MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 11/1969

Ringe, Moduln und homologische Methoden
27.4. bis 3.5.1969

Die diesjährige Tagung stand wieder unter der Leitung von F.Kasch (München) und A.Rosenberg (Cornell-University, Ithaca, USA). Wie in den vorhergehenden Jahren wurde die Tagung von zahlreichen in- und ausländischen Mathematikern besucht.

Bei der großen Zahl der Teilnehmer wurden mehr Vorträge angemeldet als im Rahmen der zeitlichen Möglichkeiten gehalten werden konnten. In Übereinstimmung mit Empfehlungen von Teilnehmern wurde von der Tagungsleitung vorgeschlagen, daß Teilnehmer, die in jedem Jahr teilnehmen können, in der Regel nur jedes zweite Jahr einen Vortrag halten. Daneben sollte jedoch für alle Teilnehmer die Möglichkeit bestehen, in jedem Jahr einen kurzen Bericht über neue Ergebnisse schriftlich mitzuteilen.

Die Vorträge befaßten sich mit verschiedenen Problemen aus dem Gebiet der kommutativen Algebra, der "nichtkommutativen Algebra" bis hin zur Theorie der Kategorien. Sie gaben einen guten Überblick über den derzeitigen Stand und die verschiedenen Entwicklungstendenzen in diesen Gebieten.

Wie stets bei solchen Spezialtagungen war die Anregung durch persönliche Kontakte besonders groß und führte bei mehreren Teilnehmern zu gemeinsamen Arbeiten.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer

M.Auslander, Waltham (USA)
G.Azumaya, Bloomington (USA)
H.Bass, Bures sur Yvette (Frankreich)
S.Breitsprecher, Giessen
P.Cohn, London (England)
V.Dlab, Ottawa (Kanada)
F.Eckstein, Münster
A.Fröhlich, London (England)
O.Gerster, Erlangen
R.Hart, Leeds (England)
G.Hauger, München
J.Heinrich, Berlin
P.Higgins, London (England)
C.Jensen, Kopenhagen (Dänemark)
F.Kasch, München
H.Kautschitsch, Wien (Österreich)
M.Keating, London (England)
H.Kupisch, Heidelberg
L.van Leeuwen, Delft (Niederlande)
J.Leicht, Heidelberg
H.Lenzing, Berlin
J.-M.Maranda, Montreal (Kanada)
W.Martindale, Amherst (USA)
E.Matlis, Evanston (USA)
J.McConnell, Leeds (England)
G.Michler, Tübingen
B.Mitchell, Zürich (Schweiz)
B.Müller, Hamilton (Kanada)
W.Müller, München
W.Müller, Wien (Österreich)
R.Raphael, Montreal (Kanada)
L.Rédei, Budapest (Ungarn)
R.Rentschler, Straßburg (Frankreich)
Dock Sang Rim, Bures sur Yvette (Frankreich)
G.Rinehert, Straßburg (Frankreich)

K.W.Roggenkamp, Hannover
A.Rosenberg, Ithaca (USA)
L.Skula, Bonn
Th.Smits, Delft (Niederlande)
J.Strooker, Utrecht (Niederlande)
M.Sweedler, Ithaca (USA)
F.Szász, Budapest (Ungarn)
E.Taft, Princeton (USA)
R.Walker, Glasgow (Schottland)
D.Wallace, Aberdeen (Schottland)
D.Webber, Glasgow (Schottland)
H.Weinert, Mannheim
R.Wiegandt, Budapest (Ungarn)

Vortragsauszüge

G.AZUMAYA: M-projective and M-injective modules

Let M be a left, say R-module. An R-module A is called M-projective if given an epimorphism $\varphi: M \to N$ and a homomorphism $g: A \to N$ there exists a homomorphism $f: A \to M$ such that $\varphi \circ f = g$, while an epimorphism $\psi: B \to C$ is called an M-epimorphism if there exists a homomorphism $h: B \to M$ such that $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Ker}(h) = 0$. The following conditions are equivalent: (1) A is M-projective, (2) for any M-epimorphism $\psi: B \to C$ and a homomorphism $g: A \to C$ there exists a homomorphism $f: A \to B$ such that $\psi \circ f = g$, (3) every M-epimorphism onto A splits. It follows that in case A has a projective cover (P,π) A is M-projective if and only if $\mathrm{Ker}(\pi) \subset \mathrm{Ker}(h)$ for every homomorphism $h: P \to M$, which can be regarded as a generalization of Wu-Jan's theorem on quasi-projective modules. From this fact we can derive that if M is faithful every M-projective (in particular every faithful quasi-projective) module having a projective cover is projective. The notions of M-injectivity and M-monomorphisms can be defined in the dual manner, and the dualization of the above facts can be proved with slight modifications.

