MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 8/1969

Mathematische Logik

23.3. bis 29.3.1969

52 Gäste aus dem In- und Ausland waren der Einladung von H.Hermes (Freiburg) und K.Schütte (München) zur Tagung über mathematische Logik gefolgt. Es ist zur Tradition der "Frühlingstagung" geworden, alle logischen Disziplinen in die Referate und Diskussionen einzubeziehen. So wurde auch in diesem Jahr in 24 Vorträgen über Ergebnisse und Problemstellungen in allen wesentlichen Gebieten der mathematischen Logik berichtet. Berührt wurden dabei ebenfalls die Grenzgebiete zur Philosophie und zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Es fand eine Diskussion über den Entwurf eines Normblattes über Zeichen der mathematischen Logik statt. Die DVMLG hielt anläßlich der Tagung ihre diesjährige Mitgliederversammlung ab.

Teilnehmer

E.Agazzi, Genua
J.Bammert, Freiburg
P.Bernays, Zürich
W.Böge, Heidelberg
D.Bürstenbinder, Hannover
W.Carstengerdes, München
W.Craig, Berkeley, z.Zt. Grenoble
J.Czermak, München
K.-H.Diener, Köln
J.Diller, München

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

K.Döpp, Hannover
H.-D.Ebbinghaus, Freiburg
U.Felgner, Utrecht
W.Felscher, Freiburg
J.E.Fenstad, Oslo
J.Flum, Freiburg
R.O.Gandy, Manchester
C.Gordon, Utrecht
S.Görnemann, Hannover
P.Hájek, Prag, z.Zt. Heidelberg
G.Hasenjaeger, Bonn
H.Hermes, Freiburg
A.Heyting, Amsterdam
P.Janich, Erlangen
D.H.J.de Jongh, Amsterdam
K.Kaiser, Bonn
D.Klemke, Freiburg
R.Liedl, Innsbruck, z.Zt.München
E.Lopez-Escobar, College Park (Maryland), z.Zt.Utrecht
K.Lorenz, Erlangen
H.Luckhardt, Marburg
F.-K.Mahn, Freiburg
W.Markwald, Freiburg
G.Mitschke, Bonn
G.H.Müller, Heidelberg
H.Müller, Hannover
A.Oberschelp, Kiel
W.Oberschelp, Hannover
K.Peters, Heidelberg
H.Pfeiffer, Hannover
K.Potthoff, Kiel
M.Richter, Freiburg
D.Rödding, Münster
B.Scarpellini, Basel
K.Schütte, München
W.Schwabhäuser, Bonn
H.Schwichtenberg, Münster
D.Scott, Stanford, z.Zt. Amsterdam

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

E.Specker, Zürich
Ch.Thiel, Erlangen
A.S.Troelstra, Amsterdam
V.Weispfenning, Heidelberg

Vortragsauszüge

A.S.TROELSTRA: A survey of the intuitionistic theory of sequences

A sketch of the recent developments, conceptual as well as formal, in the intuitionistic theory of sequences (including choice sequences, lawless sequences).

E.G.K.LOPEZ-ESCOBAR: The ω-rule in the intuitionistic lower predicate calculus

Since the species N of natural numbers has rather a priviliged role in intuitionistic mathematics we attempted to formalize the intuitive notion - "the sentence A of the lower predicate calculus is intuitionistically valid on N" -. The (intuitionistic) meta-theory used to describe the formal system was IDK. The system itself: HPC_ω , was obtained by adding to Heyting's predicate calculus (in the formalization given by Dyson and Kreisel) the ω-rule.

Next we obtained the formulae $Prov_\omega(\ulcorner A \urcorner)$, $Val^k(\ulcorner A \urcorner)$ of IDK which expressed the conditions: "A is provable in HPC_ω" and "A is a sentence of rank $\leq$ k and A is valid in all fans" respec.

The system HPC_ω would have been considered successful if it could be shown that

(*) for all A , $Val^k(\ulcorner A \urcorner) \rightarrow Prov_\omega(\ulcorner A \urcorner)$.

