MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 5 /1969

Partielle Differentialgleichungen

2.3. bis 8.3.1969

Die fünfte Tagung "Partielle Differentialgleichungen" stand wieder unter der Leitung von W. Haack (Berlin) und G. Hellwig (Aachen). Es war die bisher größte Tagung mit 71 Teilnehmern und 41 Vorträgen. Die Vorträge galten allen Teilgebieten der partiellen Differentialgleichungen, wobei nichtlineare Probleme und funktionalanalytische Methoden im Vordergrund standen.

Die Betreuung in den schönen neuen Gebäuden des Institutes war vorbildlich.

<u>Teilnehmer</u>

H. Amman (Freiburg)
V.G. Avakumovič (Marburg)
N.W. Bazley (Genf)
G. Cimmino (Bologna)
K. Deimling (Karlsruhe)
C.R. DePrima (Pasadena)
J. Douglas (Chicago)
J. Dufner (Freiburg)
M.S.P. Eastham (Southampton)
W. Eberhard (Marburg)
C. Engeln (Aachen)
M. Engert (Aarhus)
W.N. Everitt (Dundee)
G. Fichera (Rom)
J. Frehse (Frankfurt)
H. Fried (Freiburg)
K.H. Goldhorn (Mainz)
R.D. Grigorieff (Frankfurt)
W. Gromes (Marburg)
W. Haack (Berlin)
K. Habetha (Berlin)
K. Hainer (Frankfurt)
E. Heinz (Göttingen)
G. Hellwig (Aachen)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

M. Hervé (Paris)
R.-M. Hervé (Paris)
E. Hölder (Mainz)
H. Hornich (Wien)
W. Jäger (Göttingen)
J. Jaenicke (Berlin)
K. Jörgens (München)
F. John (New York)
E. Kreyszig (Düsseldorf)
A. Kufner (Prag)
H. Lange (Berlin)
H. Lange (Freiburg)
N. Latz (Berlin)
R. Leis (Bonn)
H. Levine (Zürich)
I. S. Louhivaara (Jyväskyla/Finnland)
K. Menzel (Freiburg)
A.L. Mignot (Straßburg)
C. Müller (Aachen)
J. Nečas (Prag)
K. Nickel (Karlsruhe)
H. Niemeyer (Marburg)
J. Nitsche (Freiburg)
J.C.C. Nitsche (Minneapolis)
H. Pachale (Berlin)
L. E. Payne (Zürich)
A. Pendl (Freiburg)
M. Reichert (Frankfurt)
A.R. Said (Aachen)
G. Schleinkofer (Karlsruhe)
U.-W. Schmincke (Aachen)
B. Schmitt (Karlsruhe)
M. Schneider (Berlin)
Ch. Simader (München)
U. Staude (Mainz)
F. Stummel (Frankfurt)
M. Teuffel (Aachen)
Fr. Tomi (Göttingen)
Ch. Vidic (Berlin)
W. von Wahl (Göttingen)
J. Walter (Aachen)
W. Walter (Karlsruhe)
N. Weck (Bonn)
H. Weigel (Frankfurt)
J. Weidmann (München)
W. Wendland (Berlin)
N.M. Wigley (Bonn)

Vortragsauszüge

N.W. BAZLEY: Bestimmung des Verzweigungsverhaltens durch numerische Methoden

Es wird das Verzweigungsverhalten der nichtlinearen Eigenwertaufgabe $A(u) = \lambda u$ bestimmt. Wir setzen voraus, daß der Operator A zerlegt werden kann in $A = B + C + D$ mit B linear selbstadjungiert, C homogen vom Grad α, D von höherer Ordnung. Gesucht werden Lösungen, die von der trivialen abzweigen. Als Verzweigungspunkte kommen nur Eigenwerte von B in Frage. Für den Fall eines einfachen Eigenwertes μ_o gibt es bekanntlich zwei Verzweigungstypen, nämlich für α gerade und α ungerade. Das Verhalten wird bestimmt durch $(C(v),v)$, wobei v der zu μ_o gehörige Eigen-

vektor des linearen Operators B ist: $Bv = \mu_o v$. Für ungerade α kommt es im wesentlichen auf das Vorzeichen des Verzweigungskoeffizienten $(C(v),v)$ an.

Wir behandeln den Fall eines Operators B, dessen Spektrum nicht explizit berechnet werden kann, dessen Eigenwerte aber durch untere und obere Schranken approximiert werden können. Mit Hilfe solcher Schranken und durch Approximation des Eigenvektors gelingt es, das Vorzeichen von $(C(v),v)$ und damit das Verzweigungsverhalten an der Stelle μ_o zu bestimmen.

G. CIMMINO: <u>Quasikonforme Abbildungen von Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension</u>

Der Begriff einer quasikonformen Abbildung zweier ebener Gebiete aufeinander läßt sich auf den Fall von mehr als zwei Dimensionen nicht eindeutig ausdehnen; so werden hier verschiedene Klassen von quasikonformen Abbildungen für Mannigfaltigkeiten höherer Dimension definiert und ihre gegenseitigen Verhältnisse untersucht. Diesen Abbildungsklassen sind auch gewisse Klassen von linearen elliptischen selbstadjungierten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zugeordnet, für die besondere Regularitätseigenschaften der schwachen Lösungen zu erwarten sind.

K. DEIMLING: <u>Anfangswertprobleme für hyperbolische Differential-GLEICHUNGEN UNTER Carathéodory-Voraussetzungen</u>

Wir betrachten das System

$$(1)\qquad \begin{aligned} u_1(x,y) &= g_1(x,y) + \int_{H_1(x,y)} k_1(x,y,\xi,\eta,u)\,d\xi d\eta \\ u_2(x,y) &= g_2(x,y) + \int_{H_2(x,y)} k_2(x,y,\xi,y,u)\,d\xi \\ u_3(x,y) &= g_3(x,y) + \int_{H_3(x,y)} k_3(x,y,x,\eta,u)\,d\eta , \end{aligned}$$

$(x,y) \in B \subset R^{n+m}$, B kompakt, unter Voraussetzungen, die denjenigen von Carathéodory für gewöhnliche Differentialgleichungen entsprechen. Dieses System enthält insbesondere einige Anfangswertprobleme für $u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y)$ und einige mehrdimensionale

hyperbolische Gleichungen. In der zweiten Gleichung in (1) ist y Parameter. Mit Hilfe schwacher Eindeutigkeitsbedingungen beweisen wir einen ziemlich allgemeinen Satz über Parameterabhängigkeit. Entscheidend sind Kenntnisse über Funktionen mehrerer Veränderlichen, die in der einen Veränderlichen meßbar und in der anderen stetig sind. Beispielsweise verwenden wir den Banachraum $C_x(B) = \{u(x,y)$: stetig in x, meßbar in y mit

$$|u|_x = \int_{B^y} \max_{B_y} |u(x,y)| dy < \infty \}$$

($B_y = \{x \in R^n : (x,y) \in B\}$, B^y = Projektion von B auf R^m.) Mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Schauder wird ein Existenzsatz für (1) bewiesen.