H.BASS: The functor K_2 of Milnor

1) Definitions and interpretations of K_2
2) The product $K_1 x K_1 \rightarrow K_2$
3) Calculations in special cases; Steinberg symbols.

P.M.COHN: Factorization over noncommutative rings

Over a fir (= free ideal ring) there is a satisfactory factorization theory of square matrices which have no zero-divisor as factor. Some difficulties in extending this to rectangular matrices are noted; here there is no uniqueness but complete factorizations exist. This follows by considering bound modules (i.e. modules with no non-vanishing linear functionals). In fact a good deal of the theory of bound modules can be carried out for general hereditary rings.

V.DLAB: Matrix rings over division rings

Let $\mathcal{D} = (D_{ij})$ be an mxm D-scheme, i.e. an mxm array of division rings D_{ij} (possible 0) such that (i) for every j there is i_j with $D_{i_j j} \neq 0$ and (ii) $D_{it} \neq 0$ and $D_{tj} \neq 0$ implies $D_{ij} \supseteq D_{it}$, $D_{ij} \supseteq D_{tj}$. Let us call the ring $R = \mathfrak{M}(D)$ of all matrices (x_{ij}) with $x_{ij} \in D_{ij}$ an MD-ring. Every MD-ring R is isomorphic to a block-triangular MD-ring and
(a) has finite (socle) length and
(b) R/S_k is torsionfree for all S_k of its socle series.
On the other hand, a ring R satisfying (a) and (b) is an MV-ring in the sense that it is a block-triangular matrix ring $\mathfrak{M}$ such that $\mathfrak{M}_{ii}$ are full matrix rings over division rings D_{ii}, $\mathfrak{M}_{ij} = 0$ for $i > j$ and entries in $\mathfrak{M}_{ij}$ for $i < j$ are elements of a bi-vectorspace ${}_{D_{ii}}V_{ij}\,{}_{D_{jj}}$. Finite MD-rings are characterized by (b). Both (a) and (b) characterize certain additive categories.

A.FRÖHLICH: Generalized Brauer groups

1) General nonsense: Group graded categories with product and ass. exact sequences.
2) Definition of equivariant (and twisted) Picard and Brauer groups.
3) The exact sequence

$$0 \to H^1(\Gamma, U_R) \to C(R,\Gamma) \to H^0(\Gamma, C_R) \to H^2(\Gamma, U_R) \to B(R,\Gamma) \to$$
$$\to Q\text{-}B(R,\Gamma) \to H^3(\Gamma, U_R) \quad .$$

O.GERSTNER: (nach gemeinsamer Arbeit mit L.Kaup und H.-G. Weidner)
Whiteheadmoduln abzählbaren Ranges über Hauptidealringen

R bezeichne einen kommutativen Ring mit Eins ohne Nullteiler. Für eine Menge I bezeichne (ZI) die Eigenschaft $\mathrm{Hom}(R^I,R) \cong R^{(I)}$ von R. (Z$\mathbb{N}$) für R impliziert (ZI) für R, solange $|I|$ nicht zu hoch ist.
Satz: (Z$\mathbb{N}$) wird für R durch jede der beiden folgenden Bedingungen gesichert: R ist faktoriell mit unendlich vielen maximalen Hauptidealen; R besitzt eine ganzzahlige archimedische Bewertung.
Satz: R habe (ZI), der R-Modul W mit $|W| \leq |I|$ besitze eine freie Auflösung mit freiem Kern, und es sei $\mathrm{Ext}^1_R(W,R) = 0$. Dann gilt $W \subset \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(W,R),R)$.
Folgerung: Ist R auch noch Hauptidealring, so ist jeder Untermodul abzählbaren Ranges von W frei.

