MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 12/1969

Intervallrechnung

4.5. bis 8.5.1969

Die diesjährige Tagung über Intervallrechnung war die zweite derartige Veranstaltung in Oberwolfach und stand wieder unter der Leitung von K. Nickel (Karlsruhe) und U. Kulisch (Karlsruhe). Während im vergangenen Jahr die Vorträge im wesentlichen von Mitarbeitern der beiden "Intervall-Zentren" Bonn und Karlsruhe gehalten wurden, ergab sich in diesem Jahr eine erfreulich weite Auffächerung. Besonders erfreulich war die Teilnahme von fünf Herren aus Prag/CSSR, wo soeben ein Triplex-Compiler für die Minsk 22 fertiggestellt wurde, sowie die Anwesenheit des Ehepaares Fox /Oxford - England und von Herrn Rokne aus Calgary/Basel. Die Tagung zeigte, dass die Methoden der Intervallrechnung und ihre Realisierung durch die Sprache Triplex-ALGOL 60 sich in der Numerischen Mathematik bereits einen festen Platz erworben haben. Es ist zu erwarten und zu hoffen, dass bis in einigen Jahren Numerische Mathematik ohne Intervallrechnung nicht mehr möglich sein wird.

Teilnehmer

J. Avenhaus, Karlsruhe
W. Barth, Darmstadt
L. Blumhagen, Berlin
H. Christ, Karlsruhe
H. Fischer, München
L. Fox, Oxford/England
W. Haussmann, Bochum
S. Hunger, Bonn
I. Jebavý, Prag/ČSSR
P. Katzan, Bonn
L. Koubec, Prag/ČSSR
R. Krawczyk, Karlsruhe

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

N. Krier, Wiesbaden
U. Kulisch, Karlsruhe
B. Lortz, Karlsruhe
J. Lührs, Clausthal/Zellerfeld
E. Meyer, Kiel
J. Moudrý, Prag/ČSSR
K. Nickel, Karlsruhe
W. Niethammer, Bochum
F. Oliveira, Bonn
F. Plašil, Prag/ČSSR
J. Rokne, Calgary/Basel
B. Rothmaier, Karlsruhe
P. Sarreither, Würzburg
M. Schieler, Hamburg
B. Schmitt, Karlsruhe
H. Schneider, Stuttgart
R. Tost, Bonn
J. Vlček, Prag/ČSSR
J. Voss, Hamburg
R. Wais, Hamburg
P. Wisskirchen, Bonn

Vortragsauszüge

CHRIST, H.: Rundungssteuerung für digitale Rechenanlagen

Um die für ein gegebenes Gleitkommasystem optimale Maschinenintervallarithmetik aufbauen zu können wie auch für kontrollierte Fehlerrechnungen mit Einzeloperationen benötigt man eine Gleitkommaarithmetik mit steuerbarer Rundung, wie sie standardmässig in derzeitigen Rechenanlagen nicht vorhanden ist. Solch eine Arithmetik wird für die üblichen Gleitkommasysteme mit Hilfe geeigneter Operatoren beschrieben und es wird auf ihre Hardware-Realisierung in der Anlage EL-X8 eingegangen.

HUNGER, S.: Die Drei-Prozess-Methode von F.Krückeberg zur Lösung von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

Die Drei-Prozess-Methode löst mit Hilfe der Intervallarithmetik Anfangswertprobleme von Systemen von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, bei denen eine Menge $W_a \subseteq R^n$ von Anfangswerten vorgegeben ist. Das Verfahren ergibt für die Lösungsmenge eine gesicherte Fehlereinschliessung und hat für viele bekannte Probleme (z.B. Drei-Körperproblem, Van der Pol-Gleichung) zu guten Resultaten geführt.

KATZAN, P.: Polynomfaktoren analytischer Funktionen

Gegeben sei eine analytische Funktion f(z) und ein Rechteck-n-tupel (komplexer Intervallvektor) $\alpha^{(o)}=(a_1^{(o)},\ldots a_n^{(o)})$, welches den Koeffizientenvektor $(a_1,\ldots,a_n)$ eines Polynomfaktors $z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ von f(z) enthält. Das im Vortrag beschriebene Verfahren liefert eine Folge von Intervallvektoren $\alpha^{(o)} \supseteq \alpha^{(1)} \supseteq \alpha^{(2)} \supseteq \ldots$ d.h. jeder folgende Intervallvektor ist in dem vorhergehenden enthalten. Ausserdem enthält jeder dieser Intervallvektoren den betreffenden Koeffizientenvektor $(a_1,\ldots,a_n)$. Es wird ein hinreichendes Kriterium angegeben, unter welchem die Folge der Intervallvektoren quadratisch gegen $\alpha=(a_1,\ldots,a_n)$ konvergiert. Mit Hilfe der beschriebenen Methode lässt sich die Bestimmung von r paarweise verschiedenen Nullstellen $z_1,\ldots,z_r$ von f(z) mit den entsprechenden Vielfachheiten $n_1,\ldots,n_r$ simultan auf die Bestimmung der Nullstellen von r Polynomen der Grade $n_1,\ldots,n_r$ reduzieren, wenn hinreichend kleine Einschliessungsintervalle von $z_1,\ldots,z_r$ gegeben sind. Entsprechendes gilt für Wurzelhaufen. Die angegebene Methode liefert nicht-triviale Verallgemeinerungen verschiedener bekannter Verfahren.