However, we showed that (*) implies that for all primitive

recursive $R(x)$, $\neg\neg\exists x R(x) \rightarrow \exists x R(x)$.

S.GÖRNEMANN: Vergleich von Kripkes Modellbegriff der intuitionistischen Logik mit dem von Rasiowa und Sikorski

Es werden Erfüllungsbegriffe der intuitionistischen Logik nach Rasiowa-Sikorski in Pseudo-Booleschen Algebren, nach Kripke in Halbordnungen angegeben.

1. Zu jeder Halbordnung H existiert eine Ps.-B.A. $\Phi(H)$, so daß in H und $\Phi(H)$ dieselben Formeln gültig sind.
2. Zu jeder Ps.-B.A. A existiert eine Halbordnung $\Psi(A)$, so daß in A und $\Psi(A)$ dieselben Formeln der Aussagenlogik gültig sind.
3. H läßt sich in $\Psi\circ\Phi(H)$, A in $\Phi\circ\Psi(A)$ einbetten.
4. Entsprechende Konstruktionen werden für die Prädikatenlogik für alle Halbordnungen und für eine spezielle Klasse von Ps.-B. Algebren, die der K-Algebren, durchgeführt. Die Klassen der Halbordnungen und der K-Algebren bilden (mit passenden Morphismen) antiisomorphe Kategorien.

J.E.FENSTAD: Remarks on standard and non-standard analysis

In the first part of the lecture the "reduction" of non-standard methods was discussed using the following general result: There exists a map π from the non-standard extension $^*M$ onto the Stone-Čech compactification βM such that for all $\alpha \in {}^*M$
$st(^*f(\alpha)) = f^{\beta}(\pi(\alpha))$.

In the last part the problem of constructing the completion of algebraic structures was briefly discussed. Let M be both a uniform space and an algebraic structure. Classically there are two possibilities, either we may assume that the operations of

M are uniformly continuous (but this is too restrictive since e.g. multiplication in Q is not uniformly continuous), or we may assume the continuity of the operations (but this is in general not enough since the completion may not exist). Using non-standard concepts it is possible to isolate an intermediate continuity property which leads to a necessary and sufficient condition in the general case.

K.POTTHOFF: Ideale in Nichtstandardmodellen der ganzen Zahlen

Sei Z die Menge der ganzen Zahlen, P die Menge der Primzahlen, R_p der Primkörper der Charakteristik p und Z_p der Ring der ganzen p-adischen Zahlen für jedes $p \in P$. Ist $\mathfrak{Z}^*$ echte elementar äquivalente Erweiterung von $\mathfrak{Z} = (Z,+,\cdot,0,1,\underline{R}_0,\ldots,\underline{R}_\eta,\ldots)_{\eta<\alpha}$, so sei $Tf(z) = \{p \in P \mid p \mid z\}$ und $Ti(z) = \{p \in P \mid p^n \mid z$ für alle $n \in Z,\ n>0\}$, und für jeden Filter D über P sei $J_D = \{z \in Z^* \mid Tf(z) \in D\}$ und $I_D = \{z \in Z^* \mid Ti(z) \in D\}$.

I_D und J_D sind Ideale in Z*, und wenn D Ultrafilter ist, so ist I_D primes und J_D maximales Ideal. Wenn in $\mathfrak{Z}$ Relationen für alle Elemente von $D_1 \cup D_2$ vorkommen, erhält man $I_{D_1 \cap D_2} = I_{D_1} \cdot I_{D_2}$,

$J_{D_1 \sqcup D_2} = J_{D_1} + J_{D_2}$ und $I_{D_1 \sqcup D_2} = I_{D_1} + I_{D_2}$ mit

$D_1 \sqcup D_2 = \{A \cap B \mid A \in D_1,\ B \in D_2\}$. Für die Restklassenstrukturen Z^*/J_D und Z^*/I_D erhält man die folgenden Isomorphiesätze :

Wenn $\mathfrak{Z}$ vollständig ist, so ist Z^*/J_D isomorph zu $\prod_{p \in P} R_p/D$,

und Z^*/I_D ist zu $\prod_{p \in P} Z_p/D$ isomorph.