R.HART: A simple Noetherian ring which is not a complete matrix ring over any integral domain

A brief account will be given of some work of D.B.Webber on simple hereditary rings; in particular those which arise as Ore extensions of Dedekind domains. The results will be used to give an example of a simple Noetherian hereditary ring which is not isomorphic to a complete matrix ring over any integral domain.

G.HAUGER: Quotientenringe

Sei R ein assoziativer Ring mit Einselement und S eine beliebige Teilmenge von R. $R \xrightarrow{f} S^{-1}R$ heißt S-Quotientenring, falls er folgende universelle Eigenschaft besitzt: 1) f ist ein Ringhomomorphismus und f(s) ist invertierbar für alle s aus S, 2) ist $g: R \longrightarrow T$ ein Ringhomomorphismus, so daß für alle s aus S g(s) invertierbar ist, dann existiert genau ein Ringhomomorphismus $h: S^{-1}R \longrightarrow T$ mit $hf = g$.

Es wird gezeigt, daß der universelle Quotientenring $S^{-1}R$ immer existiert. Dazu wird S-Teilbarkeit und S-Torsionsfreiheit in bekannter Weise definiert. Die S-teilbaren bzw. die S-teilbaren und S-torsionsfreien Moduln sind die Injektiven einer injektiven Struktur. Die letztere Struktur ist regulär im Sinne von Maranda. Er konstruiert zu einer regulären injektiven Struktur eine Ringerweiterung. Dieser Ringhomomorphismus ist die universelle Lösung obigen Problems.

P.J.HIGGINS: Hopf invariants of algebras and the Birkhoff-Witt theorem

For a module M over a commutative ring R the tensor algebra T(M) has an invariant H(M) analogous to the Hopf invariant of a group. The vanishing of H(M) implies the Birkhoff-Witt theorem for all Lie algebras with underlying module M. There are nice properties of H(M) with respect to direct limits and localization which enable one to deduce that H(M) = 0 for all flat modules and for arbitrary modules over Dedekind domains.

H.KAUTSCHITSCH: Commutative subsemigroups of the composition semigroup of polynomials and formal power series

Let R be a commutative ring with identity element and $R[x]$ the polynomialring and $R[[x]]$ the ring of formal power series over R. We define in $R[x]$ and $R[[x]]$ besides the two operations of addition and multiplication a third operation, the "composition" $\circ$, by $f \circ g = f(g(x))$. The algebra $\mathcal{G} = \langle R[[x]], \circ \rangle$ is a semigroup with the identity element x. If $|R|>1$, then $\mathcal{G}$ is not commutative, but possesses commutative subsemigroups. V-chains are defined as commutative subsemigroups of $\mathcal{G}$, containing polynomials of all positive degrees, respectively power series of all positive orders. Properties of these chains are proved and all of them are determined supposing that R is a field or an integrally closed integral domain.

M.E.KEATING: Orders which have enough localizations

Let R be a commutative noetherian integral domain with quotient field K. An R-order A is said to have enough localizations if

(i) A is semiperfect,

(ii) $K \otimes A$ is semisimple,

(iii) For each primitive idempotent e of A, the R-order $\mathrm{End}_{eAe}(Ae)$ is a full matrix ring over the scalar local R-order eAe.

Such an order has a characteristic representation as a direct sum of matrix rings which is essentially unique. Each of these matrix rings can be described as a subring of some $\mathrm{End}_{eAe}(Ae)$ determined by a set of invertible ideals of eAe.

H.LENZING: Spurgruppe und nilpotente Elemente ·

Ist A ein Ring mit 1 und $[A,A]$ die von den Kommutatoren $ab-ba$ von A erzeugte Untergruppe von A, so heißt $T(A)$ Spurgruppe von A. Diese hat kategorielle Bedeutung. Methoden der algebraischen K-Theorie ergeben den folgenden Satz:

Ist a ein nilpotentes Element von A und hat jedes Hauptideal Aa^n $(n \geq 0)$ eine endliche Auflösung durch endlich erzeugbare, projektive A-Linksmoduln (z.B. A linksnoethersch und von endlicher links-globaler Dimension) dann liegt a in $[A,A]$. Insbesondere $a = 0$, wenn A kommutativ ist.

L.C.A.VAN LEEUWEN: On extensions of homomorphisms of modules.