KRAWCZYK, R.: Verbesserung von Schranken für Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

Es wird ein Verfahren beschrieben, mit dem man die Fehlerschranken eines Eigenwertes und des zugeordneten Eigenvektors einer Matrix mit Hilfe einer Intervallarithmetik verbessern kann. Dabei wird dem komplexen Eigenwertproblem n-ter Ordnung ein reelles nichtlineares Gleichungssystem der Ordnung n+2 zugeordnet, sodass nur ein geringer Mehraufwand an Rechenarbeit im Vergleich zur Einschliessung reeller Eigenwerte erforderlich ist. Die Konvergenz der Iterationsfolge hängt im wesentlichen von den Anfangs-Schranken des Eigenwertes und nicht von den Schranken des Eigenvektors ab.

KRAWCZYK, R.: Approximation durch Intervallfunktionen

Die bekannte Approximationsaufgabe, eine gegebene Funktion f(x) mit Hilfe eines Funktionensystems zu approximieren, wird erweitert. Es wird eine Intervallfunktion (Funktion mit Intervallkoeffizienten) derart bestimmt, dass die zu approximierende Funktion in dem durch die Intervallfunktion definierten Streifen liegt. Diese Methode wird anschliessend auf den diskreten Fall der Ausgleichung von n gegebenen Funktionswerten angewandt, und zwar 1. mit Hilfe eines Intervallpolynoms, 2. durch eine trigonometrische Intervallfunktion. Insbesondere wird für den Spezialfall der Interpolation die Fehlerabhängigkeit untersucht. Für eine Anzahl von Beispielen wird derjenige Grad der Ausgleichsfunktion ermittelt, für welchen der entsprechende Streifen am schmalsten ist.

KRIER, N.: Über den Übersetzer TRIPLEX-MAINZ, S2002

Es wurde eine kurze Darstellung des Übersetzers TRIPLEX-MAINZ, eine Erweiterung des ALGOL Compilers ALCOR-MAINZ, gegeben. Insbesondere wurden die Abweichungen dieser TRIPLEX-ALGOL-60-Realisierung von dem in Num.Math. 11, 175-180 (1968) veröffentlichten Konzept aufgewiesen.

LORTZ, B.: Bestimmung der optimalen Unterschranke des Ergebnisses bei einer Langzahlarithmetik

Bei der Gleitkommamultiplikation entstehen keine Schwierigkeiten, wenn man das Mantissenprodukt voll auswertet. Bei der Gleitkommaaddition muss im Falle, dass die Summanden verschiedene Vorzeichen und verschiedene Exponenten haben, die Mantisse des betragsmässig grösseren Summanden vor der Addition um eine Stelle links verschoben werden. Die Gleitkommadivision setzt eine Festkommadivision voraus, die eine optimale Unterschranke des Ergebnisses liefert.

MEYER, E.: <u>Überlegungen zu einer mehrfachlangen Arithmetik</u>

Eine ganze Zahl a wurde dargestellt in der Form $a = \sum_{i=o}^{n} a_i m^i$, wobei m die Basis des Ziffernsystems sei, welche durch 2 teilbar sein soll. Die a_i können so gewählt werden, dass gilt: $[\frac{|a|}{m^k}] = |\sum_{i=o}^{n-k} a_{k+i} m^i|$, $k=1,...,n$, woraus $-\frac{m}{2} \leq a_i \leq \frac{m}{2}$ folgt. Bei der Division von Zahlen in obiger Darstellung können sich die Rundungen, die bei der ziffernweisen Berechnung des Ergebnisses auftreten, nur auf die unmittelbar vorher berechnete Ziffer auswirken. Zu vorgegebenem n kann die Basis m so gewählt werden, dass bei der Produktbildung $\Sigma a_i m^i \cdot \Sigma b_i m^i$ die Summen $\sum_{i=o}^{n-k} a_{n-k-i} b_i$ dem Betrage nach kleiner $\frac{1}{2} m^3$ bleiben, d.h. sie können in drei Ziffern dargestellt werden. Beschränkt man die obigen Zahlen auf maximal n Ziffern, so wird man die Zahlen mit einem Faktor m^e versehen. Soll der Exponent nur eine Ziffer lang sein, so ist $\frac{1}{2} m^{\frac{m}{2}+n+1}$ die grösste darstellbare Zahl.

MOUDRY, J.: <u>Die Triplex-Arithmetik an der Anlage "Minsk-22"</u>

Für eine Triplex-Arithmetik simuliert die Ziffernrechenanlage Minsk-22 eine Einadressenmaschine mit 7 Instruktionen ADD, MULT, SUB, DIV, STORE, LOAD, MINUS. Diese Instruktionen benutzen die Standardunterprogramme ROUNDLEFT und ROUNDRIGHT. Mit Hilfe dieser Unterpogramme ist es möglich, die Triplex-Arithmetik in einfacher Weise zu realisieren. Speziell gefährlich ist die Berechnung von Minimum und Maximum bei der Operation MULT aus Produkten, die verschieden sind, aber deren Differenz Null ist (durch Gleitkommarechnung). Solche Zahlen existieren speziell in den Maschinen mit automatischer Normalisation.

NICKEL, K.: <u>Fehlerschranken zu Näherungswerten von Polynomwurzeln</u>

Gegeben seien ein Polynom n-ten Grades und n Komplexe Näherungswerte zu den (unbekannten) Polynomwurzeln. Es wird ein Algorithmus beschrieben, der zu jedem Näherungswert eine Fehlerabschätzung liefert. Das Verfahren ist "konvergent" und besitzt eine gewisse (schwache) Optimalität. Es benötigt keinerlei zusätzliche Informationen über die exakten Nullstellen und versagt nie, auch nicht im Falle von mehrfachen Nullstellen oder von Wurzelhaufen. Der Algorithmus wird durch ein Triplex-ALGOL-60-Programm verwirklicht, womit auch noch die unvermeidlichen Rundungsfehler berücksichtigt werden.

ROTHMAIER, B.: Das Quadraturwurzelprogramm der EL-X8

Gegeben ist das Gleitkommaargument x (40 duale Mantissenstellen), bestimmt wird eine Näherung für $\sqrt{x}$ (40 duale Mantissenstellen). Mit $m(\sqrt{x}):=\sup\{m\leq\sqrt{x}\,|\,m\in R_M\}$ und $M(\sqrt{x}):=\sup\{M\geq\sqrt{x}\,|\,M\in R_M\}$ wobei $R_M=$ {Menge der Maschinenzahlen} erhält man stets als Näherung $m(\sqrt{x})$ oder $M(\sqrt{x})$. Damit erhält man auch sofort ein Triplexquadratwurzelprogramm TSQRT. Ausführung des Programms: Das Argument wird durch $x_m:=x\cdot 2^{-2k}$ auf $x_m\in[\frac{1}{4},1]$ reduziert. Eine Ausgangsnäherung für $\sqrt{x_m}$ erhält man durch lineare Approximation. Darauf folgen 3 Newton-Verbesserungen. Eine Fehlerabschätzung unter Berücksichtigung der Rundungsfehler zeigt, dass die oben angegebene Genauigkeit erreicht wird.

SCHIELER, M.: Lösungseinschliessung bei gewöhnlichen DGln

1) Das Anfangswertproblem $y'=f(x,y)$, $y(0)=y_o$ mit $y\in C_n^1$.
Für eine grosse Klasse von Funktionen f, nämlich genau solche, die Lösungen rationaler DGln sind, wird eine Einschliessung der Lösung durch lokale Taylorentwicklungen mit einer Einschliessung des Restgliedes sowie der Werte $\frac{1}{j!}\cdot\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}f(x,y(x))$ mit Hilfe von Intervallmethoden erreicht. Die Schrittweite wird von Schritt zu Schritt so angepasst, dass der relative Fehler der Maschinengenauigkeit entspricht. Die Ordnung der Taylorentwicklung wird so gewählt, dass der Rechenaufwand minimal wird. Mehrere Beispiele.

2) Das Randwertproblem $y''=f(x,y)$ in (x_1,x_2), $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$ wird als Integralgleichung formuliert. Es wird ein Verfahren zur Einschliessung der Lösung von $y(x)=h(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t,y(t))dt$ mit Intervallmethoden und dem Satz über kontrahierende Abbildungen angegeben. Als Beispiel wird das Problem $y''=1+\frac{1}{2}y(x-y)$ in $(0,1)$, $y(0)=y(1)=1$ behandelt. Literaturhinweis: Moore, Interval Analysis, Prentice Hall 1966.

