Mathematisches Forschungsinstitut
Oberwolfach

Tagungsbericht 22/68

Automorphe Funktionen zu arithmetisch definierten Gruppen

28. Juli bis 3. August 1968

Unter der Leitung von M. Eichler und H. Klingen und dem Ehrenvorsitz von C.L. Siegel fand in der Woche vom 28.7. bis 3.8.1968 auf dem Lorenzenhof in Oberwolfach eine Tagung über "Automorphe Funktionen zu arithmetisch definierten Gruppen (speziell Modulfunktionen)" statt. Es haben 48 Mathematiker (davon 22 aus dem Ausland) teilgenommen; 25 Vorträge wurden gehalten.

Teilnehmer

Atkin, A.O.L., Chilton/Engl.
Baily, W.L., Chicago/USA
Bateman, P.T., Urbana/USA
Bergau, P., Glasgow/Engl.
Berger, F., Freiburg
van der Blij, F., Utrecht/Holl.
Bremer, H.J., Basel
Brümmer, D., Münster
Busam, R., Heidelberg
Claus, G., Münster
Cohn, H., Tuscon/USA
Dressler, A., Aachen
Eichler, M., Basel
Elstrodt, J., München
Freitag, E., Heidelberg
Gérardin, P., Paris
Gottschling, E., Berlin
Grosswald, E., Philadelphia/USA
Gundlach, K.-B., Münster
Herrmann, O., Heidelberg
Igusa, J., Towson/USA
James, D., Basel
Job, R., Bremerhaven
Klingen, H., Freiburg
Knopp, M., Madison/USA
Koecher, M., München
Köhler, G., München
Leutbecher, A., Münster
Maaß, H., Heidelberg
Matsumoto, H., Paris

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Mennicke, J., Göttingen
Mertz, K.-B., Münster
Morgenroth, K., Freiburg
Peters, M., Basel
Rankin, R.A., Glasgow/Engl.
Resnikoff, H.L., Houston/USA
Roelcke, W., München
Schoeneberg, B., Hamburg
Selberg, A., Princeton/USA
Shimura, G., Princeton/USA
Siegel, C.L., Göttingen
Spilker, J., Freiburg
Steinle, B., Basel
Suckow, S., Münster
Sunder Lal, Chandegarh/Indien
Weil, A., Princeton/USA
Wohlfahrt, K., Heidelberg
Wolfart, J., Freiburg

Vortragsauszüge

ATKIN, A.O.L.: Conjectures for the Fourier Coefficients of non-congruence elliptic Modular Cuspforms

The Fourier coefficients $a(n)$ of a cuspform

$$\xi + \sum_{2}^{\infty} a(n)\, \xi^{n} \in \{\Gamma, -2k, 1\}_{o}$$

(where Γ is a congruence subgroup of the modular group, and $k > 0$ integral) which is an eigenform of all the Hecke operators T_p satisfy equations such as (p prime to the level of Γ)—

$$a(np) - a(n)\, a(p) + q\, a(n/p) = 0 \quad [q = p^{2k-1}] \text{ (all } n, \text{ all prime } p).$$

From this, one can deduce (taking $a(p) \equiv 0 \pmod p$ for simplicity) that

$$(1)\quad \begin{cases} a(np^{\alpha}) \equiv B_{\alpha}\, a(np^{\alpha-1}) \pmod{q^{\alpha}} & \text{where} \\ B_1 = a(p),\ B_{\alpha+1} = B_1 - q/B_{\alpha}\,. \end{cases}$$

With suitable interpretations we exhibit cases where (1) holds for non-congruence subgroups of the modular group, and conjecture that in some sense this is an universal property.

BAILY, W.L.: On Exceptional Automorphic Functions

Some results on automorphic functions with respect to arithmetically defined discontinuous groups acting on the exceptional bounded domain of dimension 27. The purpose is to show how many of the points in Siegel's program for the space of n by n symmetric matrices with positive definite imaginary parts can be carried over to this exceptional domain. The emphasis is to be on arithmetic developments or possible arithmetic developments which are not contained in the joint paper of Borel and the speaker on compactifications.