Every torsionfree abelian group S without elements of infinite p-height (p a prime) may be considered as a p-pure subgroup of some torsionfree cotorsion group G and containing a free abelian subgroup B as a p-basic subgroup.

If G is torsion-free cotorsion without elements of infinite p-height and S a subgroup of G, then the following are equivalent:

(i) S is a p-pure subgroup of G

(ii) $\mathrm{Ext}(G/S,G) = 0$

(iii) Every homomorphism of S into G may be extended to an endomorphism of G.

Let S be a proper p-pure subgroup of $G = \sum_1^n Z(p)$ (p-adic integers) and S contains $B = \sum_1^n Z$ (integers) as a p-basic subgroup. Then

(i) S has rank n and every map $\alpha \in \mathrm{Hom}(B,S)$ may be extended to $\mathrm{End}(S)$.

(ii) $S \cong \sum_1^n J$, J non-nil group of rank 1, $J \subseteq Q_p = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a,b \text{ integers}, (b,p) = 1 \right\}$

are equivalent.

W.S.MARTINDALE: Prime rings satisfying a generalized polynomial identity

Our purpose is to simultaneously generalize recent theorems of Posner and Amitsur, and, in so doing, to replace two proofs by a single, independent proof. Posner characterized prime rings satisfying a polynomial identity (Proc.Amer. Math.Soc., 1960) and Amitsur characterized primitive rings satisfying a generalized polynomial identity (Trans.Amer. Math.Soc.,1965). We first construct for any prime ring R a "ring of quotients" Q whose center C is a field containing the centroid of R, and then imbed R in the ring S=RC. Our main result then states that if S satisfies a generalized polynomial identity over C, then S contains a minimal right ideal eS, e an idempotent of S, and eSe is a finite dimensional division algebra over C.

E.MATLIS: The two generator problem for ideals

Theorem:
Let R be an arbitrary integral domain. Then the following statemants are equivalent:

(1) Every ideal of R can be generated by two elements.

(2) If S is a ring extension of R in its quotient field, finitely generated as an R-module, then S is a reflexive ring and $\cap I^n = 0$ for all non-zero ideals I of S.

J.McCONNELL: Simple Ore extensions of commutative integral domains

We will give necessary and sufficient conditions for the simplicity of an Ore extension of a commutative integral domain of arbitrary characteristic.

G.MICHLER: Classical ideal theory of hereditary noetherian rings

The ring R is called semilocal, if R/J is artinian, where J denotes the Jacobson radical.

Theorem:

Let R be a right and left noetherian, hereditary, semilocal ring. Then

a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n = 0$

b) The completion $\hat{R}$ is hereditary and noetherian.

c) There exists a natural number k such that each right ideal X is generated by k elements.

d) R has Krull-dimension ≤ 1 .

B.MITCHELL: Rings with several objects

This was an expositary talk indicating that many of the techniques of the theory of associative rings with identity may be extended to the study of small additive categories.

B.J.MÜLLER: Linearly compact modules and duality

A Morita-duality is a contravariant additive equivalence between two categories of modules over rings R,S which are closed under sub- and factormodules and contain progenerators. Any duality is representable as Hom(-,U) with a bimodule ${}_SU_R$ which is an injective cogenerator on both sides and satisfies $S = \text{End } U_R$, $R = \text{End } {}_SU$ (Morita, Azumaya).

Theorem:

A Morita duality exists for a ring R iff R is semiperfect, complete in the topology defined by the completely meet irreducible right ideals, and if the minimal cogenerator U_R is linearly compact. The natural domain of the duality is the totality of linearly compact modules (with respect to the discrete topology).

Theorem:

If R is commutative and possesses a duality with some ring S then S is Morita-equivalent to R.

Theorem:
Any Morita duality may be extended to a duality between the categories of all abstract modules, and of all linearly compact topological modules (with certain canonical linear tpologies).