SCHMITT, B.: <u>Schranken für den Wertebereich eines Polynoms in einem Intervall</u>

Mit Hilfe einer Fehlerschranken-Arithmetik werden Schranken für das Minimum und Maximum eines Polynoms $P(x)$, dessen Koeffizienten "Intervallzahlen" sein können, in einem Intervall $[a,b]$ berechnet. Dazu werden die Nullstellen von $P'(x)$ in Intervalle eingeschlossen, auf denen $P(x)$ in geeigneter Weise ausgewertet wird. Die Nullstellen von $P'(x)$ erhält man dadurch, dass man ausgehend von einer Ableitung $P^{(i)}(x)$ mit $P^{(i)}(x)\neq 0$ in $[a,b]$ sukzessive die Nullstellen von $P^{(i-1)}(x)$ bis $P'(x)$ bestimmt. Dabei bedient man sich der Tatsache, dass zwischen zwei Nullstellen von $P^{(l)}(x)$ höchstens eine Nullstelle von $P^{(l-1)}(x)$ liegt. Die Nullstellen werden jeweils mittels des Halbierungsverfahrens in Intervalle eingeschlossen.

TOST, R.: <u>Inversion grosser Matrizen mit Intervallmethoden</u>

Mit einem iterativen intervallarithmetischen Verfahren von Krückeberg [ZAMM 46] wurden grosse Pkt-Matrizen (Ordnung bis 400) invertiert. Auf diese Weise konnten Rundungsfehler bei der Invertierung beliebiger Matrizen, die keine spezielle Struktur (Symmetrie, viele Nullelemente) besitzen müssen, berücksichtigt werden. In der Praxis treten oftmals Matrizen mit obigen speziellen Eigenschaften auf, so z.B. bei der Diskretisierung der 1. Randwertaufgabe der part. D.G.l. $\Delta u - cu = g$, $c \geq 0$, im Rechteck.

Diese Matrizen wurden mit einem direkten intervallarithmetischen Verfahren - entwickelt aus dem Drei-Diagonalen-BLOCKGAUSS - invertiert. Mit diesem Algorithmus konnte eine numerisch gesicherte Fehlereinschliessung der Inversen auf ca. 5 Dezimalstellen (Gleitpunktzahlen) angegeben werden.

VLČEK, J.: Anwendung der Triplex-Arithmetik auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems

In diesem Referat wird eine Fehlerabschätzung für die Lösung eines linearen Gleichungssystems beschrieben. Dieses System, das eine Tridiagonal-Matrix mit komplexen Koeffizienten hat, beschreibt die Drehschwingung eines mechanischen Systems. Direkte Anwendung der Triplex-Arithmetik bei der Gauss-Elimination brachte eine zu pessimistische Fehlerabschätzung. Mit Hilfe des Newton Iterations-Verfahren wurde diese Abschätzung befriedigend verbessert.
Eine Reihe konkreter Beispiele wurde berechnet und aus den Ergebnissen folgt, dass die Anwendung der Gauss-Elimination bei der Lösung dieses Problems verlässlich ist.

WISSKIRCHEN, P.: Berücksichtigung von Monotonieverhältnissen bei der intervallarithmetischen Behandlung linearer Gleichungssysteme

Für eine gegebene Intervallmatrix [A] und eine rechte Seite [a] ist die Lösung L des Gleichungssystems ([A],[a]) definiert durch $L=\{A^{-1}\cdot a \mid A\in[A],\ a\in[a]\}$. Ist L_i die Menge der i-ten Komponenten von L, so stellen sich die Probleme:

(1) Gesucht ist ein Intervallvektor $[x]=([x_i])_{i=1,\dots,n}$ mit $[x]\supseteq L$, d.h. $[x_i]\supseteq L_i$ für $i=1,\dots,n$.

(2) Gesucht ist ein Intervallvektor $[y]=([y_i])_{i=1,\dots,n}$ mit $[y_i]\subseteq L_i$ für $i=1,\dots,n$.

Durch Informationen über die Abhängigkeit der Lösungsmenge L von den Anfangsdaten gelangt man zu einem iterativen Verfahren,

das es gestattet, Problem (1) zu lösen. Ebenfalls ist in vielen Fällen die Lösung des Problems (2) möglich, falls nämlich die Intervallängen der Ausgangsdaten nicht zu klein sind.
Das hier vorgetragene Verfahren liefert in vielen Fällen bessere numerische Ergebnisse als die bisher bekannten intervallarithmetischen Iterationsverfahren; es treten nicht die negativen Effekte auf, die man als "Nichtberücksichtigung von Abhängigkeiten" unter den bei der Rechnung auftretenden Intervallen bezeichnet.

K. Nickel, Karlsruhe