MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 17/1969

Numerische Methoden der Approximationstheorie

9.VI. bis 13.VI.1969

Die diesjährige Tagung über numerische Methoden der Approximationstheorie, die dritte ihrer Art in Oberwolfach, hat lebhaften Zuspruch gefunden; insbesondere aus dem Ausland (Japan, USA, Kanada) waren zahlreiche Gäste erschienen. Tagungsleiter waren Prof.Dr.Dr.h.c.L.Collatz und Prof.Dr.G. Meinardus.

Aus den Referaten und Diskussionsbeiträgen wurde deutlich, daß die Entwicklung der Approximationstheorie im wesentlichen in zwei Richtungen fortschreitet. Einerseits werden Methoden der Funktionalanalysis herangezogen, um hiermit Aussagen- etwa über die Konstruktion von Approximationsoperatoren, über Konvergenz und Fehlerschranken- zu gewinnen. Auf der anderen Seite wurden auch eine Reihe von Problemen spezieller Art behandelt, die für die Anwendungen wichtig sind. Hier fanden Untersuchungen über die Approximation durch Exponentialsummen und durch Spline-Funktionen besondere Beachtung. Wie bei den vorangegangenen Tagungen stand dabei die Approximation im Sinne von Tschebyscheff im Vordergrund, deren Bedeutung gerade in neuerer Zeit stark gewachsen ist. Dabei wurden auch Möglichkeiten zur Approximation der Lösungen von Differential- und Integralgleichungen diskutiert.

Es wurde deutlich, daß bei vielen aus den Anwendungen kommenden Problemen tiefliegende mathematische Approximationsaufgaben vorliegen, von deren Lösung man noch weit entfernt ist. Auf die Möglichkeit, derartige Fragestellungen zu bearbeiten, wurde zu Beginn der Tagung dringend hingewiesen, denn aus den oft sehr interessanten naturwissenschaftlichen Problemen (z.B. in Physik, Elektrotechnik u.a.) ergeben sich reiche Anregungen für die mathematische Forschung. Zu einer effektiven mathematischen Untersuchung ist dabei eine praxisnahe Auswertung der gewonnen Ergebnisse unerläßlich. Bei den lebhaften Diskussionen zeigten sich die Teilnehmer der hier zutage tretenden Problematik gegenüber sehr aufgeschlossen.

Begünstigt wurde der Erfolg der Tagung durch die bekannte harmonische Atmosphäre des Oberwolfacher Instituts.

Teilnehmer

J. Albrecht, Hamburg
Ph.M. Anselone, Corvallis /USA
P. Arminjon, Hamburg
Ch. Bandle, Zürich
Blatt, Saarbrücken
D. Braess, Münster
E. Bohl, Hamburg
E. Bredendiek, Hamburg
B. Brosowski, München
W. Cheney, Lund
L. Collatz, Hamburg
J.E. Dennis, Colchester
Dejon, Rüschlikon
H.J. Dirschmid, Wien
I. Galligani, Ispra
C. Geiger, Clausthal-Zellerfeld
R.P. Gilbert, Bloomington
W. Haußmann, Bochum
Janszen, Münster
W. Krabs, Hamburg
H. Krisch, Hamburg
Lambert, Ispra
F. Locher, Tübingen
A. Lupas, Cluj
B. Machost, Bonn
M. Maier, Erlangen
G. Meinardus, Erlangen
G. Merz, Erlangen
Nakashima, Bonn
R. Reißig, Saarbrücken
Price, Seattle

W. Riha, Wien
K. Ritter, Karlsruhe
P.O. Runck, Clausthal-Zellerfeld
W. Sippel, Erlangen
L. Smith, Genf
F.W. Schäfke, Köln
G. Schmeißer, Erlangen
G. Schmitgen, Birlinghoven
E. Schock, Bonn
R. Schnabl, Wien
A. Schneider, Köln
G.D. Taylor, East Lansing
J. Töpfer, Berlin
C. Unger, Endersbach
M. Urabe, Coventry
R. Varga, Cleveland
H. Werner, Münster
W. Wetterling, Enschede
K. Zeller, Tübingen