W.MÜLLER: <u>Mappings with chain rule in the quotient ring of the polynomial ring</u>

Let $\mathfrak{A}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ be the quotient ring of the polynomial ring $A[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ in n indeterminants over a commutative ring A with identity element. Besides the two binary operations addition and multiplication we define by substitution a (n+1)-ary operation in $\mathfrak{A}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. We study systems of n mappings $D_1,D_2,\ldots,D_n$ of $\mathfrak{A}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ into itself, which satisfy the following conditions for all f,g respect. $f,g_1,g_2,\ldots,g_n \in \mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_n)$:

(i) $D_i(f+g) = D_i(f) + D_i(g)$ for $i = 1,2,\ldots,n$,

(ii) $D_i(f.g) = D_i(f).g + f.D_i(g)$ for $i = 1,2,\ldots,n$,

(iii) If $f\circ(g_1,g_2,\ldots,g_n)$ is defined, then $D_i(f)\circ(g_1,g_2,\ldots,g_n)$ is defined for $i = 1,2,\ldots,n$ and

$$D_i(f\circ(g_1,\ldots,g_n)) = \sum_{\nu=1}^{n}(D_\nu(f)\circ(g_1,\ldots,g_n)).D_i(g_\nu).$$

R.RAPHAEL: <u>Algebraic extensions of regular rings</u>

An extension of the algebraic closure from fields to commutative semiprime rings with 1, centering on von Neumann regular rings. Applications given.

L.RÉDEI: Lückenhafte Polynome über endlichen Körpern

Im Polynomring $K[X]$ über einem beliebigen endlichen Körper K werden in gewissen Klassen von lückenhaften Polynomen diejenigen bestimmt, die über K in Linearfaktoren zerfallen. Wichtig sind die überraschenden Anwendungen, die auf sechs verschiedene Gebiete fallen und mit anderen Mitteln völlig unangreifbar zu sein scheinen. Diese Gebiete sind: Gleichverteilungsfragen bezüglich gewisser Scharen von linearen Abbildungen von K in sich, die Hajóssche Faktorisationstheorie endlicher abelscher Gruppen, Wertevorrat des Differenzenquotienten einer Funktion von K nach K, symmetrische (algebraische) Gleichungssysteme in K, gewisse Teilbarkeitsmaximaleigenschaften von Gaußschen Summen, gemeinsame Repräsentantensysteme einer endlichen abelschen Gruppe nach mehreren Untergruppen.
Die Betrachtungen sind sehr ausgedehnt und werden im Sommer unter obigem Titel in Buchform (circa 300 Druckseiten) erscheinen. Der Themenkreis ist neu (ausgenommen die vor über 20 Jahren vom Vortragenden gemachten Forschungen bezüglich des Primkörperfalls), deshalb gewiß erweiterungsfähig, was die Grundforschungen und die Anwendungen betrifft.

R.RENTSCHLER: Prime ideals in the universal enveloping algebra of a nilpotent Lie algebra

Let $\mathfrak{g}$ be a finite dimensional nilpotent Lie algebra over a field of charactristic zero, $U(\mathfrak{g})$ the enveloping algebra of $\mathfrak{g}$, $S(\mathfrak{g})$ the symmetric algebra of $\mathfrak{g}$. The adjoint operation of $\mathfrak{g}$ on $\mathfrak{g}$ extends to an operation of $\mathfrak{g}$ on $S(\mathfrak{g})$ by derivations. Let Spec $U(\mathfrak{g})$ be the set of prime ideals of $U(\mathfrak{g})$, Spec $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ the set of prime ideals of $S(\mathfrak{g})$ which are stable under the operation of $\mathfrak{g}$ and β : Spec $U(\mathfrak{g}) \longrightarrow$ Spec $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ the canonical bijection as defined by Gabriel.
Let $\mathfrak{p}$ be a prime ideal of $U(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{q} = \beta(\mathfrak{p})$, C = center of $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{p}$, K = quotient field of C, $A_1(K) = K[p,q]$ where $pq - qp = 1$, $A_n(K) = A_1(K)^{\otimes n}$, L = quotient field of the ring of

$\mathfrak{g}$-invariants of $S(\mathfrak{g})/\mathfrak{a}$.

Theorem 1 (Dixmier-Gabriel): i) $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{P} \otimes_C K \cong A_n(K)$ for a certain n.

ii) There is a canonical isomorphism $\beta_{\mathfrak{P}} : K \longrightarrow L$.

Theorem 2: The Krull dimension of $A_n(K)$ is n.

Theorem 3: $\beta_{\mathfrak{P}}$ maps C into the ring of invariants of the integral closure of $S(\mathfrak{g})/\mathfrak{a}$.