C.R. DEPRIMA: Perturbation ideals associated with Fredholm operators

If A is a Banach algebra and $I \subset A$ which is open and invariant under the action (right or left) of the group G of invertible elements of A, then the set $\{x \in A \mid x + I \subset I\}$ is a closed (right or left) ideal in A. Such an ideal is called a perturbation ideal for I. The structure of such ideals is investigated, especially when I's are related to various classes of Fredholm and semi-Fredholm elements of A with respect to a closed two-sided ideal K. In particular, in case $A = B(X)$, X Banach, characterizations of ideals of Riesz operators are given in order that they be perturbation ideals for various Fredhol subsets of operators. The connection between perturbation ideals and the R-ideals of B. Gramsch is studied.

J. DOUGLAS, JR.: Uniqueness for nonlinear elliptic equations

Smooth solutions of $\nabla\cdot(a(x,u)\nabla u) = f(x)$ in Ω, $u(x) = g(x)$ om $\partial\Omega$ are unique if $a(x,u) \in C^2(\bar{\Omega} \times R)$ and $a(x,u) \geq \eta > 0$ and $\partial\Omega \in C^1$. This result is extended to more general domains and the general divergence form elliptic equation $\nabla\cdot A(x,u,\nabla u) = f(x,u)$, f monotone increasing in u. Comparison and strong comparison theorems are also derived.

M.S.P. EASTHAM: The spectrum of differential operators with periodic coefficients

An account of recent work on the length of gaps in the spectrum of ordinary and partial differentiAL operators using the method of singular sequences.

W.N. EVERITT: Deficiency indices of ordinary differential operators; a survey

This lecture surveys the theory of deficiency indices of ordinary self-adjoint differential operators derived from formally self-adjoint differential expressions. Comparisons are made between the results obtained by operator methods and those obtained by a direct study of the associated differential equation. Some unsolved problems will be stated.

G. FICHERA: Orthogonal invariants of elliptic operators

The following problem is considered: (1) $Lv + \lambda v = 0$, $v \in V$, where L is a linear operator and V a linear variety of a Hilbert space. Under proper assumptions a complete set of orthogonal invariants is defined for this problem, which characterizes the problem with respect to the unitary group. It is shown how the knowledge of one of the orthogonal invariants permits to estimate the eigenvalues of problem (1).

When L is a linear elliptic differential operator a proper construction of the Green operator leads to the explicit computation of the orthogonal invariants.

J. FREHSE: Behandlung von Variationsproblemen mit nichtlinearen Differenzengleichungen

Eine Reihe von Existenz- und Regularitätsaussagen über Lösungen nichtlinearer elliptischer Randwertprobleme vom Eulerschen DifferentiaLgleichungen lassen sich mit Hilfe der zugehörigen

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Eulerschen Differenzengleichungen herleiten, indem nachgewiesen wird, daß die zu Treppenfunktionen fortgesetzten Lösungen der Differenzengleichungen bei gegen Null gehender Schrittweite konvergieren und gewisse andere Abschätzungen gleichmäßig bezüglich der Schrittweite bestehen.- In diesem Sinne werden Differenzenanaloga zur Theorie von Leray-Lions, zur direkten Methode der Variationsrechnung und zu Abschnitten der Regularitätstheorie von Ladyženskaja-Ural'ceva angegeben.

R.D. GRIGORIEFF: Über das Eigenwertproblem elliptischer Differentialgleichungen

Im Anschluß an die Definition verallgemeinerter Eigenvektoren und Richtungen minimalen Wachstums der Resolventen für Eigenwertaufgaben der Gestalt $(\lambda M - L)u = 0$ werden für dicht definierte abgeschlossene Operatoren L in $L^2(\Omega)$, $\Omega \subsetneqq R^n$ beschränkt, einige Ergebnisse über die Existenz unendlich vieler Eigenwerte und die Vollständigkeit des zugehörigen Systems verallgemeinerter Eigenfunktionen bewiesen, die im Spezialfall $M = I$ mit entsprechenden Resultaten von S. Agmon übereinstimmen. Es wird ferner gezeigt, daß die mit Projektionsmethoden näherungsweise berechneten Eigenwerte der algebraischen Vielfachheit nach konvergieren.

W. GROMES: Abschätzung der Spektralmatrix bei elliptischen Systemen

Betrachtet wird ein stark elliptisches System L zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$L : A^{\alpha\beta}\partial^2/\partial x^\alpha \partial x^\beta + B^\alpha \partial/\partial x^\alpha + C.$$

$A^{\alpha\beta}$ usw. sind $n \times n$ - Matrizen. Die Koeffizienten des Systems unterliegen noch zusätzlichen Beschränkungen. Diese sind insbesondere erfüllt, falls für jedes $x = (x^1, x^2, x^3) \in R^3$, $x \neq 0$, die Matrix $\sum_{\alpha,\beta} A^{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$ n verschiedene Eigenwerte hat. Es wird auf einem beschränktem Gebiet D des R^3 die Eigenwertaufgabe

behandelt: $-(L - \lambda E)u(x) = 0$ in D und $u = 0$ längs des Randes von D. Bezeichnen wir mit $\phi_{i,\nu}(x)$ die i-te Komponente der ν-ten Eigenvektorfunktion und mit λ_ν ($\lambda_\nu \leqq \lambda_{\nu+1}$) die Eigenwerte, so gilt die Abschätzung

$$\Big| \sum_{\lambda_\nu \leqq t} \phi_{i,\nu}(x)\phi_{i,\nu}(x) - c_i t^{3/2} \Big| \leqq K(x)t, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Die Konstanten c_i hängen ausschließlich von den Matrizen $A^{\alpha\beta}$ ab.