K.KAISER: Bemerkungen zur Einbettungsbedingung

Eine Klasse $\mathfrak{A}$ von Relationsstrukturen genüge der Bedingung (E*), wenn folgendes gilt:

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Es gibt in $\mathfrak{A}$ ein Modell $\mathbb{B}$, so daß sich jedes $\mathbb{A} \in \mathfrak{A}$ in eine Ultrapotenz von $\mathbb{B}$ einbetten läßt.
Es wird auf den Zusammenhang von (E), (A) mit (E*) eingegangen, wobei (E) und (A) die Einbettungs- und Amalgamierungsbedingung von B.Jónsson bedeuten. U.a. wird bewiesen:
Für eine beliebige Modellklasse $\mathfrak{A}$ folgt aus der Bedingung (E) die Bedingung (E*). Ist $\mathfrak{A}$ abgeschlossen gegenüber Ultrapotenzen, dann sind (E) und (E*) äquivalent.
Der Beweis wurde mit der Modelltheorie einer gewissen algorithmischen Sprache von E.Engeler erbracht. Aus dieser Beobachtung folgt leicht die Tatsache, daß mit $\mathfrak{A}$ auch die von $\mathfrak{A}$ erzeugte axiomatische Klasse $\overline{\mathfrak{A}}$ der Bedingung (E) genügt. Für $\mathfrak{A} = \{\mathbb{A}\}$ ergibt dies einen bekannten Satz von A.Robinson und Vaught-Morley.
Der Durchschnitt aller modellkonsistenten Vervollständigungen einer konsistenten Satzmenge K ist äquivalent zur Satzmenge $K \cup H$, $H = \{p \mid p$ primitiv und $\mathbb{A} \models p$ für ein $\mathbb{A} \in Md(K)\}$, und somit die Existenz "algebraischer Abschließungen" für jedes $\mathbb{A}$ einer axiomatischen Klasse äquivalent zur Amalgamierungsbedingung.

H.PFEIFFER: <u>Ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen</u>

In der Beweistheorie benutzt man für Widerspruchsfreiheitsbeweise nach dem Muster des GENTZENschen Beweises gern Ordinalzahlen. Dazu muß man ein konstruktives Bezeichnungssystem für einen Abschnitt der zweiten Zahlklasse zur Verfügung haben. Ein solches System wird in dem Vortrag beschrieben. Zunächst wird ein Operator W erklärt, der jeder wohlgeordneten Menge X konstruktiv eine wohlgeordnete Menge W(X) zuordnet, wobei X einem echten Abschnitt von W(X) ähnlich ist. Damit wird ausgehend von $W_0 := N$ eine Folge W_α von Bezeichnungssystemen definiert für alle α, die kleiner als die kleinste kritische Zahl α_0 der Normalfunktion φ

sind, wo $\varphi\alpha$ der Ordnungstyp von W_α ist. Diese Zahl ist die Grenzzahl des beschriebenen Darstellungsverfahrens für Ordinalzahlen.

P.HÁJEK: Die Kategorie der axiomatischen Theorien und syntaktischen Modelle

Syntaktische Modelle sind Abbildungen von Formeln einer Theorie in die Formeln einer anderen Theorie, die in einem bestimmten Sinne die Beweisstruktur beachten. (Z.B. "relative interpretations" von Tarski). Die Theorien zusammen mit den syntaktischen Modellen bilden eine Kategorie; man kann also fragen, welche Begriffe über syntaktische Modelle innerhalb der Kategorienlehre definierbar sind und für welche von ihnen vernünftige kategorielle Sätze gelten. Dadurch bekommt man eine Auswahl von "guten" Begriffen.