D.S.RIM: Analytic equivalence of singularities

Let A be a geometric local ring over k with isolated singularity. Then there exist integers r(A),t(A) with the following properties:

Given an isomorphism $\varphi : A/\underline{m}_A^{\nu} \xrightarrow{\sim} B/\underline{m}_B^{\nu}$, where B is any geometric local ring over k which has the same Hilbert-Samuel polynomial as A, there exists an isomorphism $\phi : \hat{A} \longrightarrow \hat{B}$ which prolongs $\varphi_{\nu-r}: A/\underline{m}_A^{\nu-r} \longrightarrow B/\underline{m}_B^{\nu-r}$ (where $r = r(A)$) provided $\nu > t(A)$.

T.H.M.SMITS: Orders in a special cyclic algebra

Let P be the free product of the quadratic field $K_1 = C(\sqrt{\gamma_1})$ and the (comm.) ring $R_2 = C[X]/(X^2 - \gamma_2)$.

I. If γ_2 is not a perfect square, then P is a principal ideal domain (left and right) and the quotient field is a division algebra of order 4.

II. If γ_2 is a square, say ς^2 ($\varsigma \in C$), then P is a Noetherian prime ring and the quotient ring Q(P) of P is a cyclic algebra and a total matrix algebra. If C is the field of rational numbers, then Q(P) is the tensor product of two cyclic division algebras of order 4.

M.E.SWEEDLER: A survey of Hopf algebras

We begin with a discussion of coalgebra theory. The definition and some examples are given. Then convolution, coalgebra structure theory, cocommutativity, measuring and the finite dimensionality of simple coalgebras are mentioned. Next we define bialgebras and Hopf algebras and talk a little about the antipode and integrals for Hopf algebras. We give examples of Hopf algebras of any even order or infinite order.
We go into the structure theory of cocommutative Hopf algebras and show that over a field of characteristic zero a commutative and cocommutative Hopf algebra which is finite dimensional must be semi-simple. We conclude on the three topics:
Hopf algebras and field theory; Hopf algebra cohomology;
the category of finite dimensional commutative cocommutative Hopf algebras is abelian.

M.E.SWEEDLER: Multiplication mutation

If A is a subalgebra of B and $\sum a_i \otimes b_i \otimes c_i \in A \otimes A \otimes A$ is an Amitsur 2-cocycle then one can define a new multiplication in B by $S * T = \sum a_i \; S \; b_i \; T \; c_i$ where $S, T \in B$.
With the right definition of 2-cocycle A need not be commutative. This technique gives an "easy" proof of the correspondence between Amitsur cohomology and the Brauer group. Also we get a 2nd cohomology set when A is not commutative and show what this classifies.
Other applications include: "If A is an n-dimensional field extension of k and B an algebra containing A then B is isomorphic to $A \otimes_k A$ as an A-bimodule if and only if B is an n^2-dimensional central separable k algebra; if $A \supset K \supset k$ is a tower of fields then mapping Amitsur 2-cocycles from $A \otimes_k A \otimes_k A$ to $A \otimes_K A \otimes_K A$ corresponds to taking the centralizer of K in central separable k algebras containing k."

F.SZÁSZ: Quasimodulare Rechtsideale, Jacobsonsches und Brown-Mc Coysches Radikal

Resultate werden bezüglich der Probleme 1,2 und 3 des Buches von Andor Kertész, "Vorlesungen über Artinsche Ringe", betrachtet. Das Jacobsonsche Radikal stimmt mit dem Durchschnitt aller quasimodularen maximalen Rechtsideale des Ringes überein. Es gibt einen Ring, der ein quasimodulares, maximales aber nicht modulares Rechtsideal besitzt. Durch diese können die quasiprimitiven Ideale definiert werden, die aber notwendig primitiv sind. Es gibt zu jeder Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ einen Ring mit $\aleph_\alpha$ solchen modularen Rechtsidealen, von denen der Durchschnitt von beliebigen zweien nicht modular im Ring ist. Einige Eigenschaften der Brown-Mc Coyschen Radikalringe mit einer modultheoretischen Bedingung werden erörtert.
Die Resultate werden bzw. sind schon teilweise in Acta Math. Acad.Sci.Hungar. bzw. in Acta Sci.Math.Szeged publiziert.