K. HAINER: Das Maximumprinzip zur Lösung des Dirichletproblems mit Differenzenverfahren.

Für eine Klasse linearer elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung auf beschränkten Gebieten des R^n wird die Lösbarkeit des Dirichletschen Randwertproblems mit Hilfe des Maximumprinzips bewiesen analog zur Perronschen Methode, wobei jedoch an die Stelle von Ober- und Unterfunktionen die Lösungen der Differenzenapproximationen treten. Damit erhält man einen Satz, der gleichzeitig die Existenz der Lösung dieser Randwertaufgabe sowie die Konvergenz der Differenzenapproximation im Rahmen des Maximumprinzips ergibt.

Für die diskreten Dirichletprobleme folgt aus dem Maximumprinzip die Beschränktheit einer Schar von Lösungen, in Abhängigkeit von der Maschenweite des Punktgitters als Scharparameter. Werden die Gitterfunktionen fortgesetzt zu linearen stetigen Funktionalen auf einem geeigneten Funktionenraum, so erhält man aus der Kompaktheit dieser Schar die Existenz von beschränkten, meßbaren schwachen Lösungen der Differentialgleichung und aus dem bekannten Weylschen Lemma deren Regularität im Innern des Gebietes. Mit Hilfe von Schrankenfunktionen ergibt sich für jede Grenzfunktion die Stetigkeit in den Randpunkten, und mit der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung des Dirichletschen Randwertproblems erhält man die Konvergenz der Schar. Schließlich kann man für durch Faltung erzeugte stetige Näherungslösungen die gleichmäßige Konvergenz im Innern und auf dem Rand des Gebietes zeigen.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

E. HEINZ: Eine Ungleichung vom isoperimetrischen Typ für Flächen konstanter mittlerer Krümmung

Es sei $x : \bar{G} \to R^3$ eine Vektorfunktion der Klasse $C^2(G) \cap C^0(\bar{G})$, wobei G ein einfach zusammenhängendes, von einer geschlossenen Jordankurve Γ berandetes Gebiet der w-Ebene ($w = u + iv$) bedeutet. Ferner sei (1) $\Delta x = 2H(x_u \times x_v)$ und (2) $x_u^2 = x_v^2$; $x_u \cdot x_v = 0$ für $w \in G$ sowie (3) $h = |H| \max_{|w| \leq 1} |x(w) - c| < 1$, wobei c ein konstanter Vektor im R^3 ist. Mit (4) $A_G(x) = \frac{1}{2}\iint_G (x_u^2 + x_v^2)dudv$ und (5) $L_\Gamma(x) = \int_\Gamma |dx|$ gilt dann die Abschätzung

$$(6) \quad A_G(x) \leq \frac{1}{4\pi}\,\frac{1+h}{1-h}\,L_\Gamma(x)^2 ,$$

die im Falle H = 0 in die bekannte isoperimetrische Ungleichung für Minimalflächen übergeht. Dabei wird zusätzlich $A_G(x) < +\infty$ gefordert. Der Beweis von (6) beruht auf einer eingehenden Untersuchung des Randverhaltens der Lösungen des Systems (1).

R.-M. et M. HERVÊ: Les fonctions surharmoniques associées à un opérateur elliptique à coefficients discontinus de la forme

$$Lu = -\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_i a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i} + d_j u\Big) + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

(Vorgetragen von M. Hervé)

Les coefficients appartiennent à des L^p convenables, et les solutions sont prises au sens distributions.

Ce travail fait suite à un important article de G. Stampacchia (Ann. Inst. Fourier 1965). En utilisant ses résultats, nous montrons d'abord que les solutions locales forment un système de fonctions harmoniques (au sens de M. Brelot), les sursolutions coincident avec les fonctions surharmoniques $\in W^{1,2}$.

Puis nous démontrons un principe du maximum: toute fonction sousharmonique, majorée p. p. au voisinage de la frontière par une fonction $\in W_0^{1,2}$, est ≤ 0. Il en résulte l'unicité de la solution du problème de Dirichlet (au sens variationnel), puis sa coincidence avec la solution au sens de Perron-Wiener-Brelot.

Nous étudions aussi la stabilité par balayage de la classe des fonctions surharmoniques ≥ 0, $\in W_0^{1,2}$ ou $W_{loc}^{1,2}$. Enfin, nous caractérisons les potentiels $U^\mu \in W_0^{1,2}$: ce sont les potentiels d'énergie finie et $\langle LU^\mu, U^\mu\rangle = \int U^\mu d\mu$.

E. HÖLDER: Über Diskontinuitäten bei hyperbolischen Differentialgleichungen

Soviel ich sehe, ist die Cauchy-Kowalevskysche Konstruktion einer analytischen Lösung zur Zeit - abgesehen von den graphischen und numerischen Verfahren (Guderley und andere) - die einzige Möglichkeit, eine irreguläre, geknickte Extremalfläche mit Randstück in strenger Weise herzustellen. Das entspricht also einer stationären Überschallströmung mit Stoßfront (Knick) um ein Profil mit Ecke (Rand). In diesem Fall findet sich in Oswatitsch's Gasdynamik die von Crocco gefundene Beziehung zwischen Wand- und Stoßkrümmung am Profil. Diese kann man durch ein Iterationsverfahren auf die höheren Ableitungen am Profil bzw. an der Stoßfront in der Ecke ausdehnen. Das liefert eindeutig eine formale Potenzreihe für die Cauchyschen Anfangsdaten am Rand. Es verbleibt nur der Nachweis der Holomorphie jener Potenzreihe - etwa mit Hilfe der Majorantenmethode.

H. HORNICH: Differentialgleichungen in metrischen Räumen

Die Übertragung des Begriffs einer Differentialgleichung ist nicht nur auf lineare Räume möglich, sondern auch auf allgemeine metrische Räume, in denen je zwei Punkte durch Bogen verbunden werden können und in denen eine Richtung definiert werden kann. Es zeigt sich, daß die im R^n geltenden Existenzsätze für lineare partielle Differentialgleichungen sich auf solche metrischen Räume übertragen lassen.