Vortragsauszüge

Franz Locher und Karl Zeller: Gitterpunktmethoden

Vorwort: Bemerkungen zum Mathematikbetrieb.- Uebersichtsvortrag über Approximation auf Gitterpunkten und Obermengen. Diskussion verschiedener Alternativen (und Varianten) mit Angabe der Vor- und Nachteile unter Berücksichtigung der Situation und der Voraussetzungen. Behandlung linearer Polynom-Approximationen im Reellen unter Hinweis auf Verallgemeinerungen (z.B. mehrdimensional). Besondere Hinweise auf Fragen der Stabilität. Hauptpunkte: Gitter (Konstruktion während der Rechnung oder feste Wahl); Gittertyp (äquidistant oder Cebysev-Typ); Polynomdarstellung (nach Horner oder mit Cebysev-Polynomen); Funktionsdarstellung (ursprüngliche Form oder trigonometrische Transformation); Anfangsapproximation (Interpolation oder Fourier-Entwicklung); Verbesserung (Einzel- oder Simultanaustausch); Beziehung zu verschiedenen Verfahren der Linearen Programmierung; Abschätzung (des Verhaltens zwischen den Gitterpunkten, a priori oder a posteriori). Ergänzungen: Nebenbedingungen (z.B. Bedingungen an die Ableitung). Hinweise auf Formulierung exakter Sätze (etwa bei Lebesgue-Konstanten).

Alexandru Lupas: On the approximation by linear positive operators

It is our purpose to investigate the graphic behavior of some linear positive operators. Let $F_j(I_j), j=1,2$, denote two linear spaces of real functions defined on the sets $I_j, j=1,2$, of points of the real axis. Let $L_n: F_1(I_1) \dashrightarrow F_2(I_2)$, $n=1,2,\ldots$, be a sequence of linear positive operators which converges to the identical operator. We study some operators which preserve the convexity of a higher order of a function f from $F_1(I_1)$ and likewise which are variation-diminishing operators. Also, we introduce the concept of variation diminishing operators of a higher order. For instance, if $F_1(I_1)$ is the set of functions which are defined on $[0,\infty)$ and such that $|f(t)| \leq e^{At}$, for $t \geq 0$ and some finite A, we prove that the Szasz-Mirakyan operators S_n which are defined on $F_1(I_1)$ by

$$(S_n f)(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

preserve these qualitative properties of the functions $f \in F_1(I_1)$.

J.E. Dennis: On the Convergence of Newton-Like Methods.

Kantorovich proved his well-known theorem on Newton's method for nonlinear operators by using various smoothness assumptions on F to find a scalar function F such that the convergence of the scalar Newton sequence implies the convergence of the vector Newton sequence. It is shown here that for an iterative method of the form $x_{k+1} = x_k - A(x_k)^{-1} F(x_k)$ we can, under appropriate conditions, write scalar functions $a(t)$ and $f(t)$ such that the vector sequence converges when $t_{k+1} = t_k - a(t_k)^{-1} f(t_k)$ converges.

Werner Haußmann: Mehrdimensionale Hermite-Interpolation

Mit Hilfe einer abstrakten Fassung des allgemeinen Interpolationsproblems wird das Tensorprodukt zweier Interpolationsprobleme definiert. Dieses ist genau dann eindeutig lösbar, wenn beide zugrundegelegten Interpolationsaufgaben eine eindeutig bestimmte Lösung besitzen.
Als Anwendung ergibt sich die zweidimensionale Hermite-Interpolation.
Benutzt man in beiden Koordinaten ρ-normale Knotenmatrizen ($\rho > 0$), so läßt sich für ein $f : [0,1]x[0,1] \dashrightarrow R$ mit $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathrm{Lip}\ \alpha$ ($\alpha > 0$) zeigen, daß der Lagrange-Operator $L_i(f)$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Entsprechendes gilt für den Fejér-Hermite-Operator für beliebiges stetiges f.
Bei Benutzung der Čebyšev-Knoten ergeben sich Aussagen über dieKonvergenzgüte wie im Eindimensionalen für den Fall der Fejér-Hermite-Interpolation. Die Lagrange-Interpolation konvergiert im zweidimensionalen Fall um log n schlechter als im R^1.

R.P. Gilbert: A New Method for constructing Solutions for Boundary Value Problems.

A Method of Ascent is derived by which one may obtain general representation formulae for solutions of higher dimensional partial differential equations from a similar formula for the two dimensional case. This representation is an integral operator which maps the class of harmonic functions regular in a star-like region D onto the class of regular solutions in D of $\Delta_n u + B(r)u = 0, r = ||\underset{\sim}{x}||$. A constructive method is given for the kernel of the integral operator. Combining this expression with the double-layer potential representation permits one to formulate the associated Dirichlet problem as a Fredholm integral equation, with weak singularities. Standard numerical procedures now may be used to solve the Fredholm equations, and to approximate the integral operator.