Im Vortrag wird eine Konzeption der syntaktischen Modelle entwickelt und mit den kategoriellen Begriffen konfrontiert. Insbesondere werden Beziehungen zwischen den Begriffen eines (wesentlich) treuen Modells und eines (wesentlichen) Monomorphismus untersucht. Ferner wird eine volle Einbettung (full imbedding) der (Kategorie der) im Prädikatenkalkül formalisierten Theorien in die (Kategorie der) Theorien, die im Aussagenkalkül formalisiert sind, angegeben.

P.JANICH: Zur Methodologie der Messung

Da die begrifflichen Grundlagen der messenden Physik und hier vor allem die Auszeichnung der Meßgeräte nicht von Messungen abhängen - es müßten dann schon Meßgeräte zur Verfügung stehen - können auch die begrifflichen Grundlagen der Physik nicht durch Ergebnisse der empirischen Forschung überholt werden.

Der erste Schritt zu einem methodischen Aufbau physikalischer Theorien besteht in der Formulierung von Handlungsanweisungen zur Herstellung von Meßgeräten, welche die an sie gestellten Erwartungen hinsichtlich Verhaltenskonstanz erfüllen. Im Zusammenhang mit Realisierungsverfahren für bestimmte Grundformen der Geometrie, der Chronometrie und der Hylometrie (Theorie der Massenmessung) werden Grundbegriffe operativ bestimmbar. Aus Herstellungsnormen für Meßgeräte können Axiome (der Mechanik) abgeleitet werden.

W.BÖGE: <u>Häufigkeiten äquivalenter Formeln des Prädikatenkalküls erster Stufe</u>

Faßt man die Formeln des Prädikatenkalküls erster Stufe, die sich mit einem vorgegebenen endlichen Zeichenvorrat schreiben lassen, als Elemente einer endlich (von den Primformeln) erzeugten freien Algebra auf mit den logischen Verknüpfungen und Quantoren als Operationen, so ist der Übergang zu den logischen Äquivalenzklassen (oder auch der zu den Äquivalenzklassen bzgl. eines Axiomensystems) ein Homomorphismus, dessen Bildalgebra bzgl. einiger der Verknüpfungen ein Boolescher Verband ist. Für einen solchen Homomorphismus habe ich bewiesen, daß jede Urbildklasse in der freien Algebra eine Dichte besitzt und die Summe der Dichten aller Klassen gleich 1 ist. Die Dichte einer Klasse erhält man definitionsgemäß, indem man die Anzahl der Formeln gegebener Länge in der Klasse durch die Anzahl aller Formeln dieser Länge dividiert und die Länge gegen ∞ streben läßt. Es ergibt sich die Frage nach der Berechenbarkeit dieser Dichten und nach verwandten Dichteproblemen in der Logik.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

R. LIEDL: Ein Kalkül bedingter Wahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit $p(S)$ eines Satzes S ist die Chance, als wahrer Satz interpretiert zu werden (Łoś). Dies führt zum Konzept eines Homomorphismus von der Lindenbaum-Tarski-Algebra auf eine Wahrscheinlichkeitsalgebra (Gaifman, Scott u. Krauss). Die Elemente einer speziellen Maßalgebra, welche numerisch zu handhaben sind, bekommt man durch eine Fouriertransformation der charakteristischen Funktionen

$$e_S(\varphi) = \begin{cases} 1 \text{ falls } \varphi(S) = w \\ 0 \text{ falls } \varphi(S) = f \end{cases}$$

von Sätzen S, wobei $\varphi \in \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}$ den Modellraum, versehen mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß, bezeichnet. Für einen Aussagenkalkül ist der Modellraum gleich $2^{\mathbb{N}}$, und $2^{\mathbb{N}}$ trägt eine Gruppenstruktur, welche eine Fouriertransformation liefert, die den logischen Verhältnissen am besten angepaßt ist.