W. JÄGER: Ein Differentialoperator im Hilbertraum

Sei $I := (a,\infty)$ ein Intervall und X ein Hilbertraum über den komplexen Zahlen. Es wird ein Differentialoperator L der Gestalt $-d^2/dr^2 + B(r) + C(r)$ untersucht, der auf Funktionen $\phi : I \to X$ wirkt. Dabei ist $B(r)$ ein nichtnegativer, selbstadjungierter Operator, $C(r)$ ist ein linearer, symmetrischer Operator, der sich im wesentlichen durch $B^{1/2}(r)$ abschätzen läßt. L wird als unbeschränkter Operator im Hilbertraum aller Lebesgue-meßbaren

Abbildungen $\phi : I \to X$ mit $\int_I ||\phi(r)||^2 dr < \infty$ aufgefaßt. Bei geeigneter Wahl des Definitionsbereiches ist L ein symmetrischer, halbbeschränkter Operator. Es wird die Spektralschar der Friedrichsschen Fortsetzung von L mit Hilfe von Eigenfunktionen dargestellt. Ist S^n die n-Sphäre, Λ der Beltramioperator auf S^n, so sind die Voraussetzungen des angegebenen Entwicklungssatzes z. B. erfüllt, wenn wir $X := L^2(S^n)$, $B(r) := -\frac{1}{r^2}\Lambda$ setzen und C(r) als beschränkten Operator mit in r rasch fallender Norm wählen.

F. JOHN: Instabilität elastischer Wellen mit endlicher Amplitude

Die nichtlineare Wellengleichung $u_{tt} - (f(u)u_x)_x = 0$ hat nach P. D. Lax keine nichttrivialen, in der ganzen (x,t)-Ebene definierten Lösungen, wenn die Größe f^5/f'^4 beschränkt ist. Bei Betrachtung ebener Wellen in der nichtlinearen Elastizitätstheorie wird man allgemeiner aus Systeme der Form

$$(1) \qquad U_{tt} - (F(U)U_x)_x = 0$$

geführt, wo U ein Vektor und F(U) eine Matrix ist. Auch hier kann man erwarten, daß "im allgemeinen" keine nichttrivialen, für alle (x,t) definierten Lösungen existieren. Ein allgemeines Kriterium für die Richtigkeit dieser Aussage ist schwer abzuleiten, und es gibt auch explizite Ausnahmen. Die Richtigkeit der Aussage wird hier gezeigt für den Fall, daß das System (1) streng hyperbolisch und annähernd separabel ist, das heißt, daß F positive verschiedene Eigenwerte hat und Eigenvektoren, die sich nur wenig mit U ändern.

A. KUFNER: Anwendung von Räumen mit Belegungsfunktionen bei der Lösung elliptischer Differentialgleichungen

Der Vortrag will eine Übersicht der Ergebnisse geben, die bisher bei der Lösung von Randwertproblemen für elliptische Differentialgleichungen in Sobolevschen Räumen mit Gewichtsfunktionen erreicht wurden. Es wird im wesentlichen das erste Randwertproblem für einen selbstadjungierten Differentialausdruck der Ordnung 2m mit ziemlich allgemeinen Koeffizienten auf endlichen Gebieten untersucht. Die schwache Lösung wird im Raume $W^{(m)}_{p,h}$ gesucht, das heißt im Raume aller Funktionen u, deren Ableitungen $D^i u$ der Ordnung $|i| \leq m$ mit der Potenz $p > 1$ und der Gewichtsfunk-

tion $h(x) > 0$ integrierbar sind. Es werden Bedingungen angegeben, unter denen eine solche Lösung existiert und eindeutig bestimmt ist und durch die Parameter des Randwertproblems abgeschätzt werden kann. Die Belegungsfunktion h kann ziemlich allgemein sein; es wird aber hauptsächlich der Fall untersucht, wenn es sich um Potenzen der Entfernung von gewissen Mannigfaltigkeiten handelt.

H. LANGE: <u>Konstruktive Lösung von Anfangs-Randwert-Aufgaben para-</u>
(Berlin) <u>bolischer Differentialgleichungen in der Ebene</u>

Es wird die konstruktive Lösbarkeit von fünf - auch bei der Wärmeleitungsgleichung üblichen - Anfangs-Randwert-Aufgaben für die parabolische Differentialgleichung $u_t = u_{xx} + Pu_x + Ru + S$ gezeigt. Die Ränder dürfen zeitlich variabel sein.

Mittels einer elementaren Koordinatentransformation, welche den Hauptteil der Differentialgleichung unverändert läßt, werden die Aufgaben mit zeitlich variablen Rändern in solche mit zeitlich konstanten übergeführt. Sodann wird für drei der Anfangs-Randwert-Aufgaben mittels geeigneter Greenscher Funktionen, die sich durch eine sehr einfache Bauweise auszeichnen, je eine Volterrasche Integralgleichung hergeleitet. Die Lösungen dieser Integralgleichungen lassen sich iterativ gewissen und stellen die gesuchten Lösungen der Anfangs-Randwert-Aufgaben dar. Die beiden verbleibenden Aufgaben werden durch geeignete Funktionstransformationen auf die obigen zurückgeführt.

N. LATZ: <u>Über die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem</u>
<u>System dielektrischer Keile</u>

Es wird folgende physikalische Situation betrachtet: Der dreidimensionale Raum sei durch ein endliches System verschiedener Halbebenen mit gemeinsamer Kante in Gebiete unterteilt, die durch Vorgabe von Materialkonstanten je einen schwach leitenden dielektrischen Keil definieren. Fixiert sei fernerhin eine kantenparallele polarisierte Linienquelle. Das induzierte elektromagnetische Beugungsfeld genügt den Forderungen der Maxwellschen

Theorie, aus denen ein ebenes Sprungwertproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung fließt. Dieses wird unter Ausnutzung des Kalküls der Laplacetransformation durch eine Integralgleichung gekennzeichnet. Ihre Lösung im Raum der quadratintegrierbaren Funktionen über der Ebene geschieht nach dem Fixpunktsatz ohne Einschränkung der physikalisch vorgegebenen Wellenzahlquadrate. Die zugehörige Neumannsche Reihe konvergiert punktweise und erfüllt alle Bedingungen des eindeutig lösbaren Problems.

R. LEIS: Zur Theorie elektromagnetischer Schwingungen in anisotropen inhomogenen Medien

Es sei $G_a = R^3 - G$ ein Außenraum, und es seien ε, μ positiv definite symmetrische Matrizen mit vatiablen Koeffizienten, die für genügend große $|x|$ mit der Einheitsmatrix übereinstimmen. Dann gibt es genau eine Lösung (E,H) der Außenraumaufgabe der Maxwellschen Gleichungen

$$(1) \qquad \operatorname{rot} E - i\omega\mu H = J \; ; \qquad \operatorname{rot} H + i\omega\varepsilon E = K$$

mit $n \times E|\partial G = 0$, die der Ausstrahlungsbedingung genügt. Zum Beweis wird als erstes gezeigt, daß für die Maxwellschen Gleichungen das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit gilt. Dazu wird eine Abschätzung herangezogen, die Protter für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung angegeben hat. Hieraus folgt die Eindeutigkeit der Randwertaufgabe. Zum Nachweis der Existenz einer Lösung wird zunächst die Gleichung

$$(2) \qquad -\operatorname{rot}(\mu^{-1}\operatorname{rot} E) + \varepsilon \operatorname{grad}(\operatorname{div}\varepsilon E) + \omega^2 \varepsilon E = G, \qquad n \times E|\partial G = 0,$$

$\operatorname{div} \varepsilon E|\partial G = 0$ mit Hilbertraummethoden in einem beschränkten Gebiet diskutiert und anschließend die Lösung in G_a fortgesetzt.