BATEMAN, P.T.: On the representation of a positive integer as the sum of a fractional number of squares

If s is real and n is a positive integer define $r_s(n)$ by the power series expansion

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2}\right)^s = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_s(n)\, x^n.$$

By using the theory of modular functions it is possible to find an exact expression for $r_s(n)$, in terms of a so-called singular series, if $s = 3, 4, 5, 6, 7, 8$. This is still possible although more complicated in detail if s is any real number between 4 and 8. In this paper, a joint paper with Marvin Knopp, we give this proof, prove asymptotic formulas for

$$\sum_{n=1}^{N} r_s(n),$$

and show that $r_s(n) > 0$ for all positive integers n provided $s \geq 5,3$. The last condition is not best possible, but the intractability of the singular series for non-real s makes it hard to improve.

BERGAU, P.: Zu einer Vermutung von E. T. Whittaker über gewisse automorphe Funktionen

Bei der Uniformierung einer hyperelliptischen algebraischen Kurve vom Geschlecht p

$$u^2 = f(z) = (z-e_1)(z-e_2)\dots(z-e_{2p+2})$$

durch automorphe Funktionen $z(t)$, $u(t)$ bezüglich einer Gruppe Γ kann die zu $z(t)$ inverse Funktion $t(z)$ durch eine Schwarz'sche Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^3t}{dz^3} \Big/ \frac{dt}{dz} - \frac{3}{4}\left(\frac{d^2t}{dz^2} \Big/ \frac{dt}{dz}\right)^2 = R(z)$$

beschrieben werden, wobei die rationale Funktion $R(z)$ von $2p-1$ accessorischen Parametern abhängt. Verlangt man außerdem noch, daß Γ eine Fuchs'sche Gruppe ist, so ist $R(z)$ eindeutig bestimmt. Es wird gezeigt, daß $R(z)$ algebraisch berechnet werden kann, wenn Γ Untergruppe einer Dreiecksgruppe ist. Insbesondere zeigt sich, daß der von Whittaker angegebene Ausdruck

$$R(z) = \frac{3}{16}\left\{\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2 - \frac{2p+2}{2p+1}\,\frac{f''(z)}{f(z)}\right\}$$

nur in speziellen Fällen richtig ist.

van der BLIJ, F.: Modulfunktionen und elliptische Kurven

Die Koeffizienten $\nu(n)$ einer Spitzenform zum Grad -2 zu gewissen Stufengruppen können auf verschiedene Arten dargestellt werden:

1) Als Differenz genauer und mittlerer Darstellungsanzahlen durch quaternäre quadratische Formen;

2) $\sum \nu(n)\, q^n = q \prod\limits_m \prod\limits_{j=1}^{4} (1-q^{A_j m})$ mit $\sum A_j = 24$;

3) $\nu(p) = \sum\limits_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x^3+ax+b}{p}\right)$; also ist $\nu(p)-(p+1)$ die Punktanzahl einer

elliptischen Kurve.

4) $\nu(n) = \sum\limits_{\substack{\nu \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2(1+i)) \\ \nu \cdot \bar{\nu} = n}} \left(\frac{D}{\bar{\nu}}\right)_4 \cdot \nu$

Analoge Formeln gibt es auch für andere Werte des Grades, z.B. -1 und -12. Im Falle -12 hat man für Ramannjans Funktion z.B.

3) $\tau(p) = F(p) + \sum\limits_{a,b} \left(\sum\limits_{x=o}^{p-1} \left(\frac{x^3+ax+b}{p}\right)\right)^{10}$ mit einem Polynom F;

4) $\tau(n) = \frac{1}{144} \sum\limits_{\nu\bar{\nu}=n} (e, \nu^8)$, wobei ν die ganzen Oktaven durchläuft und $(e, .)$ das innere Produkt mit dem Einselement e ist.

Es ist die Frage, ob es analoge Formeln auch für andere Gruppen, etwa $Sp(n)$ statt SL_2 gibt. Wesentlich erscheint in 2) nicht das unendliche Produkt, sondern das Auftreten der η-Funktion, und man müßte dafür eine Übertragung finden.