W. CRAIG: On the transformational part of algebraic logic

Let U be any set and let ω be the set of integers. Let ${}^{\omega}U$ be the set of functions, or sequences, $f = \langle f_0, f_1, \ldots \rangle$ for which each value f_i is in U. Let α be a function from ω into ω. Then α induces a function $\tilde{\alpha}$ from ${}^{\omega}U$ into ${}^{\omega}U$ which to each $f = \langle f_0, f_1, \ldots \rangle$ assigns the value $\tilde{\alpha}(f) = f \circ \alpha = \langle f_{\alpha(0)}, f_{\alpha(1)}, \ldots \rangle$. Let $X \subseteq {}^{\omega}U$. Let $(S\alpha)X = \{f \in {}^{\omega}U : f \circ \alpha \in X\}$ be the set of $\tilde{\alpha}$-preimages, and $(T\alpha)X = \{f \circ \alpha : f \in X\}$ the set of $\tilde{\alpha}$-images, of elements of X. If $J = \omega - \mathrm{range}(\alpha)$, then $(S\alpha)(T\alpha)X$ is the cylindrification $(CJ)X = \{f \in {}^{\omega}U : \exists g[g \in X \wedge g\restriction -J = f\restriction -J]\}$. Also, if R is the equivalence relation $\check{\alpha} \circ \alpha$ on ω, then $(T\alpha)(S\alpha)X$ is $(ER)X = \{f \in X : \forall i \forall j [iRj \rightarrow f_i = f_j]\}$. Thus, when added to the Boolean operations $\cdot$ and $-$, the transformational operations, i.e., those formed by composition from operations $(S\alpha)$, $(S\beta)$, ... and $(T\alpha)$, $(T\beta)$, ..., furnish a basis for algebraic logic. This holds for

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

any index set I in place of ω.

In our talk we showed that each transformational operation can be expressed in the form $(T\alpha)(ER)(S\beta)(CJ)(ER')$ where α is one-one and where distinct i,j are in J whenever iR'j. Reduction to this normal form was then used to show that ten rather simple schemes yield a complete set of equalities, i.e., a set from which one can derive any equality between transformational operations which is valid.

P. BERNAYS: Bemerkungen zum Herbrandschen Satz

Bei einer geeigneten Beweismethode für den Herbrandschen Satz ergeben sich die genaueren Bestimmungen im Inhalt des Satzes naturgemäß aus den Prozessen der symbolischen Auflösung von Formeln mit Quantoren und der Rückverlegung der Einsetzungen in einer elementaren Herleitung. Die Beschränkung auf pränexe Formeln ist bei dem Verfahren nicht erforderlich, es genügt eine viel geringere Einschränkung.

J. FLUM: Eine Bemerkung zum symmetrischen Gentzen-Kalkül

Für eine Menge K von pränexen Formeln (des Prädikatenkalküls der ersten Stufe ohne Identität) wird die Menge Sp(K) der Spezialisierungen der Matrizen der Elemente von K und die Menge Zsp(K) der zulässigen Spezialisierungen der Matrizen der Elemente von K definiert. Es wird syntaktisch die folgende Formulierung des Herbrandschen Satzes bewiesen: Ist K eine Menge von Allsätzen, L eine Menge pränexer Formeln, so ist die Sequenz $K \rightarrow L$ ableitbar g.d.w. existieren $K' \subset Sp(K)$ und $L^{o} \subset Zsp(L)$ mit $K' \rightarrow L^{o}$ ist aussagenlogisch ableitbar. - Hieraus folgert man leicht den Satz von Herbrand für eine Sprache mit Identität und den verschärften Gentzenschen Hauptsatz. Alle Untersuchungen werden im symmetrischen

Gentzen-Kalkül von Smullyan durchgeführt (vgl. Smullyan: First order logic).

B. SCARPELLINI: Ein Modell für die intuitionistische Analysis

Es wird ein neues Modell für die intuitionistische Analysis beschrieben, wie sie im Buche von Kleene entwickelt worden ist. Dieses Modell fußt einerseits auf den beweistheoretischen Eigenschaften intuitionistischer Systeme, besitzt andererseits gewisse Analogien zu Kleenes Realisierbarkeitsbegriff.