J. NEČAS: On the regularity of weak solutions of non-linear elliptic equations

We shall consider the Dirichlet problem in a bounded domain Ω for an elliptic equation of order 2k in divergence form

$$(1) \qquad \sum_{|i| \leq k} (-1)^{|i|} D^i (a_i(x, D^j u)) = \sum_{|i| \leq k} (-1)^{|i|} D^i f_i \, .$$

We shall assume that the functions $a_i(x,\zeta_j)$ are continuously differentiable and satisfy certain growth conditions in ζ_j especially

$$\gamma_1\Big(1 + \sum_{|j|=k} |\zeta_j|\Big)^{m-2} \sum_{|i|=k} \xi_i^{\,2} \leq \sum_{|i|,|j|\leq k} \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_j}\xi_i\xi_j \leq \gamma_2\Big(1 + \sum_{|j|=k} |\zeta_j|\Big)^{m-2} \cdot \sum_{|i|\leq k} \xi_i^{\,2}$$

with $2 \leq m < \infty$.

The weak solution of (1) satisfying the Dirichlet boundary condition and lying in the well known Sobolev space $W_m^{(k)}$ is Hölder continuous with its derivatives up to the k-th order provided the dimension N of Ω is $N = 2$. For the dimension $N \geq 3$, the result is not generally true. - Herewith we solve the 19th problem of D. Hilbert for a single equation.

H. NIEMEYER: <u>Nichtselbstadjungierte Eigenwertprobleme</u>

Es wird über eine Verbesserung der Carlemanschen Formel über die Eigenwerte nichtselbstadjungierter elliptischer Differentialgleichungen berichtet, die mit Hilfe eines kürzlich von Malliavin angegebenen Satzes erfolgt. Diese Verbesserung widerlegt eine von Subhankulov hinsichtlich der Eigenwertverteilung aufgestellte Vermutung.

J. NITSCHE: <u>Zum Ritzverfahren bei Randwertproblemen</u>

Bei Verwenden linearer Splinefunktionen führt das Ritzsche Verfahren für das Dirichletproblem einer elliptischen Gleichung zweiter Ordnung auf ein System von Differenzengleichungen. Mit Hilfe einer allgemeinen Abschätzung für das Ritzverfahren sowie von Approximationssätzen für Splinefunktionen werden Fehlerabschätzungen für die Differenzengleichungen gewonnen. Für konvexe Bereiche ergibt sich so u.a. die Fehlerordnung h (Gitterbreite) in der Maximumnorm allein unter der Voraussetzung der Existenz quadratisch integrierbarer zweiter Ableitungen der Lösung.

J.C.C. NITSCHE: Ein Variationsproblem mit Ungleichungen als Randbedingungen - oder - Ein billiger Hut für den Bruder Giacomettis

Es handelt sich um die Frage, was geschieht, wenn ein Hindernis gegen ein Seifenhäutchen bewegt wird, oder, mathematisch formuliert, um die Bestimmung einer Fläche kleinsten Inhaltes durch eine gegebene Kurve, wobei die Fläche aber gezwungen ist, außerhalb einer konvexen Menge zu verbleiben. Nach der Diskussion einiger allgemeinen Fälle beschäftigt sich der Vortrag hauptsächlich mit einem Problem, welches von H. Lewy (J. Math. Mech. 17,861-884 (1968)) kürzlich für den Fall der Minimierung des Dirichletschen Integrals behandelt worden ist. Das Hindernis besteht hier aus einem (von oben gesehenen) konvexen Kurvenstück. Unter einer Symmetrievoraussetzung wird die Existenz und Eindeutigkeit einer Fläche kleinsten Inhaltes bewiesen, welche von einer ebenen konvexen Kurve berandet ist und oberhalb des Hindernisses liegt. Die feineren Eigenschaften der Lösungsfläche werden untersucht.

L. E. PAYNE: Growth estimates for a class of improperly posed problems

We wish to study growth properties of solutions of

(A) $M\partial^2u/\partial t^2 - Nu = 0$ in $I : [0,\infty)$; $u(\cdot,t) = f(\cdot)$, $u,_t(\cdot,t) = g(\cdot)$

where M and N are symmetric, time independent operators defined on the same dense subdomain of a Hilbert space H, and M is assumed positive definite. The norm is defined as $||u||_t{}^2 = (u,Mu)_t$ where $u(\cdot,t)$ is a Hilbert space valued function of a single parameter t. For solutions of (A) the following conservation law holds: $E(t) = ||\dot{u}||_t{}^2 + (u,Nu)_t = E(0)$. By use of logarithmic convexity arguments results of the following type are obtained.

1) If $E(0) < 0$, all solutions grow exponentially in norm.
2) If $E(0) = 0$, any solution either grows exponentially or remains bounded.
3) If $E(0) > 0$, any solution either grows exponentially or is of order less than $t^{2+\varepsilon}$ for any $\varepsilon > 0$.
4) If $E(0) > 0$, $||u||_o' \geq (E(0))^{1/2}$, all solutions grow exponentially in norm.

By making further assumptions on N or on $||u||_o'$ more precise

results can be obtained. These arguments have been used by Knops and the author to study growth properties for solutions of equations of linear elastodynamics.