L. Collatz: Approximationstheorie und Anwendungen.

1. Der Durchschnitt der Probleme, die der Approximationstheoretiker untersucht und der Probleme, deren mathematische Untersuchungen vom Standpunkt der Anwendungen aus dringend erwünscht wäre, scheint gegenwärtig viel zu klein zu sein.
2. Bei der raschen Entwicklung der physikalischen und technischen Wissenschaften gibt es eine Fülle mathematisch recht tiefliegender und reizvoller Approximationsaufgaben in den Anwendungen, die aus dem Konventionellen ganz herausfallen.
3. Neben die klassische Approximation treten bei Differential- und Integralgleichungen häufig weitere Typen von Aufgaben; es seien nur die Syn-Approximation (z.B. Funktion und partielle Ableitungen sind gleichzeitig zu approximieren), die Simultan-Approximation (hier sind auch mehrere Bereiche zugelassen) und die Combi-Approximation (hier sind auch verschiedene Funktionenklassen in den einzelnen Bereichen zugelassen) genannt.
4. In den Anwendungen treten selbst für die klassischen Approximationen unkonventionelle Fragen auf, z.B. für die Exponential-Approximation (z.B.: approximiere eine Funktion $\varphi(\sigma,\tau)$ im Gebiet $0\leq\sigma\leq\tau\leq 1$ durch eine Funktion $\frac{1}{a}\, e^{a(1-\sigma)(1-\tau)}$ im Tschebyscheffschen Sinne, bestimme den Parameter a).
5. Der auch für die Combi-Approximation gültige Einschließungssatz gestattet in vielen Fällen, auch bei nichtlinearer Approximation mit mehreren unabhängigen Variablen, die Güte der Approximation zu beurteilen, doch scheint es sehr erwünscht, den Bereich seiner Anwendbarkeit zu erweitern.

P.O. Runck: Jacksonsätze bei Polynomapproximation.

Untersucht werden einige Fragen, die die Approximation von stetigen Funktionen aus Teilklassen von $C[a,b]$ durch Polynome betreffen. Nach Jackson gilt für die Klasse $\{f^{(k)} \in \mathrm{Lip}_M\, \alpha\}$ die Abschätzung (Pn bestappr. Polynom) $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-P_n(x)| < c_k\, M(\frac{1}{n})^{k+\alpha}$.

Folgende spezielle Fragen werden von Verf. und M.v. Golitschek betrachtet.

i) Abschätzungen für $f^{(\rho)}-P_n^{(\rho)}$ $(0<\rho\leq k)$ und $P_n^{(\rho)}$ $(\rho \geq k+1)$ sowie Aussagen für die Koeffizienten des Approximationspolynoms, ii) entsprechende Abschätzungen bei Polynomen, für die eine Konvergenz-verbesserung am Rande gilt (Timansche Verbesserung des Jacksonsatzes iii) lokale Verbesserung der Jacksonaussage in der Umgebung eines Pktes $x_0 \in (a,b)$. iv) Jacksonaussagen bei Polynomen $\sum_{v=0}^{m} c_v x^{p_v}$ $(0 \leq p_0 < p_1 <, \ldots, p_i \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \infty$; $0 \leq a < b)$.

E.W. Cheney: Some Problems in Approximation by Projections.

If P is a projection of a normed space X onto a subspace Y, then for all $x \in X$,

$$||x-Px|| \leq ||I-P|| \cdot \mathrm{dist}\,(x,Y)$$

Thus, for approximation-theoretic purposes, one seeks a projection $P : X \longrightarrow Y$ for which $||I-P||$ is a minimum. There are very few instances where such minimal projections are known explicity. The existence, unicity, and characterization of these minimal projections will be discussed in the lecture.

L.B. Smith: Using Iteractive Graphics on Approximation Problems.

Recent years have seen the development of on-line (time sharing) computer systems which can eliminate the writing for results which is associated with batch processing systems. Some of these oneline computer systems employ graphical Terminals (CRTs) which can be used to display numerical analysis and approximation problem results graphically. Some existing on-line graphical computer systems for solving mathematical problems are designed to solve general mathematical problems interactively. Special purpose on-line graphical systems provide facilities for solving problems in a specific area.