CH. THIEL: Imprädikativität

Die definitorische Einführung eines Objekts heißt nach der verbreiteten Poincaré-Russellschen Bestimmung "imprädikativ", wenn sie Bezug nimmt auf eine Gesamtheit, der das einzuführende Objekt selbst angehört. Da es nachweislich harmlose Begriffsbildungen gibt, die im Poincaréschen Sinn imprädikativ sind, ist diese Fassung für eine Grenzziehung zwischen zulässigen und unzulässigen Begriffsbildungen ungeeignet. Es wird vorgeschlagen, den Begriff der Imprädikativität so abzuändern, daß die Einführung eines Objekts genau dann unter ihn fällt, wenn sie Bezug nimmt auf eine Gesamtheit, die das einzuführende Objekt enthält und überdies nicht unabhängig von diesem auf konstruktive Weise gegeben ist. Die Konstruktivität ist dabei durch den von P.Lorenzen ("Ein dialogisches Konstruktivitätskriterium", in: Infinitistic Methods, Proc. Symposium on Foundations of Mathematics, Warschau 1959, publ.1961, S.193-200) angegebenen Begriff der Dialogdefinitheit zu präzisieren.

H.LUCKHARDT: Skolem-Normalformen

Am Beispiel der einfachen Typenlogik mit λ-Konversion, Extensionalität und derivativer, intuitionistischer oder alternärer Prädikatelogik mit M-, Br_τ, S4- oder S5-Modalitäten wird gezeigt, wie man schon mit Hilfe der Umsetzung, d.h. Ersetzung äquivalenter Teilformeln, zu Skolem-Normalformen gelangen kann. Es ergibt sich so in der alternären Typenlogik ohne Modalitäten eine beweisbar äquivalente Normalform mit Präfix $\wedge\vee\wedge$ und mit S5-Modalitäten eine deduktionsgleiche pränexe Normalform der Gestalt $\wedge\vee\neg\Box\neg\wedge$. Das Auswahlaxiom erlaubt weitere Vereinfachungen: für die alternäre einfache Typenlogik z.B. eine beweisbar äquivalente Normalform mit Präfix $\vee a^\sigma \wedge b^\tau \vee c_1^o,\ldots,c_m^o \wedge d_1^o,\ldots,d_n^o$ $(\sigma,\tau \neq 0)$.

H.SCHWICHTENBERG: Bemerkungen zum Spektralproblem

Sei $\mathfrak{r}_i := \{S(\alpha) \mid \alpha \in Pl_i\}$ mit $S(\alpha) := \{n \mid erf_{n+1}\,\alpha\}$ ("Spektrum von α"), Pl_i Sprache der Prädikatenlogik der i-ten Stufe (d.h. gebundene Variablen höchstens (i-1)-ter Stufe, freie Variablen höchstens i-ter Stufe) mit Identität ohne Funktorenvariable. $\mathcal{F}_i$ bestehe aus allen auf Registermaschinen berechenbaren Funktionen, deren Rechenzeit in Abhängigkeit vom Argumentetupel in der Form $f_i(\bar{\mathfrak{r}}^k)$ majorisierbar ist ($\bar{\mathfrak{r}} := \max(\mathfrak{r},2)$, $f_0(x) := x$, $f_{i+1}(x) := 2^{f_i(x)}$). $\mathcal{F}_i$ ist auch charakterisierbar als der Abschluß von $\mathcal{F}_0$ (= $\mathfrak{E}_2$ von Grzegorczyk) und f_i mit Einsetzungen von und in $\mathcal{F}_0$-Funktionen. Satz: $Rel^1(\mathcal{F}_i) \subseteq \mathfrak{r}_{i+1} \subseteq Rel^1(\mathcal{F}_{i+1})$. Korollar: $\bigcup_i \mathfrak{r}_i = Rel^1(\mathfrak{E})$. ($\mathfrak{E} = \bigcup_i \mathcal{F}_i$ = Klasse der elementaren Funktionen).- Sei $\mathfrak{r}_i^- := \{S(\alpha) \mid \alpha \in Pl_i^-\}$ (in Pl_i^- sind freie Variablen der i-ten Stufe nicht zugelassen), $\mathfrak{M}_i := \{(f_i \circ g_r)^{-1}[M] \mid M$ rudimentär, $r \geq 1\}$ mit $g_r(n) := (n+1)^r$. Satz (D.Rödding): $\mathfrak{r}_{i+1}^- = \mathfrak{M}_i$ für $i \geq 1$.