M. REICHERT: Über den Zusammenhang der Lösungsmenge bei hyperbolischen Differentialgleichungen und Volterraschen Integralgleichungen

Bei hyperbolischen Differentialgleichungen und Volterraschen Integralgleichungen wird die Gesamtheit der Lösungen untersucht. Die Voraussetzungen sind dabei recht allgemein, auf die genaue Formulierung soll hier verzichtet werden. Zunächst werden in geeigneten Banachräumen B Operatoren A definiert, die B vollstetig in sich abbilden, un-d wobei die Fixpunkte der Abbildung Az = Z Lösungen der oben genannten hyperbolischen Differentialgleichungen bzw. Volterraschen Integralgleichungen liefern. Es wird behauptet, daß die Fixpunkte der Abbildung Az = Z eine zusammenhängende Menge in B bilden. Der Beweis wird mit Hilfe der Indextheorie von Leray und Schauder indirekt geführt: Zunächst kann man zeigen, daß sich in den Banachräumen B disjunkte kompakte Mengen durch disjunkte, abgeschlossene, kugelhomöomorphe Umgebungen trennen lassen. Dann folgt aus der Annahme, die Fixpunktmenge wäre nicht zusammenhängend, daß in B zwei disjunkte, abgeschlossene, kugelhomöomorphe Mengen U_1 und U_2 existieren, in deren Innern sämtliche Fixpunkte von Az = Z liegen. Durch Angabe eines geeigneten Homotopieoperators kann man beweisen, daß der Index der Fixpunktmenge in U_1 und U_2 auf dem Rand von U_1 bzw. U_2 gleich 1 ist. Damit läßt sich aus der Indexformel sofort ein Widerspruch herleiten.

G. SCHLEINKOFER: Eindeutigkeit der Lösung des ersten Randwertproblems und des Cauchyproblems bei parabolischen Differentialgleichungen mit unstetigen Anfangswerten

Wir betrachten die Differentialgleichung (1):

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_i x_j} + g(t,x,u,u_x)$$

in dem Gebiet $G = (0,T)\times\Omega$, wobei $\Omega\subset R^n$ ist, und definieren

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

$R_p := \{0\} \times \overline{\Omega} \cup (0,T] \times \partial\Omega$, $G_p := \overline{G} - R_p$. $N \subset \Omega$ sei Nullmenge, $R^* := R_p - \{0\} \times N$ und $\eta(t,x) \in C^0(R^*)$.

Existieren positive Konstanten a, A und $\alpha \in (0,1)$, so daß die Abschätzungen $|a_{ij}| \leqq A$ in $\overline{G}$, $|a_{ij}(t,x) - a_{ij}(0,\xi)| \leqq A(|x-\xi|^\alpha + t^{\alpha/2})$ für $\xi \in U(N)$ und $\sum_{i,j} a_{ij}(0,\xi)\zeta_i\zeta_j \geqq a|\zeta|^2$ für $\xi \in U(N)$ gelten, dann besteht folgender Eindeutigkeitssatz: Falls das nichtlineare Glied g der Ungleichung $g(t,x,z,p) - g(t,x,\overline{z},\overline{p}) \leqq K\{(1 + x^2)(z - \overline{z}) + (1 + |x|)\Sigma|p_i - \overline{p}_i|\}$, $z \geqq \overline{z}$, genügt, gibt es höchstens eine Lösung der Differentialgleichung (1) mit $u = \eta$ auf R^*, für die mit einer geeigneten Konstante M gilt $|u| \leqq M\exp(Mx^2)$ in $\overline{G} - \{0\} \times N$. Der Beweis verwendet vorwiegend die Theorie der Differentialungleichungen.

U.-W. SCHMINCKE: Über das Verhalten der Eigenfunktionen eines singulären elliptischen Differentialoperators

Für die Eigenfunktionen elliptischer Differentialoperatoren der Form $Au = \frac{1}{k}\left(\sum_{j,l=1}^{n} \left(i\frac{\partial}{\partial x_j} + b_j\right)a_{jl}\left(i\frac{\partial}{\partial x_l} + b_l\right)u + qu\right)$ mit regulären Koeffizienten, aber nicht notwendig beschränktem Grundgebiet - insbesondere also Schrödingeroperatoren - werden Aussagen über das Randverhalten gemacht, welche, auf den Schrödingeroperator im R^n $(n \geqq 2)$ spezialisiert, lauten: I. Alle Eigenfunktionen gehen für $|x| \to \infty$ gegen Null. II. Die zu isolierten Eigenwerten endlicher Vielfachheit gehörenden Eigenfunktionen verschwinden mit wachsendem $|x|$ exponentiell. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung von in dieser Form bekannten Resultaten, die Schnol 1957 erzielte.

Ch. G. SIMADER: Zur L_p-Theorie des Dirichletschen Randwertproblems

Sei $G \subset R^n$ $(n \geqq 2)$ offen, beschränkt, sei $B(\phi,\psi) = \sum_{\substack{|\alpha| \leqq m \\ |\beta| \leqq m}} (a_{\alpha\beta}D^\alpha\phi, D^\beta\psi)_0$ $(\phi,\psi \in C_0^\infty(G)$, $m \geqq 1$, $a_{\alpha\beta} \in L_\infty(G))$ und sei B gleichmäßig elliptisch, das heißt $\left|\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\zeta^\alpha\zeta^\beta\right| \geqq c|\zeta|^{2m}$ für alle $x \in G$, $\zeta \in R^n$,

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

und es gelte für $n = 2$ die Wurzelbedingung. Sei $1 < p, q < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\partial G \in C^{m+1}$. Dann wird bewiesen:

Satz 1 (Verallgemeinerung der Gårdingschen Ungleichung): Sei $a_{\alpha\beta} \in C^1(G)$, $\nabla a_{\alpha\beta} \in L_\infty(G)$, für $|\alpha| = m$. (a) Falls B gleichmäßig elliptisch ist, gibt es zu jedem $1 < p < \infty$ Konstanten c_i $(i = 1,2)$, so daß $\sup\limits_{||\phi||_{\overset{\circ}{W}_{m,q}} = 1} \mathrm{Re}\, B(u,\phi) \geqq c_1 ||u||_{\overset{\circ}{W}_{m,p}} - c_2 ||u||_{L_p}$

für alle $u \in \overset{\circ}{W}_{m,p}(G)$ gilt. (b) Falls B sogar gleichmäßig stark elliptisch ist (das heißt $\mathrm{Re}\, \Sigma a_{\alpha\beta}\zeta^\alpha\zeta^\beta \geqq c|\zeta|^{2m}$) und die $a_{\alpha\beta}$ konstant sind, mit $a_{\alpha\beta} = 0$ für $|\alpha| + |\beta| \leqq 2m - 1$, so gilt

$$\sup_{||\phi||_{\overset{\circ}{W}_{m,q}} = 1} \mathrm{Re}\, B(u,\phi) \geqq c||u||_{\overset{\circ}{W}_{m,p}(G)}.$$

Auch im Fall $p = 2$ ist (a) eine echte Verallgemeinerung der Gårdingschen Ungleichung. Mit Satz 1, (b) wird leicht bewiesen:

Satz 2: Zu jedem $F \in \overset{\circ}{W}{}^*_{m,q}(G)$ gibt es genau ein $u \in \overset{\circ}{W}_{m,p}(G)$ mit $F(\phi) = \sum\limits_{|\alpha|=m} (D^\alpha u, D^\alpha \phi)_o$ für alle $\phi \in \overset{\circ}{W}_{m,q}(G)$.