E.J.TAFT: Cohomology of Jordan and Lie algebras

Let A be a Jordan algebra, M an A-module. From the semi-direct sum $B = A \oplus M$, one constructs the Lie algebra L(B) of Koecher, which has a subalgebra s(A) formed from A, and an ideal I(M), and also an involution $*$. We prove the isomorphism of the following 3 first cohomology groups: (1) $H^1(A,M)$, (2) $H^1(s(A),I(M))$ and (3) $H^1_*(s(A),I(M))$.
Each group is derivations modulo inner derivations, but in (3) the derivations must all be $*$-mappings. By this theorem, one can prove various structure theorems in the theory of Jordan algebras of characteristic 0 from the analogous theorems for Lie algebras.

D.A.R.WALLACE: Extension problems in group algebras

Let G be a group and let K be an algebraically closed field of arbitrary characteristic. Let K(G) be the group algebra of G over K. Suppose H is a normal subgroup of G. Then we can form the Jacobson radicals of K(G) and of K(H), namely JK(G) and JK(H). We ask for conditions under which JK(H) is contained in JK(G). If JK(H) is nilpotent this is true but if JK(H) is merely locally nilpotent this is false. However we can formulate a simple centralizing condition that ensures that if JK(H) is locally nilpotent then JK(H) is contained in JK(G). If H has finite index in G then it is now known that JK(H) lies in JK(G). Utilising some earlier results of the author we can show that if G is polycyclic then JK(G) is nilpotent and that, in some sense, this is the best that can be expected.

H.J.WEINERT: Assoziative Ringe mit nichtkommutativer Addition

Es sei $R = (R,+,.)$ eine Algebra, die den Ringaxiomen mit Ausnahme der Kommutativität der Addition genügt, wobei wir $(R,+)$ als nichtabelsche Gruppe voraussetzen. Der Annullator N von R und die Kommutatorgruppe C von $(R,+)$ sind dann Ideale von R (multiplikationsinvariante Normalteiler von $(R,+)$), und es gilt $N \supseteqq C \supset (0)$. Der Restklassenring $\overline{R} = R/C$ ist also ein additiv kommutativer Ring und $(R,+)$ eine Schreiersche Gruppenerweiterung von $(C,+)$ mit $(\overline{R},+)$. Analog zur Everettschen Ringerweiterungstheorie lassen sich alle Ringe mit nicht-kommutativer Addition (auch die nichtassoziativen) aus C und $\overline{R}$ gewinnen, wobei zu den additiven Parametersystemen nur ein multiplikatives Faktorensystem mit verhältnismäßig einfachen Gleichungen hinzutritt. Wir zeigen, daß dabei $(R,+)$ sowohl als faktorenfreie wie als automorphismenfreie als auch als gemischte Schreiersche Erweiterung auftritt und gehen auf das Isomorphieproblem ein.

R.WIEGANDT: Ringe mit dichtem Sockel

Sei $\mathcal{M}$ eine abstrakte Klasse von Ringen. Nun läßt sich mittels $\mathcal{M}$ sowohl ein Sockel als eine Abschlußoperation definieren, und zwar folgendermaßen. Der $\mathcal{M}$-Sockel eines Ringes R ist die

Summe aller Ideale J von R mit $J \in \mathcal{M}$. Die $\mathcal{M}$-abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ eines Unterringes A von R ist der Durchschnitt aller Ideale J, die $A \subseteq J$ und $R/J \in \mathcal{M}$ genügen. Vorausgesetzt, daß $\mathcal{M}$ eine modulare Klasse von einfachen Ringen ist, wird bewiesen: Ist der Sockel S des halbeinfachen Ringes R in R $\mathcal{M}$-dicht, dann ist R spezial. Die Umkehrung ist falsch, aber es gilt: Wenn der halbeinfache Ring R spezial ist, dann läßt sich R in eine vollständige direkte Summe R^* einfacher Ringe derart einbetten, daß der Sockel S^* von R^* und R in R^* $\mathcal{M}$-dicht sind, ferner der Sockel S von R mit S^* übereinstimmt. Diese Ergebnisse lassen sich auf Objekte gewisser Kategorien übertragen.

H.Schneider (München)