A.OBERSCHELP: Zeichen der mathematischen Logik

Es wurde berichtet über den Entwurf eines geplanten Normblattes "Zeichen der mathematischen Logik". Darin sind folgende Zeichen vorgesehen:

Junktoren: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ (oder $\Rightarrow$), $\leftrightarrow$ (oder $\Leftrightarrow$).

Quantoren: $\bigwedge$ oder $\forall$, $\bigvee$ oder $\exists$.

Mengenbildungsoperator: $\{x \mid \varphi\}$ (oder $\{x : \varphi\}$)

Funktionsbildungsoperator: $\langle x \mapsto t \rangle$

Kennzeichnungsoperator: $\iota x\, t$

Ferner wird etwas syntaktische und semantische Terminologie erläutert, Ableitungszeichen: $\vdash$, Folgerungs- und Gültigkeitszeichen: $\models$.

E.SPECKER: Heuristik

Ein K-Problem ist ein Quintupel $\langle \mathbb{M}, A, P, f_a, f_e \rangle$ mit folgenden Eigenschaften

(1) $\mathbb{M}$ ist eine endliche Struktur (z.B. geordnete Menge).

(2) A ist eine Menge von Abbildungen von M in endliche Menge invariant bei Automorphismen von $\mathbb{M}$.

(3) P ist eine Teilmenge von $A \times A$ invariant bei Automorphismen von $\mathbb{M}$.

(4) f_a und f_e sind Elemente von A.

Eine Lösung eines solchen K-Problems ist eine Folge $\langle f_1, f_2, .., f_n \rangle$ mit $f_1 = f_a$, $f_n = f_e$ und $\langle f_i, f_{i+1} \rangle \in P$ für $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

Die Begriffe "Teilproblem" und "homomorphes Problem" werden auf Spezialfälle angewandt.

W.FELSCHER: On the algebra of quantifiers

Consider the algebra of formulas of a first-order language. The relation of semantical equivalence (with respect to valuations

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

which satisfy a given set of formulas) is characterized as the smallest congruence relation of this algebra, which identifies certain equations and is closed with respect to certain finitary operations. This yields immediately the compactness theorem as well as a certain axiomatization of the consequence operation which is easily seen to be equivalent to the usual Hilbert type axiomatizations. The proofs employ at parts techniques similar to that of Rasiowa-Sikorski although various simplifications (and extensions of results) are made possible through the use of a suitable calculus of substitutions.

M.RICHTER: Über saturierte Modelle

Es werden Sprachen und Modelle der Typenlogik betrachtet (vgl. etwa A.Robinson: Non-standard Analysis). Eine Struktur heißt α-saturiert, wenn für jede Spracherweiterung mit weniger als α Prädikaten und jede Typ-gerechte Interpretation durch Elemente oder Relationen der Struktur gilt: Falls eine Formelmenge der erweiterten Sprache und der Mächtigkeit kleiner als α, die nur Formeln mit einer freien Variablen x enthält, endlich erfüllbar ist, dann ist die Formelmenge auch schon (simultan) erfüllbar. Es gilt dann der Satz: Jedes Modell der Typentheorie ist elementar in ein α-saturiertes Modell einzubetten.
Beispiel: Topologische Räume (Gruppen, Körper etc.). Die α^+-saturierten Modelle haben dann α-kompakte Basen. Gilt zusätzlich das Hausdorffaxiom, so lassen sich zwei disjunkte Mengen der Mächtigkeit höchstens α durch offene Mengen trennen.

W.SCHWABHÄUSER: Modellvollständigkeit der Mittelpunktsgeometrie und der Theorie gewisser Gruppen

In unendlichen affinen Räumen evtl. verschiedener Dimension über

Körpern derselben Charakteristik gelten dieselben geometrischen Sätze einer elementaren Sprache, in der nur von der Mittelpunktsrelation M die Rede ist (Mabc bedeutet b ist Mittelpunkt der Strecke ac). (Antwort auf eine speziellere Frage von H.N.Gupta.)