Unter den Voraussetzungen von Satz 1 wird mit Satz 2 sehr einfach die Fredholmsche Alternative für die Probleme $B(u,\phi) = F(\phi)$ für alle $\phi \in \overset{\circ}{W}_{m,q}$, $u \in \overset{\circ}{W}_{m,p}$, $F \in \overset{\circ}{W}{}^*_{m,q}(G)$ (bzw. das duale Problem) bewiesen. Ebenso lassen sich mit Satz 1 leicht die für $p = 2$ und stark elliptische Bilinearformen von L. Nirenberg erhaltenen lokalen und globalen Differenzierbarkeitssätze auf $1 < p < \infty$ übertragen.

U. STAUDE: Kleine periodische Lösungen bei nichtlinearen elliptischen partiellen Differentialgleichungen

Gesucht werden Lösungen der nichtlinearen elliptischen Differentialgleichung

$$\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\{a_{\alpha\beta}(x;\mu,\lambda)D^\beta u\} = \mu f(x;\mu) + a(x;\mu,\lambda)D^\gamma u D^\delta u,$$

$|\gamma| = |\delta| = 2p$, μ und λ sind Parameter, auf dem Ringgebiet $H = [0,2\pi] \times G$, $G \subset R^n$, wobei $(0,G)$ mit $(2\pi,G)$ identifiziert wird, die auf ∂H die Dirichletbedingungen erfüllen und für kleine $|\mu|$ und $|\lambda - \lambda_o|$ in der "Umgebung" von $u \equiv 0$ sind.

Durch Verwendung der a-priori-Schranken und Regularitätssätze für die lineare Aufgabe im Sobolevraum $H_2^{2p+n+2}(H)$ und sukzessive

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Approximation ergibt sich, daß durch die Lösung von endlich vielen Verzweigungsgleichungen für kleine $|\mu|$ und $|\lambda - \lambda_0|$ reguläre Lösungen der Aufgabe bestimmt sind.

Diese Methode kann übertragen werden auf Systeme, die im Sinne von Nirenberg stark elliptisch sind, und dann angewendet werden auf das Taylorproblem der Strömung von Flüssigkeit zwischen rotierenden Zylindern, die längs der Zylinder periodisch ist.

F. STUMMEL: Theorie der Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolevschen Räumen

Der Vortrag gibt einen Überblick über eine funktionalanalytische Theorie, die einige wichtige funktionalanalytische Methoden zur Behandlung von Rand- und Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen zu einer einheitlichen, deduktiven und detaillierten Theorie zusammenfaßt bzw. vervollständigt. Ausgangspunkt ist eine Gleichungstheorie in einem Hilbertschen Raum für Gleichungen mit zwei Bilinearformen und einem Eigenwertparameter. Unter geeigneten Voraussetzungen, charakterisiert durch die Begriffe (stark) koerzitiv, regulär und gegebenenfalls symmetrisch, werden darin Aussagen über die Gültigkiet der Fredholmschen Alternative, die stetige Lösbarkeit und Existenz des Greenschen Operators, die Verteilung der Eigenwerte sowie Entwicklungssätze nach dem System der Eigenvektoren hergeleitet. Nach Einführung von abstrakten Sobolevschen Räumen, einer Verallgemeinerung der bekannten Sobolevschen Funktionenräume, wird diese Theorie dann spezieller auf beschränkte, V-elliptische Bilinearformen bzw. Operatoren auf diesen Räumen angewandt. Ein weiteres Kapitel beschäftigt sich mit linearen stetigen Funktionalen auf abstrakten Sobolevschen Räumen, u. a. wird darin unter geeigneten Voraussetzungen über die Koeffizienten der Bilinearformen bzw. Operatoren und die Sobolevschen Räume die Regularität verallgemeinerter Lösungen von Randwertaufgaben in der abstrakten Theorie gezeigt. Die Theorie wird schließlich an konkreten Beispielen erläutert.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

F. TOMI: Über semilineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Es sei u eine in dem beschränkten Gebiet G des R^n definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion, welche der Ungleichung $|Lu| \leqq A + B|\nabla u|^2$ genügt. Dabei sei $L: = \Sigma\, a_{ij}(x)\partial^2/\partial x_i \partial x_j$ ein elliptischer Differentialoperator mit in $\overline{G}$ stetigen Koeffizienten a_{ij} und A, B seien Konstanten. Dann gilt für alle kompakten Teilmengen K von G die a-priori-Abschätzung

$$\sup_K |\nabla u| \leqq C(K,L,A,B,\sup_G |u|).$$

Unter geeigneten Voraussetzungen an die Randwerte von u gilt eine entsprechende Abschätzung bis zum Rand von G. Diese Resultate liefern Existenzsätze für das Dirichletproblem der Gleichung $Lu = f(x,u,\nabla u)$ mit einer nichtlinearen Funktion f.

C. VIDIC: Über zusammengesetzte Systeme linearer partieller Differentialgleichungen

Ein System linearer partieller Differentialgleichungen für n unbekannte Funktionen ($n \geqq 3$) wird hier als "zusammengesetzt" bezeichnet, wenn die Zahl r der reellen Charakteristiken der Bedingung $0 < r < n$ genügt. Für den Fall $n = 3$ und gewisse Rand- und Anfangswertaufgaben werden Existenz- und Eindeutigkeitssätze bewiesen, wobei Bedingungen an die Größe des zugrundegelegten Gebietes gestellt werden. Das behandelte Problem steht im engen Zusammenhang mit der Dirichletschen Randwertaufgabe bei elliptischen Gleichungen zweiten Grades, die die gesuchte Funktion selbst enthalten.