A special purpose system, the PEG system was written at Stanford University to solve least squares approximation problems on-line. It allows a choice of several built-in functions or user specified functions as the approximating function, data manipulation, parameter entry, choice of degree, calculation of the least squares approximation, display of intermediate and final results, and the ability to go back and start over at any point in the approximation process. For non-linear problems a directional minimization method is used or an interactive minimizer which presents graphs allowing the user to change parameter value by hand. Work has also been done on an on-line graphical method to estimate parameters in exponential approximations.

It is felt that there are many other applications of on-line graphics to approximation problems. For example, in an implimentation of the Remez algorithm, a display of the error curve could be very revealing as to the progress of the calculations.

P.M. Anselone: Abstract Riemann Integrals, Positive Linear Operators, and Korovkin's Theorem.

The proper Riemann integral can be obtained from the integral of a continuous function by a two-sided Daniell extension procedure The same method yields extensions of positive linear functionals on partially ordered linear spaces. Monotonicity considerations lead to some interesting results on sets of uniform convergence of positive linear functionals and operators. For example, the convergence of numerical integrals to integrals extends to Riemann integrable functions. This has applications to the approximate solution of integral equations with discontinuous kernels. We also obtain a generalization of Korovkin's theorem.

W. Krabs: Zur numerischen Lösung linearer und nichtlinearer Approximationsaufgaben.

Bei der gleichmäßigen Approximation einer Funktion $f \in C(M)$ (M=kompakter Hausdorff-Raum) durch Funktionen einer Familie $F(A) = \{F(\alpha)\}_{\alpha \in A}$, A(nichtleer) $\subseteq \mathbb{R}^n$, gilt die folgende notwendige Bedingung für beste Approximierende, falls A offen und $F : A \dashrightarrow C(M)$ auf A Fréchet-differenzierbar ist: Für jede beste Approximierende $F(\hat{\alpha}) \in F(A)$ für f ist

$$\min_{x \in E_{\hat{\alpha}}} (F(\hat{\alpha},x)-f(x))F'_{\hat{\alpha}}(h,x) \leq 0 \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R}^n . \qquad (*)$$

Dabei ist $F'_{\hat{\alpha}}$ die Fréchet-Ableitung von F in $\hat{\alpha}$ und

$$E_{\hat{\alpha}} = \{x \in M : |F(\hat{\alpha},x)-f(x))=||F(\hat{\alpha})-f||\} \quad (||\cdot||=\text{Maximum-Norm in } C(M)).$$

Für endliches M läßt sich für gewisse Funktionen $F : A \dashrightarrow C(M)$, für die (*) auch hinreichend für beste Approximierende ist, eine

Art Gradientenverfahren zur schrittweisen Verbesserung von Näherungslösungen angeben, das (*) als Optimalitätskriterium verwendet. Die Gradientenrichtung kann durch Lösung einer linearen Optimierungsaufgabe ermittelt werden und die Schrittweite durch Berechnung eines Minimums aus endlich vielen Zahlen.

E. Schock : Approximation von Hölder-stetigen Funktionen

Im Banachraum $C_\alpha\,[0,1]$ der α-Hölder-stetigen Funktionen wird der lineare Approximationsoperator

$$L_n f = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 X_i \, df \cdot \varphi_i$$

betrachtet. Dabei ist $\{X_m\}$ das Haar'sche Orthonormalsystem und $\varphi_n(t) = \int_0^t X_m(\tau)\,d\tau$. Dann gilt für alle β mit $\alpha \leq \beta \leq 1$ und mit einer Konstanten m_β

$$||f-L_n f||_\alpha \leq m_\beta \cdot \left(\tfrac{1}{n}\right)^{\beta-\alpha} ||f||_\beta .$$

Bezeichnet man mit $\mathfrak{U}_\alpha$ die Einheitskugel in $C_\alpha[0,1]$, $\mathfrak{U}_\beta = \{f \in C_\alpha[0,1], ||f||_\beta \leq 1\}$ so folgt aus der Beziehung

$$m_\alpha^{-1} \leq n^{\beta-\alpha}\, \delta_n(\mathfrak{U}_\beta, \mathfrak{U}_\alpha) \leq m_\beta \ ,$$

daß die von den Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ erzeugten Teilräume nahezu extremal sind im Sinne von KOLMOGOROV ($\delta_n(\mathfrak{U}_\beta, \mathfrak{U}_\alpha)$ ist der n-te Kolmógorow-Durchmesser von $\mathfrak{U}_\beta$ bezüglich $\mathfrak{U}_\alpha$).

G.D. Taylor: Numerical Calculation of Best Restricted Approximations.