BUSAM, R.: Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zur Hermiteschen Modulgruppe

Sei K ein imaginär-quadratischer Zahlkörper, d seine Diskriminante, 0 der Ring der ganzen Zahlen in K, w die Ordnung der Einheitengruppe, $\mathfrak{H}_n$ der Hermitesche Halbraum. H. BRAUN hat in Ann. of Math. Vol. 50 (1949) die Eisensteinreihen n-ten Grades vom Gewicht k ($\{C,D\}$ durchläuft ein vollständiges System teilerfremder nichtassoziierter Hermitescher Paare)

$$G_k(Z) = \sum_{\{C,D\}} |CZ+D|^{-k}, \quad Z \in \mathfrak{H}_n, \quad k > 2n, \quad k \equiv 0(w)$$

eingeführt und bewiesen, daß ihre Fourierkoeffizienten $a_k(F)$ rational sind. Bis auf elementare Faktoren lassen sich die $a_k(F)$

als Produkt von p-adischen Darstellungsdichten schreiben. Durch Berechnung der Darstellungsanzahlen

$$A_q(F) = \# \{C = C^{(k,n)} \bmod(q), \text{ ganz } | S\{C\} \equiv F(q)\}, \quad q = p^a,$$

$S = S^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, gelangt man im Falle $n = 2$ für primitive F zu einer expliziten Formel für $a_k(F)$, aus der sich die Beschränktheit der Nenner der $a_k(F)$ ergibt.

COHN, H.: Topological Models of the Fundamental Domain of Certain Hilbert Modular Groups

There are many classical investigations of geometric features of fundamental domains, e.g., by Blumenthal, Siegel, Götzky, Maass, etc. More recently, Gundlach investigated the fixed point structure of the Hilbert modular group, with the conclusion that a few cases lead to compact complex manifolds.

With the help of an electronic computer, it is possible to investigate these domains "in the large" and draw models like Fuchsian polyhedra - in four dimensions. Some such diagrams are presented for the quadratic fields of discriminant 5, 8, 12 and 24.

GOTTSCHLING, E.: Existenz von Spiegelungen in den Cartanschen Bereichen

Zwei Singularitäten komplexer Räume mögen äquivalent heißen, wenn sie Umgebungen besitzen, die sich biholomorph aufeinander abbilden lassen. Ist M eine komplexe Mannigfaltigkeit und Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von biholomorphen Abbildungen von M auf sich, so gibt es zu jeder Singularität von M/Γ eine endliche Untergruppe $\Delta \subset GL(n,\mathbb{C})$, so daß diese Singularität von M/Γ äquivalent ist zur Singularität $\pi(0) \in \mathbb{C}^n/\Delta$. Dabei ist $n = \dim M$

und $\pi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Delta$ die natürliche Abbildung. Eine Abbildung $\gamma \in GL(n,\mathbb{C})$ von endlicher Ordnung heißt Spiegelung, wenn die Fixpunktmenge von γ die Codimension 1 hat. Für die Singularitäten $\pi(0) \in \mathbb{C}^n/\Delta$ gilt dann die folgende Klassifikation:

(i) Jede Singularität $\pi(0) \in \mathbb{C}^n/\Delta$ ist äquivalent zu einer solchen, deren Gruppe spiegelungsfrei ist.

(ii) Sind $\Delta_1, \Delta_2 \subset GL(n,\mathbb{C})$ zwei spiegelungsfreie endliche Gruppen, so sind die Singularitäten $\pi_1(0) \in \mathbb{C}^n/\Delta_1$ und $\pi_2(0) \in \mathbb{C}^n/\Delta_2$ genau dann äquivalent, wenn $\Delta_2 = \lambda \circ \Delta_1 \circ \lambda^{-1}$ mit einer Abbildung $\lambda \in GL(n,\mathbb{C})$ gilt.

(iii) Insbesondere ist $\pi(0)$ dann ein regulärer Punkt von $\mathbb{C}^n/\Delta$, wenn die Gruppe Δ von den in ihr gelegenen Spiegelungen erzeugt wird. Wenn dann auf der komplexen Mannigfaltigkeit M keine Spiegelungen existieren, so liefert jeder Punkt $x \in M$ mit nicht trivialer Isotropiegruppe $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma / \gamma(x) = x\}$ eine Singularität des Quotienten M/Γ.

Es werden dann die irreduziblen symmetrischen Gebiete auf die Existenz von Spiegelungen untersucht. Die Cartansche Klassifikation dieser Gebiete liefert außer zwei Ausnahmegebieten vier Typen:

Typ I: $M = \{Z/Z$ komplexe (n,m)-Matrix, $E_m - Z'\bar{Z} > 0\}$
Typ II: $M = \{Z/Z$ komplexe (n,n)-Matrix, $Z' = -Z$, $E_n - Z'\bar{Z} > 0\}$
Typ III: $M = \{Z/Z$ komplexe (n,n)-Matrix, $Z' = Z$, $E_n - Z'\bar{Z} > 0\}$
Typ IV: $M = \{(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{C}^n / |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 < \frac{1}{2}(1 + |z_1^2 + \ldots + z_n^2|^2) < 1\}$.

Man erhält ein vollständiges System von nicht biholomorph äquivalenten Gebieten, wenn man voraussetzt:

Typ I: $m \leq n$, Typ II: $n \geq 4$, Typ III: $n \geq 2$, Typ IV: $n \geq 5$.

Es existieren k e i n e Spiegelungen genau in den Fällen Typ I: $2 \leq m \leq n$, Typ II: $n \geq 4$, Typ III: $n \geq 3$.

Abschließend wird gezeigt, daß die Hilbert-Siegelsche Modulgruppe über einem beliebigen total reellen Zahlkörper von einem Grad $q > 1$ keine Spiegelungen enthält.

HERRMANN, O.: Eine Kongruenzrelation modulo 17 für die Partitionenanzahl

Sei p(n) die Anzahl der Partitionen der Zahl 17 und sei

$$B_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \frac{1}{2}\cdot 17\,(2B_1)^{-1}, \text{ sowie}$$

$a_n(B_i)$ die Darstellungsanzahl von n durch die quadratische Form $B_i[\mathfrak{g}]$. Die zugehörigen Thetareihen sind Modulformen zur Gruppe $\Gamma_0(17)$, von der Dimension -2 mit einem gewissen Charakter χ als Multiplikatorsystem. . Die Funktion

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{8}(a_n(B_1) - a_n(B_2))\, e^{2\pi i n \tau}$$

ist Spitzenform zur Gruppe $\Gamma_0(17)$ und besitzt eine Eulersche Produktentwicklung.

Im Vortrag wird gezeigt, daß die Koeffizienten der Potenzreihe von

$$\sum_{n=o}^{\infty} p(17n+5)q^n(1+\sum a_n(B_1)q^n)+112\sum_{n=o}^{\infty} p(n)q^{17n}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(B_1)-a_n(B_2)}{8}\, q^n$$

durch 17 teilbare, ganze rationale Zahlen sind. Zum Beweis wird eine Basis des graduierten Ringes aller Modulformen zur Gruppe $\Gamma_0(17)$ mit durch 4 teilbarer Dimension konstruiert und gezeigt, daß

$$\eta(17\tau)\sum p(17n+5)\, e^{2\pi i(n+\frac{7}{24})\tau}$$

als Quotient von Modulformen der Dimension -16 darstellbar ist.

IGUSA, Jun-ichi: Some observations on the Siegel Formula

Siegel's classical works on quadratic forms have been reconsidered by Weil in his two papers in the Acta Mathematica (Vol. 111, 113). We shall start by comparing their methods and results, and we shall explain some new aspects which permit us to search for further generalization and specialization.

KNOPP, M.: Eichler Cohomology Groups and Automorphic Forms

We show that the direct sum of two vector spaces of automorphic forms, connected with an arbitrary H-group Γ, and integral dimension ≤ -2, and an arbitrary multiplier system, can be identified with the "Eichler Cohomology Group". The cocycles in the Eichler Cohomology Group consist of systems of polynomials, satisfying a certain consistency condition with respect to Γ and of degree at most r, where -r-2 is the dimension of the automorphic forms in question. This identification was previously shown by Gunning (Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961), 44-62) under the slightly restrictive assumption that the multiplier is a root of unity. Our methods are totally different, employing the notion of "supplementary series" introduced in (M.I. Knopp, Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962), 168-188). We make no restriction on the multiplier system. A related result is that the cohomology group with coefficients from a certain ring of analytic functions larger than the ring of polynomials is zero. This is proved by introducing a generalized version of the classical Poincaré series.

KOECHER, M.: Gruppen von rationalen Abbildungen

In der Lie-Algebra Rat V der rationalen Funktion über dem Vektorraum V werden die Teilalgebren $\mathfrak{D} = V + \mathfrak{J} + \widetilde{V}$ untersucht, deren Elemente Polynom vom Höchstgrad 2 sind und die $i(x) = x$ enthalten. Es sei Aut* $\mathfrak{D}$ die Untergruppe von Aut $\mathfrak{D}$, die von den Automorphismen

$$\psi_b = \exp \operatorname{ad} b, \quad b \in V, \quad \widetilde{\psi}_v = \exp \operatorname{ad} v, \quad v \in \widetilde{V}$$

und den "linearen" Automorphismen der Form $q(x) \mapsto W q(W^{-1}x)$, $W \in GL(V)$, erzeugt wird.

SATZ: Aut* $\mathfrak{D}$ ist Zariski- offen in Aut $\mathfrak{D}$.

Besitzt $\mathfrak{L}$ einen involutorischen Automorphismus Θ mit $\Theta V = \widetilde{V}$, so gilt $\widetilde{\psi}_v = \Theta \psi_b \Theta$ mit geeignetem $b \in V$ für $v \in \widetilde{V}$.

Gehört Θ zu $\mathrm{Aut}^*\mathfrak{L}$, dann ist $\mathfrak{L}$ isomorph zu einer Lie-Algebra $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, wobei $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra mit Einselement ist. Ist $\mathfrak{A}$ formal-reell, so folgt $\mathrm{Aut}^*\mathfrak{L} = \mathrm{Aut}\,\mathfrak{L}$.

Es werden Anwendungen auf beschränkte symmetrische Gebiete angegeben.

KÖHLER, G.: <u>Automorphe Funktionen zu paramodularen Gruppen</u>

Für paramodulare Gruppen $\Gamma(T) = \{M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mid M \text{ ganz}, ML^{-1}M' = L^{-1}\}$, wobei

$$L = \begin{pmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{pmatrix} \text{ und } T = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$$

mit natürlichen Zahlen $t_1 | t_2 | \ldots | t_n$ ist, werden die Eisensteinschen Reihen

$$\psi_{g,T}(Z) = \sum_M \det(CT^{-1}Z + D)^{-g}$$

gebildet; dabei wird über ein Vertretersystem der Restklassen

$$\Delta(T) \cdot M, \quad M \in \Gamma(T), \quad \Delta(T) = \{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \Gamma(T) \}$$

summiert. Man sieht leicht, daß $\psi_{g,T}(Z)$ die Eigenschaft einer Modulform nicht nur bezüglich $\Gamma(T)$ hat, sondern auch bezüglich jeder erweiterten Gruppe Γ^* mit folgenden Eigenschaften:

1. $\Gamma(T)$ ist Normalteiler in Γ^*;
2. Γ^* wird erzeugt von $\Gamma(T)$ und endlich vielen G der Gestalt $G = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \Omega(T) = \{M \mid M \text{ reell}, ML^{-1}M' = L^{-1}\}$.

Solche Erweiterungsgruppen werden angegeben: Es sei p eine Primzahl, die in $t_\nu t_{n-\nu+1}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ in einer positiven, von ν unabhängigen Potenz enthalten ist, und es seien $p_1, \ldots, p_s$ die sämtlichen Primzahlen mit dieser Eigenschaft. Zu jedem p_μ läßt sich ein

$$G_\mu = \begin{pmatrix} H_\mu & o \\ o & K_\mu \end{pmatrix}$$

so angeben, daß $\Gamma(T)$ Normalteiler vom Index 2^s in der von $\Gamma(T)$ und $G_1, \ldots, G_s$ erzeugten Gruppe $P(T)$ ist. Es ist die Frage, ob $P(T)$ die größtmögliche solche Erweiterung ist. Dies ist bewiesen

1. für die Siegelsche Modulgruppe, $T = E$ (Christian, Ramanathan 1963),
2. für quadratfreies t_n (Gutnik 1957),
3. für $n = 2$ (Köhler 1967).

LEUTBECHER, A: Über Dedekindsche Summen und Kettenbrüche

Die Perioden

$$\omega(A) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_z^{Az} \frac{\eta'(t)}{\eta(t)}dt - \frac{1}{2}\ \ell_A(z)\right)$$

der Dedekindschen Funktion η haben bekanntlich die Gestalt

$$\omega(A) = t(A) - \frac{1}{2} S(d,c), \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(Z).$$

Darin ist $\ell_A(z)$ ein Zweig von $\log(cz+d)$, $S(d,c)$ die Dedekindsche Summe und $t(A)$ ein triviales additives Glied. Für $A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$ ist $\omega(AB) = \omega(A) + \omega(B) - \frac{1}{2} w(A,B)$ mit dem durch $2\pi i\, w(A,B) = \ell_{AB}(z) - \ell_A(Bz) - \ell_B(z)$ definierten 2-Kozyklus w auf Γ. Fixiert man ℓ_A durch $\pi < \operatorname{Im} \ell_A(z) < 2\pi$, falls $\operatorname{tr} A < 0$ und $c < 0$, durch $-\pi < \operatorname{Im} \ell_A(z) \leq \pi$ sonst, so wird $w(A,B) = w(B,A)$ für alle A, B. Dann ist ω eine Klassenfunktion auf $SL_2(Z)$, überdies gilt

$$\omega(A^*) = \omega(A^{-1}); \qquad A^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

Daraus folgen z.B. die Rademacherschen Identitäten für die $S(d,c)$. Die Halbgruppe $\mathfrak{H}$ der $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ mit $a \geq b \geq o$, $a \geq c \geq d$ ist freie Halbgruppe über

$$\mathfrak{S} = \{\begin{pmatrix} g & 1 \\ 1 & o \end{pmatrix}; \quad g \in \mathbb{N}\},$$

die Halbgruppe $\mathfrak{H}_+$ der $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leq SL_2(\mathbb{Z})$ mit $a > -b > -d \geq 0$, $a > c > -d$ ist freie Halbgruppe über $\mathfrak{S}_+ = \{\begin{pmatrix} g+1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ g \in \mathbb{N}\}$; weil $w(A, B) = 0$ ist, falls $A, B \in \mathfrak{H} \cap SL_2(\mathbb{Z})$ bzw. $A, B \in \mathfrak{H}_+$ sind, liefert ω einen Homomorphismus von $\mathfrak{H} \cap SL_2(\mathbb{Z})$ ebenso wie von $\mathfrak{H}_+$ in $\mathbb{Q}$.

MATSUMOTO, H.: <u>On the congruence subgroup problem for Chevalley groups</u>

We shall give a report upon recent results on this subject.

Let k be a number field and G a simply connected group of Chevalley type over k. The congruence subgroup problem for G_k asks if all arithmetic subgroup of G_k is a congruence subgroup of G_k. Recent results of Bass, Mennicke, Milnor, C. Moore, Serre and the reporter bring to this question an almost complete answer. The response is negative if the field k is totally imaginary; otherwise it is affirmative, except the well-known case of SL_2 over $\mathbb{Q}$. The procedure to this solution involves the determination of all central extensions of G_{k_v} and G_{A_k} where k_v is a local field and A_k the adele ring of k. Hilbert symbols and reciprocity formulas play an important role in the determination of these central extensions, among which are found the metaplectic groups of Weil. We shall state conjectures for more general semisimple groups.

MENNICKE, J.: <u>The structure of groups of type</u> SL_2 <u>over rings of integers</u>

We consider groups $G = SL_2(A)$, where A is a Dedekind ring of arithmetical type. For definitions, if e.g. J.P. Serre, Sém. Bourbaki, exp. 330 (1967).

We study the problems:

I. Can we completely desbribe all normal subgroups of G?

II. Is any subgroup of finite index in G a congruence subgroup?

The problem II is apparently a weaker version than I.

The problem I can be solved for

$$A = Z^{(p)} = \{ \frac{x}{p^t}, \quad x \in Z, \quad p \text{ a fixed prime} \}.$$

This answers a conjecture made by Y. Ihara.

J.P. Serre has combined this work with fundamental results of Calvin C. Moore in order to solve problem II in the case where A contains a unit of infinite order.

MIKOLÁS, M.: Theorie der Modulfunktionen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen

Die DEDEKINDsche Funktionalgleichung von $\eta(\tau)$ und das daraus folgende Reziprozitätsgesetz für Dedekindsche Summen sind bekanntlich in den letzten Jahrzehnten zum Ausgangspunkt von vielerlei Untersuchungen geworden.

Der Vortrag schließt sich vor allem an eine SIEGELsche Methode, bzw. eine diese benutzende Arbeit von RADEMACHER (1955) an, wo zum erstenmal ein verhältnismäßig kurzer Beweis der Dedekindschen Transformationsformel enthalten ist. Auf diesem Wege läßt sich ein Transformationsgesetz für die Erzeugungsfunktion

$$\widetilde{Q}(\tau, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} [(n+\omega)^{-1} + (n-\omega)^{-1}] \exp(2\pi i n \tau)[1-\exp(2\pi i n \tau)]^{-1}$$

gewinnen, welches als Verallgemeinerung der genannten klassischen Formeln angesehen werden kann. Von den mittels der Modulgruppe fließenden Nebenprodukten sei eine dreigliedrige Symmetrierelation erwähnt, welche die bisher bekannten Reziprozitätseigenschaften der generalisierten Dedekindschen Summen

(APOSTEL, CARLITZ, RADEMACHER) zusammen impliziert.

RAMACHANDRA, K.: On the Kronecker-Dedekind Δ_f functions $q^{f-6+\frac{6}{f}} \prod_{n=-\infty}^{\infty} (1-q^{\left|n+\frac{1}{f}\right|})^{12f}$, $(f=2,3,4,\dots)$

In connection with the impossibility of the equation $x^p+y^p=z^p$ there occurs in the work of Edward Earnst Kummer the following Lemma:

The real number $\alpha_p = \dfrac{\log(1+2\cos\frac{2\pi}{p})}{\log(2\cos\frac{\pi}{p})}$ is irrational if p is a prime ≥ 7.

It is easy to generalize this if in place of p we have a composite number. This requires an idea (see equation no. 76, p. 119 of annals of Math. 1964 Vol. 80) with the help of which it was possible for me to generalise this result with the Δ_f functions above (for details see the paper in Annals mentioned above) in place of the Cosine function.

RANKIN, R.A.: The definition of subgroups by ideals; an extension of work of R. Fricke

The work of R. FRICKE (Math. Ann. 30 (1881), 345-400) is generalized to mappings $f: G \to \mathbb{C}$ on an arbitrary group G, where

$$f(xy) = f(y) + H(y)\, f(x) \qquad (x, y \in G)$$

for all $x, y \in \Gamma(1)$; see also K. WOHLFAHRT (Math. Ann. 174 (1967), 79-99). In particular für $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle$, where $a^p = b^q = 1$ (p, q different primes) and H is a character on G taking the value

$\varepsilon = e^{2\pi i/k}$ $(k = pq)$ for some element of G, it can be shown that, if J is any ideal in $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, there exist N(J) such functions f such that every normal subgroup H between G' and G'' can be expressed as $\{x : f(x) \equiv 0 \pmod{J}, x \in G'\}$, while the different choises of f lead to N(J) different conjugate subgroups of G of index N(J).

RESNIKOFF, H.L.: Differential Equations for Automorphic Forms in Several Complex Variables

In a paper published in 1889, HURWITZ proved that the holomorphic forms and the meromorphic automorphic functions associated with groups arising from the boundaryless compact Riemann surfaces of genus greater that 1 satisfy algebraic differential equations of order at most 3.

For a generalization of this theorem, let Z be holomorphically equivalent to an irreducible bounded symmetric domain and suppose that the (real) dimension of the Šilov boundary of Z is equal to $\dim_{\mathbb{C}} Z$. Further suppose that Γ is a discrete subgroup of the full group of holomorphic automorphisms of Z which is either pseudoconcave, or such that Z/Γ has a compactification $\widehat{Z/\Gamma}$ which is a connected complex space and every meromorphic function on Z/Γ is the restriction of a meromorphic function on $\widehat{Z/\Gamma}$.

THEOREM: If $\dim_{\mathbb{C}} Z > 1$, then every holomorphic Γ-automorphic form and every meromorphic Γ-automorphic function on Z satisfies an algebraic differential equation of order at most $(\dim_{\mathbb{C}} Z + \text{rank } Z)$.

The classical case is, as usual, exceptional.

SCHOENEBERG, B.: Das Verhalten gewisser Verallgemeinerungen der Dedekindschen Funktion bei Modultransformationen

Durch Integration der $\wp$-Teilwerte erhält man bekanntlich die Logarithmen gewisser schon bei Klein auftretenden Verallgemeinerungen der Dedekindschen Funktion $\eta(\tau)$. Deren Verhalten bei Modultransformationen, das bereits mehrfach bestimmt worden ist, wird hier nach einer Beweisidee von Siegel für $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ und mit Hilfe eines schon häufig angewendeten, von Hecke stammenden Verfahrens, neu berechnet. Die (schon bekannten Ergebnisse) werden zur Herleitung gewisser, z.T. von Maak und seinen Schülern bewiesenen Sätze über die Darstellungen 1.Grades von Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe benutzt.

SELBERG, A.: Eisensteinseries

An outline of the different methods for analytic continuation of Eisensteinseries with some discussion of their relative merits and historical development, beginning with the approach of the inhomogeneous Fredholm equation going on to the approach by means of an inner product formula. Finally a new approach by means of an inhomogeneous Fredholm-equation was sketched out, which gives the meromorphic character in a general context with comparatively little work.

SHIMURA, G.: A new ℓ-adic method in the theory of automorphic forms

Let $\Gamma = SL_2(Z)$, $\Gamma_m = \{A \in \Gamma \mid A \equiv 1 \bmod (\ell^m)\}$ with a fixed prime ℓ. Let J_m be the Jacobian variety associated with Γ_m. Let $H(\Gamma, X)$, with $X = Z^{n+1}$, be the Eichler cohomology group of Γ, defined by the symmetric tensor representation of Γ of degree n. We shall establish an isomorphism λ of $H(\Gamma, X) \otimes (Q_\ell/Z_\ell)$ onto a certain submodule W_ℓ of the direct limit $\varinjlim \{t \in X \otimes J_m \mid \ell^m t = 0\}$, and define two representations μ and μ_* of $\mathrm{Gal}(\bar{Q}/Q)$ into the group of automorphisms of W_ℓ, where $\mathrm{Gal}(\bar{Q}/Q)$ is the group of all automorphisms of the algebraic closure $\bar{Q}$ of Q. Now there exists an R-linear isomorphism j of $H(\Gamma, X) \otimes R$ onto the space S_{n+2} of cusp form of weight n+2 with respect fo Γ. If S_{n+2} is of dimension h over C, W_ℓ is isomorphic to $(Q_\ell/Z_\ell)^{2h}$.

THEOREM: Let T_p be the Hecke operator on S_{n+2} of a prime degree $p \neq \ell$, and σ_p a Frobenius automorphism of $\bar{Q}$ for any prime divisor of p. Then $\lambda \circ j^{-1} \circ T_p \circ j \circ \lambda^{-1} = \mu(\sigma_p) + \mu_*(\sigma_p)$ and $p^{n+1} = p(\sigma_p) \circ \mu_*(\sigma_p)$ on W_ℓ.

SUNDER Lal: On the Fourier Coefficients of Hilbert-Siegel modular Forms

In this lecture we shall give some estimates of the Fourier Coefficients of Hilbert-Siegel Modular Forms belonging to a congruence subgroup of the Hilbert-Siegel Modular Group. These estimates are obtained by generalising suitably a method of Siegel [1], which does not work as such in our case, because the fundamental region of the Hilbert-Siegel Modular Group is not bounded away from the origin as in the case of the Siegel Modular Group.

References

[1] C. L. Siegel: On the Theory of Indefinite Quadratic Forms. Ann. of Math. (1944)

[2] S. Raghavan: Modular Forms of Degree n and Representation by quadratic Forms. Ann. of Math. (1959).

WEIL, A.: On the concept of Mellin transform

This is a report on some recent work done by Langlands and Jacquet, and by the lecturer, on the extension, to an arbitrary number-field or function-field k, of the latter's result in his note in the Siegel-Festschrift. The purpose is to show how one can associate an automorphic function, i.e. a function on $G_k \backslash G_{\mathbb{A}}$ $(G = GL(2), \mathbb{A} = \mathbb{A}_k)$ to a Dirichlet series for k, provided this series, and its modifications by sufficiently many Größencharakters of k, satisfy suitable functional equations. These results can be applied in particular to the non-abelian Artin L-functions (or, more generally, to the Artin-Hecke L-functions) of degree 2, provided they are entire functions. This seems to open up some new possibilities for a non-abelian class-field theory (both local and global), the local theory being very closely related to the representation theory for semi-simple groups over local fields.

WOHLFAHRT, K.: Zykloide Untergruppen der rationalen Modulgruppe

Begriff und erste Ergebnisse über zykloide Untergruppen in der rationalen Modulgruppe stammen seit 1953 von H. PETERSSON. Hier wird eine Zuordnung zwischen diesen Untergruppen und gewissen involutorischen Permutationen hergestellt. Dabei erhält man Permutationsdarstellungen der Modulgruppe. Unter den Anwendungen befinden sich eine Verallgemeinerung eines Satzes von Walburga Rohde und in speziellen Fällen Aussagen darüber, ob eine zyklische Untergruppe Kongruenzgruppe ist oder nicht.

G.Köhler; J. Spilker