W. von WAHL: Klassische Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen im Großen

Es wird zunächst das Cauchyproblem für die gewöhnliche Differentialgleichung $d^2u/dt^2 + A(t)u = M(t,u,du/dt)$ in einem Hilbertraum betrachtet. Dabei sind die A(t) eine Schar selbstadjungierter

positiver Operatoren mit festem Definitionsbereich, M ein nichtlinearer Operator. Unter geeigneten Voraussetzungen über M und die Anfangswerte läßt sich eine Lösung im Großen finden, die Werte in $D(A^{k/2}(0))$ besitzt, $k \geqq 2$ und ganz. Als Anwendungen ergeben sich die Existenz klassischer Lösungen auf $R^+ \times R^n$ des Cauchyproblems für: 1. $d^2u/dt^2 + A(t)u + F'(|u|^2)u = 0$, $n \leqq 6$, wobei die $A(t)$ elliptische Operatoren der Ordnung 2 sind und F eine Wachstums- und Positivitätsbedingungen genügende Funktion ist; 2. $d^2u/dt^2 + A(t)u + F(t,u,du/dt,\partial u/\partial x_1,\ldots,\partial u/\partial x_n) = 0$ mit kleinen Anfangswerten, Operatoren $A(t)$ wie eben und einer hinreichend regulären Funktion F, die bezüglich t in geeigneter Weise abfällt (gedämpfte Wellengleichung).

J. WALTER: Wesentliche Selbstadjungiertheit halbbeschränkter Schrödingeroperatoren

Sei $n \geqq 2$ und G ein Gebiet des R^n. Der in $C_0^\infty(G)$ definierte Schrödingeroperator $\sum_{j,k=1}^{n} D_j a_{jk} D_k + q$, $D_k = i\frac{\partial}{\partial x_k} + b_k$, wird mit A bezeichnet. q sei ein sogenanntes Stümmelpotential. Man wähle Funktionen $\eta(x) \geqq 0$, $\sigma(x) \geqq 0$ so, daß

$$\Sigma\, a_{jk}\eta_{x_j}\eta_{x_k} \leqq 1, \quad \Sigma\, a_{jk}\sigma_{x_j}\sigma_{x_k} \leqq e^{\sigma} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\partial G}\{\eta(x) + \sigma(x)\} = \infty.$$

Satz: Mit geeignetem $\delta > 0$ gelte $(Au,u) \geqq (1+\delta)(e^{\sigma}u,u)$ für für alle $u \in C_0^\infty(G)$. Dann ist A in $C_0^\infty(G)$ wesentlich selbstadjungiert.

Weitergehende Vermutung: Sei $A_1 := \Sigma\, D_j a_{jk} D_k + q_1$, $A_2 := \Sigma\, D_j a_{jk} D_k + q_2$, $(A_2u,u) \geqq (A_1u,u)$ für alle $u \in C_0^\infty(G)$ und A_1 wesentlich selbstadjungiert, so gilt dies auch für A_2!

W. WALTER: Die Linienmethode bei parabolischen Differentialgleichungen

Die (longitudinale) Linienmethode zur Lösung einer parabolischen Differentialgleichung besteht darin, die räumlichen Ableitungen durch endliche Differenzen zu ersetzen, während die zeitliche Ableitung ungeändert bleibt. Dadurch wird ein Randwertproblem übergeführt in ein Anfangswertproblem für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Entscheidend ist die folgende Tatsache: Dieses System von

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

gewöhnlichen Differentialgleichungen ist quasimonoton, d.h. die rechten Seiten der Differentialgleichungen besitzen jene speziellen (zuerst von M. Müller und E. Kamke um 1930 formulierten) Monotonieeigenschaften, die für die Gültigkeit eines Monotoniesatzes notwendig sind. Insbesondere lassen sich Ober- und Unterfunktionen als Lösungen entsprechender Differentialungleichungen bestimmen. Die erzielten Ergebnisse liegen in zwei Richtungen. Erstens werden für eine sehr weite Klasse von nichtlinearen Gleichungen Konvergenzsätze bewiesen. Zweitens ist es möglich, konstruktive Existenzbeweise zu führen, und zwar wieder für nichtlineare Differentialgleichungen.

N. WECK: Randwertprobleme der Elastizitätstheorie

Das System (1) $\partial_j(c_{ijkl}(\partial_k u_l)) + \omega^2 \rho u_i = f_i$, $i = 1, 2, 3$,
mit $c_{ijkl}(x) = \lambda(x)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(x)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$
beschreibt stationäre Schwingungen inhomogener, isotroper elastischer Medien.

Für Außenraumaufgaben zu (1) wird ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz unter der Voraussetzung hergeleitet, daß für große $|x|$ $\lambda, \mu, \rho = \text{const.}$ und $f = 0$ gilt. Dabei wird benutzt, daß für die Lösungen von (1) das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit gilt. Dieses ergibt sich aus der Tatsache, daß man (1) auf ein schwach gekoppeltes System zurückführen kann.

H. WEIGEL: Existenzsätze für semilineare parabolische Gleichungen bei unstetigem Randverhalten

Es wird der Einfachheit halber nur das Cauchyproblem betrachtet. Es sei also $G_p = R^n \times (0,T]$, $N \subset R^n$ eine abgeschlossene Nullmenge und $\phi \in C_b^o(R^n - N)$. Ist P der semilineare parabolische Operator $Pu := u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} - g(x,t,u)$,
dann besteht der Existenzsatz: Das Cauchyproblem $Pu = 0$, $u(x,0) = \phi(x)$ $(x \in R^n - N)$ besitzt eine klassische Lösung mit stetiger Randwertannahme für $x \in R^n - N$.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Der Beweis verwendet, abgesehen von der Fundamentallösung, nur elementare Methoden, nämlich Monotonie- und Abschätzungssätze. Zusätzlich ergibt sich ein Eindeutigkeitssatz als Nebenergebnis, der allerdings auf wesentlich einfachere Weise erhalten werden kann (vgl. den Vortrag von G. Schleinkofer).

W. WENDLAND: Ein elementarer Existenzbeweis für eine Lösung der Beltramischen Differentialgleichung

Die Transformation einer elliptischen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Unabhängigen auf eine Differentialgleichung mit Laplaceschem Hauptteil im Großen kann mit Hilfe einer geeigneten Lösung der Beltramischen Differentialgleichung gewonnen werden. Diese Lösung kann man durch eine Quellbelegung mit Hilfe der Parametrixfunktion darstellen und auf eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art für die Belegungsdichte zurückführen, welche nach dem Alternativsatz eine Lösung besitzt. Die mit dieser Belegung gefundene Lösung der Beltramigleichung bestimmt die gesuchte Transformation, die sich auf Grund des Indexsatzes für elliptische Systeme erster Ordnung als homöomorph und umkehrbar stetig differenzierbar erweist.

K. Habetha (Berlin)