Let X be a compact subset of $[a,b]$ and denote the class of all real valued continuous functions defined on X by C(X) where C(X) is normed by $||f|| = \max\{|f(x)|: x \in X\}$. Let M be a given n-dimensional Haar subspace of $C[a,b]$ and let ℓ and u be functions defined on X satisfying $\ell \leq u$. Define $\widetilde{M}$ by $\widetilde{M} = \{p \in M: \ell(x) \leq p(x) \leq u(x)$ for all $x \in X\}$. Assume that ℓ and u are chosen so that $\widetilde{M} \neq \emptyset$. Let $f \in C(x)$ then $p \in \widetilde{M}$ is said to be a best restricted approximation to f provided $||f-p|| = \inf\{||f-q|| : q \in \widetilde{M}\}$.

Various questions of approximating continuous functions with the class $\tilde{M}$ have been studied recently. In this talk we shall summarize the theoretical aspects of the problem and then show (with some detail) how one may use a modified Remes algorithm to calculate best restricted approximations corresponding to rather general 1 and u.

W. Wetterling, Enschede: Definitheitsbedingungen bei Optimierungs- und Approximationsaufgaben.

Es wird folgende Optimierungsaufgabe betrachtet:

$M = \{x;\ f(x,y) \leq 0 \quad (y \in Y)\} \subset R^n,$

$Y = \{y;\ g_i(y) \leq 0 \quad (i=1,\ldots,N)\} \subset R^m;$

gesucht sind relative Maxima von $F(x)$.
Alle Funktionen sind reellwertig definiert und zweimal stetig differenzierbar im ganzen Raum. Es werden hinreichende und notwendige Bedingungen für Maxima angegeben, in denen wesentlich die (Semi-)Definitheit einer quadratischen Form (quadratischer Anteil einer Langrange-Funktion) auf einem linearen Teilraum enthalten ist. Aufgaben der Tschebyscheff-Approximation, auch nichtlineare, solche in mehreren Veränderlichen und mit unbeschränkten Bereichen werden hierdurch erfaßt. Anwendungsmöglichkeiten liegen u.a. bei der Behandlung von Randwertaufgaben monotoner Art.

M. Urabe: On aposteriori error estimation of approximate solutions.

When one gets an approximate solution numerically by any method, it is important to get an error estimate for the approximate solution obtained, To get an error estimate, it is required naturally to verify the existence of an exact solution from the approximate solution obtained. On the basis of the Newton method, we have established a theorem which enables one to assert the existence of an exact solution directly from the approximate solution obtained and at the same time to get an error estimate for the approximate solution. Theorem will be sketched briefly and its application to theory of nonlinear oscillations will be sketched.

W. Sippel: Einseitige Tschebyscheff-Approximation mit und ohne Nebenbedingungen.

S und V seien endlichsimensionale Teilräume von $C[a,b]$ mit $V \subset S$ und $\dim V = n+1$. Gegeben sind $f,g \in C[a,b]$ mit $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x)$ für $x \in [a,b]$ und $f \notin V$, $f \in S$ und außerdem ein invers-monotoner Operator $T: S \dashrightarrow C[a,b]$ mit $Tf = h$. Wir verwenden die Max-Norm in $C[a,b]$.

Def.: $V_1 = \{v \in V : v \geq f\}$, $V_2 = \{v \in V : v \leq f\}$, $\bar{V}_1 = \{v \in V : Tv \geq h\}$,
$\bar{V}_2 = \{v \in V : Tv \leq h\}$.

Folgende Aufgaben werden behandelt:

A1: Gibt es $u_1 \in V_1$ mit $\|u_1-f\| \leq \|v_1-f\|$ für alle $v_1 \in V_1$?

B1: Gibt es $w_1 \in V_1$ und $w_2 \in V_2$ mit $\|w_1-w_2\| \leq \|v_1-v_2\|$ für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$?

A2: Gibt es $u_1 \in \bar{V}_1$ mit $\|u_1-f\| \leq \|v_2-f\|$ für alle $v_1 \in \bar{V}_1$?

B2: Gibt es $w_1 \in \bar{V}_1$ und $w_2 \in \bar{V}_2$ mit $\|w_1-w_2\| \leq \|v_1-v_2\|$ für alle $v_1 \in \bar{V}_1$ und $v_2 \in \bar{V}_2$?

A3: Gibt es $u_1 \in V_1$ mit $\|u_1-g\| \leq \|v_1-g\|$ für alle $v_1 \in V_1$?