Zum Beweis wird die Modellvollständigkeit eines geeigneten Axiomensystems für die "Mittelpunktsgeometrie" (die aus Sätzen der angegebenen Art besteht) gezeigt, und zwar durch Rückführung (Ausnahme: Charakteristik 2) auf die Modellvollständigkeit der Theorie der additiven Gruppen der betrachteten Vektorräume (oder, was dasselbe ist, der additiven Gruppen von unendlichen Körpern), die sich durch Verallgemeinerung eines Satzes von A.Robinson ergibt.

Durch Hinzufügung von Axiomen, die eine Charakteristik festlegen, erhält man (da Primmodelle existieren) vollständige und entscheidbare Theorien von Gruppen bzw. der Mittelpunktsgeometrie.

U.FELGNER: <u>Über das Kinna-Wagnersche Auswahlprinzip</u>

Sei (KW-AC) das Teilmengen-Auswahlprinzip von Kinna-Wagner (Fund. Math.42 (1955) 75-82) und (O) das Ordnungstheorem. Obwohl Mostowski (Coll.Math.6 (1958) 207-208) zeigen konnte, daß (KW-AC) in ZF^{o} (d.h. ZF ohne Fundierungsaxiom) nicht aus (O) ableitbar ist, ist es noch offen, ob (O) $\Longrightarrow$ (KW-AC) in ZF beweisbar ist oder nicht. Es wurde ein <u>Satz</u> bewiesen, der besagt, daß unter gewissen Bedingungen in generischen Modellen, in denen (O) gilt, stets auch (KW-AC) gilt. Als <u>Korollar</u>: Der Ordnungserweiterungssatz (Szpilrajn, Fund.Math.16 (1930) 386-389) ist in ZF nicht aus (KW-AC) ableitbar, das Resultat von Kinna-Wagner: $ZF^{o} \vdash$ (KW-AC) $\Rightarrow$ (O) ist also das "best-mögliche" Resultat. Ein anderes Resultat von Kinna-Wagner, nämlich $ZF^{o} \vdash (\text{KW-AC}) \Longleftrightarrow \bigwedge_{x} \bigvee_{\alpha} (\overline{\overline{x}} \leqslant \overline{\overline{P(\alpha)}})$,

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

wurde wie folgt verschärft:

$$ZF^{\circ} \vdash \quad (KW\text{-}AC) \Longleftrightarrow \bigwedge_{x} \bigvee_{\alpha} \left(\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{P(\alpha)}} \wedge \overline{\overline{\alpha}} \leq \overline{\overline{P(x)}} \right).$$

K.DÖPP: <u>Automaten in Labyrinthen</u>

In einer mit einem quadratischen Raster überzogenen Ebene bestehe ein <u>Labyrinth</u> aus endlich-vielen einheitlich markierten Rasterfeldern. Die betrachteten endlichen Initialautomaten mit entsprechenden Ein- und Ausgabealphabeten sollen sich stets in genau einem freien Feld befinden. Die sog. <u>Grundaufgabe</u> verlangt, einen Automaten anzugeben, der aus jedem Labyrinth stets einen als vorhanden vorausgesetzten Ausweg findet und sich schließlich unbeschränkt weit vom Labyrinth entfernt. Vermutlich ist die Grundaufgabe unlösbar. Dagegen lassen sich durch Modifikationen der Aufgabenstellung Varianten formulieren, deren Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit gezeigt werden kann. Ein Teilergebnis in Richtung auf eine Lösung des Ausgangsproblems besagt, daß zu jedem Automaten ein Baustein zur Zusammensetzung von global beliebig verlaufenden Labyrinthen effektiv angegeben werden kann, bei dessen Abtastung der Automat in einem präzisierten Sinn bereits jede Orientierung verliert.

H.-D.Ebbinghaus, Freiburg i.Br.