a positive integer, is equivalent to $E_n^{(p)}(f) = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$. This gives a new characterization of functions of the class $\Lambda(\alpha;p)$. We extend this result to the class $\Lambda(\alpha;p,1)$. The special case of this result characterizes a convolution algebra given by A. Beurling. This characterigation throws a light on the absolute convergence of Fourier series. These facts are discussed also.

WALTER, W.: <u>Konvergenz- und Existenzsätze für das Cauchy-Problem bei nichtlinearen parabolischen Differentialgleichungen mit der Linienmethode.</u>

Das Cauchy-Problem $(I = [0,T]\ ,\ \mathbb{R} = R^1)$

(C) $\quad u_t = f(t,x,u,u_x,u_{xx})$ in $I \times \mathbb{R}$, $u(0,x) = \ (x)$ für $x \in \mathbb{R}$

wird durch Diskretisierung in x-Richtung übergeführt in das Problem

(C_h) $\quad u_i' = f(t,x_i,\ u_i,\ \delta u_i,\ \delta^2 u_i)$ in I, $u_i(0) = \varphi(x_i)$

$(i \in \mathbb{Z}\ ,\ x_i = ih,\ h > 0$ fest),

wobei (z.B.)

$$\delta u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad , \quad \delta^2 u_i = \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{h^2}$$

ist. Es gilt der <u>Konvergenzsatz:</u>

Ist u Lös. von (C), $v^h = (v_i^h)_{i \in \mathbb{Z}}$ Lös. von (C_h)

und $\quad \|u - v^h\|_h := \sup \left\{ |u(t,x_i) - v_i^h(t)| \ :\ i \in \mathbb{Z}\ ,\ t \in I \right\}$,

so gilt, falls f(t,x,z,p,r) einer lokalen Lipschitzbedingung in z,p,r und der Ungleichung $f_r \geq \alpha > 0$ genügt,

$$\|u - v^h\|_h = \begin{cases} o(1) \text{ falls } u_{xx} \text{ glm. stetig und beschränkt} \\ o(h) \text{ falls } u_{xxx} \text{ glm. stetig} \\ \mathcal{O}(h^2) \text{ falls } u_{xxxx} \text{ beschränkt} \end{cases}$$

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Ebenso läßt sich ein Existenzssatz für das nichtlineare Problem (C) beweisen. Daher wird die Lösung u genommen als Limes von Näherungen v^h.

Das wesentliche methodische Hilfsmittel ist die Tatsache, daß das System (C_h) quasi-monoton wachsend ist und damit die Theorie der gewöhnlichen Differential-Ungleichungen herangezogen werden kann.

WESTPHAL, U.: Über Potenzen von Erzeugern von Halbgruppen

Für gebrochene Potenzen $(-A)^{\gamma}$ $(0<\gamma<r,\ r=1,2,\dots)$ des infinitesimalen Erzeugers A einer gleichmäßig beschränkten Halbgruppe $\{T(u);\ u\geq 0\}$ von Operatoren der Klasse (C_o) auf einem (B)-Raum X gelten die beiden folgenden Formeln:

$$(1)\quad (-A)^{\gamma}\left[\int_o^\infty q_{\gamma,r}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) T(u)f\,\frac{du}{\varepsilon}\right] = \int_\varepsilon^\infty u^{-\gamma}[I-T(u)]^r f\,\frac{du}{u}\quad (f\varepsilon X,\ \varepsilon>0)$$

$$(2)\quad [I-T(u)]^r f = u^{\gamma}\int_o^\infty p_{\gamma,r}\left(\frac{t}{u}\right) T(t)(-A)^{\gamma} f\,\frac{dt}{u}\qquad (f\varepsilon D((-A)^{\gamma}),\ u>0).$$

Dabei sind die Funktionen $q_{\gamma,r}$ und $p_{\gamma,r}$ aus $L(0,\infty)$ durch ihre Laplacetransformierten $\int_o^\infty e^{-su} q_{\gamma,r}(u)du = s^{-\gamma}\int_1^\infty u^{-\gamma}(1-e^{-su})^r\,du/u$

und $\int_o^\infty e^{-su} p_{\gamma,r}(u)du = s^{-\gamma}(1-e^{-s})^r$ (Re $s>0$) definiert.

Aus (1) folgert man unmittelbar die Darstellungsformel

$$(-A)^{\gamma} f = \underset{\varepsilon\to o+}{\text{s-lim}}\ \frac{1}{C_{\gamma,r}}\int_\varepsilon^\infty u^{-\gamma}[I-T(u)]^r f\,\frac{du}{u}\qquad (C_{\gamma,r}\ \text{konstant}),$$

zu der die Beziehung (2) eine Umkehrung ist.

Zur Charakterisierung der Potenzen $(-A^2)^{\gamma/2}$ $(\gamma>0)$ des Erzeugers A einer Gruppe von Operatoren lassen sich entsprechende Relationen zu (1) und (2) aufstellen.

Als Anwendungsbeispiel wurden das singuläre Integral von Cauchy-Poisson und die Translationsgruppe betrachtet.

ZELLER, K.: Runge-Kutta-Approximationen

Bei der Untersuchung von Runge-Kutta-Verfahren benützt man meistens Taylorabgleich in Verbindung mit Differentialoperatoren oder Differentialausdrücken. Es erscheint jedoch günstiger, direkt an den rekursiven Aufbau der Runge-Kutta-Verfahren anzuknüpfen und sich auf Integrationsformeln zu stützen. Auf diesem Wege gelangt man zu einer übersichtlichen Darstellung des Restglieds, die tieferen Einblick in die Struktur des Verfahrens liefert. Dies wird genauer dargelegt an den Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung bei gewöhnlichen Differentialgleichungen (Herleitung von Bedingungen für die Koeffizienten, Restabschätzungen, Ergänzungen und Verallgemeinerungen).

Karl Scherer

Paul Putzer

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft