MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 1/1969

Gruppen und Geometrie

2.1. bis 5.1.1969

Die Arbeitstagung "Gruppen und Geometrie" unter Leitung von Prof. Salzmann (Tübingen) führte die in Europa arbeitenden Schüler Professor Baers und einige andere Mathematiker zusammen, die sich, wie der Baersche Kreis, insbesondere für die Probleme der Gruppentheorie, der Geometrie sowie für den Zusammenhang zwischen diesen beiden Disziplinen interessieren. Die mathematische Verwandtschaft der Teilnehmer wurde auch in den Vorträgen manifest; so benutzte etwa Fräulein Cofman zum Beweis ihres Satzes wesentlich ein Ergebnis von H. Bender, und Herr Betten knüpfte mit seinem Thema an Arbeiten von H. Salzmann an. Die im Anschluß an die Vorträge geführten Diskussionen zeigten oft Wege auf, die vorgeführten Ergebnisse zu verbessern und weiterzuführen. Der lebhafte Gedankenaustausch wurde auch außerhalb der Vortragszeiten fortgesetzt.
Die Tagung hatte zugleich, wie schon früher, den Zweck, jungen Mathematikern Gelegenheit zu geben, über ihre ersten Ergebnisse vor einem größeren Kreis zu berichten; sie bot ihnen die Möglichkeit, Kontakte mit älteren Kollegen aufzunehmen oder zu vertiefen.
Durch die Anwesenheit von Herrn Felscher und den Vortrag von Herrn Felgner wurden auch die logischen und grundlagentheoretischen Aspekte ins Blickfeld gerückt.

Es folgen die von den Vortragenden verfaßten Auszüge der siebzehn gehaltenen Vorträge.

Teilnehmer

J. Assion, Frankfurt/M.	D. Barnes, Tübingen
R. Baer, Zürich	H. Bender, Mainz

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

A.Betten, Tübingen
D.Betten, Tübingen
H.J.Birkenstock, Frankfurt/M.
V.Blasig, Frankfurt/M.
R.Blödner, Frankfurt/M.
J.Cofman, London
A.Conea, Frankfurt/M.
P.Dembowski, Frankfurt/M.
U.Dornauf, Frankfurt/M.
U.Felgner, Tübingen
W.Felscher, Freiburg
B.Fischer, Frankfurt/M.
K.-J.Fleischer, Frankfurt/M.
N.Gassel, Frankfurt/M.
S.Hahn, Tübingen
H.Heineken, Erlangen
D.Held, Mainz
O.Kegel, London
D.A.Klarner, Eindhoven/Holl.
H.Koch, Tübingen
H.Kurzweil, Frankfurt/M.
K.Mäueler, Frankfurt/M.
W.Mehl, Frankfurt/M.
G.Michler, Tübingen
P.Plaumann, Tübingen
C.Polley, Tübingen
H.Pommer, Tübingen
O.Prohaska, Frankfurt/M.
C.-M.Ringel, Frankfurt/M.
H.Salzmann, Tübingen
Ch.Schauer, Frankfurt/M.
D.Scheer, Frankfurt/M.
R.Schmidt, Kiel
M.Seib, Frankfurt/M.
K.Strambach, Tübingen
G.Timmesfeld, Frankfurt/M.
H.Walter, Frankfurt/M.
U.Weidicke, Frankfurt/M.
I.Weidig, Karlsruhe
G.Weise, Frankfurt/M.
R.Wille, Bonn

D.W.Barnes: Kohomologische Charakterisierung der Frobeniusgruppen

Bezeichnungen G eine endliche Gruppe, U eine Untergruppe, p eine Primzahl, R ein kommutativer Ring mit 1 und Char $R = p^e$, $\mathfrak{K}$ Kategorie der RG - Moduln, M der von R als U-Modul induzierte G-Modul, $H^{\cdot}(U,-) = \{H^i(U,-) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ Tatescher Kohomologiefunktor auf $\mathfrak{K}$.

Definition Eine p-Verlagerungsgruppe von G ist eine Untergruppe der Form

$$V = \langle \mathcal{N}_G(Q) \mid 1 \neq Q \leq P \rangle,$$

wo P eine p-Sylowgruppe von G ist.

Satz 1 Gleichwertig sind

(a) $H^o(G,R/pR) \approx H^o(U,R/pR)$ und $H^o(G,M) \approx H^o(U,M)$.

(b) $\exists\, r \in \mathbb{Z}$ derart, daß $H^r(G,A) \approx H^r(U,A)$ für alle endliche RG-Moduln A.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

(c) res: $H^{\bullet}(G,-) \to H^{\bullet}(U,-)$ ist eine natürliche Äquivalenz in $\mathfrak{K}$.

(d) $n := |G:U|$ ist prim zu p, und res cor = n : $H^{\bullet}(U,-) \to H^{\bullet}(U,-)$ in $\mathfrak{K}$.

(e) U enthält eine p-Verlagerungsgruppe von G.

<u>Satz 2</u> Sei π die Menge der Primfaktoren von $|U|$. G ist genau dann eine Frobeniusgruppe zu U, wenn für alle $p \in \pi$ und $R = \mathbb{Z}_p$, die Bedingungen (a) - (e) gelten.

D.Betten: Differenzierbare projektive Ebenen

Eine differenzierbare projektive Ebene (P,L,r) habe als Punktmenge P und als Geradenmenge L je eine zur reellen 2-dimensionalen projektiven Ebene homöomorphe Fläche, die mit einer differenzierbaren Struktur der Klasse r versehen ist ($1 \leq r \leq \infty$ oder r = reell analytisch). Schneiden und Verbinden seien r-differenzierbare Operationen. Punktreihen und Geradenbüschel seien r-Teilmannigfaltigkeiten.
Es gilt: Perspektivitäten und Projektivitäten sind r-differenzierbar. Die Geraden durch den Punkt p entsprechen eineindeutig den 1-dimensionalen Teilräumen des Tangentialraumes T_p. Die Kollineationsgruppe Γ ist eine Lie-Gruppe und wirkt als C^1-differenzierbare Transformationsgruppe auf P und auf L. Als Beispiel wurde gezeigt, daß die Moultonebenen nicht differenzierbar sind.

V.Blasig: Kennzeichnung der SC-Gruppen

Def.: Sei S eine Sylowbasis der endlichen auflösbaren Gruppe G und U eine Untergruppe von G_β in die sich S reduziert. Dann sei

$$R_G(U) = \langle x \in G;\ S^x \text{ reduziert sich in } U \rangle$$

Es wurde folgender Satz beweisen:
Sei G eine endliche auslösbare Gruppe.Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Ist U eine nilpotente Untergruppe von G, so enthält $R_G(U)$ eine Cartergruppe von G

(2) G ist eine SC-Gruppe

(3) Cartergruppen abnormaler Untergruppen von G sind Cartergruppen von G

(4) Ist P eine Sylowgruppe von G und X eine Cartergruppe von $N_G(P)$, so ist X ein Systemnormalisator von G

J.Cofman: Eine Bemerkung über involutorische Elationen in endlichen projektiven Ebenen

Es wird gezeigt:
Sei π eine endliche projektive Ebene gerader Ordnung mit einer Kollineationsgruppe Δ, die die folgenden Eigenschaften hat:

(1) Es gibt eine Gerade a in π, so daß Δ involutorische Elationen zu verschiedenen Zentren auf a enthält.

(2) Für einen Punkt $A \in a$ enthält Δ mindestens zwei nichttriviale Elationen mit Zentrum A und Achse a.

(3) Alle Involutionen aus Δ, die a festlassen, sind Elationen.

Dann schneidet jede Elationsachse von Δ, die von a verschieden ist, die Achse a in einem Elationszentrum von Δ.

U.Felgner: Die Inklusionsrelation zwischen Universa und ein abgeschwächtes Fundierungsaxiom

Das Fundierungsaxiom der Mengenlehre (Axiom D in GÖDEL 1940) ist bekanntlich äquivalent mit der Aussage, daß $\mathcal{U}$ (die Klasse aller Mengen) überdeckt werden kann von einer wohlgeordneten Klasse von Mengen $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(V_\beta)$. Wir betrachten ein Axiom, das nur eine "reguläre" Überdeckbarkeit fordert:

(Ü) $$\bigvee_R \left[R \subseteq On \times \mathcal{U} \wedge \mathcal{U} = \bigcup_\alpha R_\alpha \wedge \bigwedge_\alpha R_\alpha \text{ ist Menge} \right],$$

wobei $R_\alpha = \{x; \langle\alpha,x\rangle \in R\}$. (D) impliziert (Ü); nach SPECKER (1957) kann (D) nicht aus (Ü) gefolgert werden. (Ü) gestattet die Definition eines adäquaten Kardinalzahlbegriffes, weshalb (Ü) (nach GAUNTT 1967) von den Axiomen A,B,C der Mengenlehre unabhängig ist.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Ferner:

Satz: (1) Das Fundierungsaxiom (D) ist äquivalent mit der Aussage, daß die Klasse S_4 (TARSKI, BAMS 62(1956)p.601) bezüglich $\subseteq$ konfinal in der Klasse aller Universa liegt.

(2) Das abgeschwächte Fundierungsaxiom (Ü) ist äquivalent mit der Aussage, daß die Klasse aller Universa bezügl. $\subseteq$ unverzweigt ist.

Diese Äquivalenzen gelten im System Σ^{o}(Axiome A,B,C in GÖDEL 1940) vermehrt um das lokale Auswahlaxiom und ein Axiom, das die Existenz einer stark-unerreichbaren Kardinalzahl über jeder Kardinalzahl sichert.

B.Fischer: Erweiterungen von PSU(6.2^2)

Sei G = PSU(6.4). Dann enthält G Untergruppen R der Ordnung $2^8 3^6 5.7$. Mit Hilfe der unitären Transvektionen und einer Konjugiertenklasse solcher Untergruppen kann ein Graph konstruiert werden, der eine transitive Automorphismengruppe A zuläßt. A' ist einfach und hat die Ordnung $2^{17}3^9 5^2 7.11.13$. Möglicherweise ist dieser Graph noch zweimal erweiterbar.

D.Held: Eine neue einfache Gruppe der Ordnung 4.030.387.200

A proof of the following theorem will be discussed:

THEOREM. Let E_o be an elementary abelian group of order 16. Denote by H_o the centralizer of an involution of E_o in the holomorph of E_o. If G is a finite simple group which possesses an involution z such that the centralizer of z in G is isomorphic to H_o, then only the following possibilities occur:

(I) G is isomorphic to $L_5(2)$

(II) G is isomorphic to M_{24}, or

(III) G has order $2^{10}.3^3.5^2.7^3.17$.

Further, we shall take a closer look at the properties of a group G of case (III).

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

D.A.Klarner: Pólya's Enumeration Theory

An exposition of Pólya's enumeration theory was given; this theory helps us to enumerate equivalence classes induced in a set by a permutation group on that set.

G.Michler: Erbliche Noethersche Ringe

Es wurden Struktursätze über erbliche noethersche (nicht notwendig kommutative) Ringe angegeben, und die Krull-Dimension von ihnen im halblokalen Fall bestimmt.

P.Plaumann: Homogene Gruppen

Eine lokal kompakte, über der Zusammenhangskomponente kompakte Gruppe, deren (topologische) Automorphismengruppe auf den von 1 verschiedenen Elementen transitiv operiert, ist entweder diskret oder isomorph zur additiven Gruppe eines Vektorraums.

H.Pommer: Subnormalität in topologischen Gruppen

Eine abgeschlossene Untergruppe A einer topologischen Gruppe G heißt topologisch subnormal in G, wenn A durch eine endliche oder transfinite Subnormalreihe $G = A_0 \trianglerighteq A_1 \trianglerighteq \dots$ (A_α abgeschl.) erreichbar ist. Der Vortrag soll eine Beweisskizze des folgenden Satzes geben:
In jeder topologischen Gruppe G mit kompakter Zentrumsfaktorgruppe bildet die Menge aller topologisch subnormalen Untergruppen einen vollständigen Teilverband des Verbandes aller abgeschlossenen Untergruppen von G.

O.Prohaska: Charakterisierung endlicher Hallebenen durch Kollineationsgruppen

Satz: Sei $\mathbb{A} = \mathbb{P}^W$ affine Ebene endlicher Ordnung $n = m^2$, Γ Kollineationsgruppe von $\mathbb{P}$ mit $W^\Gamma = W$, so daß

(1) Γ hat drei Punktbahnen ℓ, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{n}$ und $\ell \cup \mathfrak{f} = \mathfrak{p}(W)$

(2) Γ hat Rang 3 auf der Menge $\mathfrak{n}$ der affinen Punkte von $\mathbb{A}$

(3) Γ operiert regulär auf ℓ

(4) $|\ell| = m + 1$.

Dann ist $\mathbb{A}$ ableitbare Translationsebene; ℓ ist Derivationsmenge für $\mathbb{A}$ und Γ enthält die Gruppe T der Translationen von $\mathbb{A}$.

Folgerung: Ist $\mathbb{A}$ eine Hallebene, so gibt es eine Kollineationsgruppe Γ von $\mathbb{A}$ mit den Eigenschaften (1) bis (4) des Satzes; die abgeleitete Ebene $\ell\mathbb{A}$ ist desarguessch und Γ enthält die Gruppe der Dilatationen von $\ell\mathbb{A}$.

R.Schmidt: Der Untergruppenverband des direkten Produktes zweier Gruppen

Sei G das direkte Produkt der Gruppen H und K. Sei $U \leq H$ und sei σ ein Epimorphismus von U auf einen Faktor V/W von K. Dann ist $D(U,\sigma) := \{xy \mid x \in U \text{ und } y \in x^{\sigma}\}$ eine Untergruppe von G, und alle Untergruppen von G können auf diese Weise erhalten werden. Dabei ist $D(U,\sigma) \leq D(V,\tau)$ genau dann, wenn $U \leq V$ und $x^{\sigma} \leq x^{\tau}$ für alle $x \in U$ ist. Zwei Anwendungen dieser Bemerkung wurden behandelt.

M.Seib: Endliche projektive Ebenen mit transitiver abelscher Kollineationsgruppe

Eine Polarität einer endlichen projektiven Ebene der Ordnung s^2 heiße unitär, wenn auf jeder nichtabsoluten Geraden s+1 absolute Punkte liegen.

Satz: Eine endliche projektive Ebene der Ordnung s^2 mit transitiver abelscher Kollineationsgruppe besitzt unitäre Polaritäten.

K.Strambach: Homöomorphismengruppen der reellen Zahlengeraden mit wenig Fixpunkten

Sei Γ eine Homöomorphismengruppe der reellen Zahlengeraden, so daß jede Standgruppe zweier verschiedener Punkte nur aus der Identität besteht. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(1) Γ ist als Permutationsgruppe isomorph zu einer nicht-abelschen Untergruppe von $L_2 = \{x \to ax + b;\ a > 0,\ b \in \mathbb{R}\}$ und hat genau einen abelschen Normalteiler $\neq 1$.

(2) Die Gruppe Γ operiert auf jeder ihrer Bahnen primitiv oder regulär, und es gibt einen Punkt, dessen Standgruppe weder 1 noch Γ ist.

(3) Γ operiert auf einer aus mehreren Punkten bestehenden Bahn B primitiv, aber nicht regulär, und es gibt einen echten Normalteiler $N \neq 1$, der von der Kommutatorgruppe Γ' verschieden ist.

F.G.Timmesfeld: <u>4-Transpositionen in endlichen Gruppen</u>

Sei D eine Klasse konjugierter Involutionen in seinem Erzeugnis. Sei ferner die Ordnung des Produktes von jeweils zwei Involutionen aus D 1,2,3 oder 4. Dann enthält D eine Teilmenge B, so daß das Erzeugnis von B isomorph zu $GL(3,2)\times\langle t\rangle$ ist, wobei $t^2 = 1$ ist.

R.Wille: <u>Affine Koordinatisierung und primitive Klassen</u>

Für eine allgemeine Algebra A bezeichne $\Gamma(A)$ die Geometrie der Kongruenzklassen von A. Frage: Gilt in einer affinen Geometrie $\Gamma(A)$ der Satz von Desargues? Folgende Teillösungen dieser Frage wurden angegeben:
<u>Satz 1:</u> Ist für jede Algebra A einer primitiven Klasse $\mathfrak{A}$ $\Gamma(A)$ affin, dann gilt der Satz von Desargues in $\Gamma(A)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

<u>Satz 2:</u> Ist $\Gamma(A)$ affin und gibt es wenigstens zwei Translationen mit verschiedenen Richtungen in $\Gamma(A)$, dann ist $\Gamma(A)$ desarguessch.

<u>Korollar:</u> Ist $\Gamma(A)$ affin und endlich, dann ist $\Gamma(A)$ desarguessch.

Für den Beweis dieser Sätze wurden Methoden entwickelt, die gleichzeitig zu einem allgemeinen Satzschema für "Sätze von Malcev Typ" (s.GRÄTZER: "Two Malcev type theorems in universal algebra", Preprint) führen.

K.Strambach, Tübingen