Die Funktionen u_1, w_1, w_2 existieren, wenn V_1, V_2 bzw. $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$ nicht leer sind. Das Kolmogoroff-Kriterium für die Minimallösung ist in allen Fällen notwendig und hinreichend. Es läßt sich einfacher als im allgemeinen Fall schreiben.
Für die Lösung u_1 von A3 kann gelten (I) $\|u_1-g\| > \|f-g\|$ oder (II) $\|u_1-g\| = \|f-g\|$. Im Falle (I) ist u_1 eindeutig bestimmt, falls V die Haarsche Bedingung erfüllt. Dann gibt es n+2 Punkte, in denen u_1 abwechselnd mit f übereinstimmt bzw. maximalen Abstand von g hat. Im Falle (II) gibt es eine Lösung $\bar{u}_1$, die unter allen Lösungen f am besten approximiert und ein modifiziertes Alternantenverhalten besitzt.
Da w_1 beste Approximation an w_2 und w_2 beste Approximation von w_1 ist, hat man für w_1 und w_2 von B1 entsprechendes Verhalten wie bei u_1 in A3.

R. Reißig: Ein Approximationsverfahren für die periodischen Lösungen gewisser nichtlinearer Differentialgleichungen

Das Problem, ω-periodische Lösungen einer Vektor-Differentialgleichung $x' = A(t)\,x + g(t,x)$ zu bestimmen, wobei die rechte Seite in t ω-periodisch sei, kann man im allgemeinen auf die Lösung einer Integralgleichung vom Hammersteinschen Typ

$$x(t) = \int_0^{\omega} G(t,\tau)\; g(\tau,x(\tau))\; d\tau$$

zurückführen. Eine eindeutige Lösung ist hier gesichert, wenn man die Nichtlinearität g einer Lipschitz-Bedingung mit genügend kleiner Lipschitz-Konstante unterwirft (Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes). Diese Bedingung ist für die Anwendungen jedoch zu einschneidend (Beispiel der Duffingschen Gleichung). Daher wird folgende Modifikation vorgeschlagen: Man geht von einer Näherungslösung aus, die man als Element eines passenden Funktionenraumes ansieht; die Lipschitz-Bedingung setzt man für eine bestimmte Umgebung dieser Approximation voraus. Dann kann man den Banachschen Fixpunktsatz dazu benutzen, die Näherung schrittweise zu verbessern und eine periodische Lösung mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Das Verfahren wird für den Fall erläutert, in dem das Zusatzglied g nur von einigen Komponenten des Vektors x abhängt, und am Beispiel der Duffingschen Gleichung illustriert. Als einzige Bedingung erhält man hier eine Einschränkung des bei der Nichtlinearität stehenden Parameters; die Schranke kann explizit angegeben werden.

E. Bredendiek: Simultanapproximation.

Einige Probleme aus den Anwendungen, insbesondere Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen, führen auf Simultanapproximationen, die sich der folgenden Aufgabe unterordnen:

Seien $(X,\|\cdot\|)$, $(Y,|\cdot|)$ und X_p reelle normierte Vektorräume. Sei P eine nichtleere Teilmenge von X_p und $F: P \dashrightarrow X$ eine vorgegebene Abbildung. Ferner sei $F(P)$ in einer Menge $Z \subset X$ enthalten, und gegeben sei eine Abbildung $A: Z \dashrightarrow Y$, die auf $F(P)$ stetig und beschränkt ist. Zu vorgegebenem $f \in X$, $f \notin F(P)$, für das Af definiert ist, ist $b \in P$ so zu bestimmen, daß

$$\max(\|f-Fb\|, |Af-AFb|) \leq \max(\|f-Fa\|, |Af-AFa|)$$

für alle $a \in P$ gilt.

Für die Simultanapproximation lassen sich analog zur gewöhnlichen Approximation Existenzsätze, Einschließungen der Minimalabweichung und Charakterisierung der Minimallösung angeben. Als Anwendungsbeispiele werden Randwertaufgaben bei der Plattengleichung betrachtet.

Dietrich Braess: Die Konstruktion der besten Approximation bei Exponentialsummen.

Es sollen stetige Funktionen im Sinne von Tschebyscheff durch Exponentialsummen der Form

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n e^{\lambda_n x}$$

angepaßt werden. Es wird gezeigt, daß im allgemeinen lokale Minima existieren, wenn man das Approximationsproblem als Minimumproblem auffaßt. Dazu werden die Zusammenhangsverhältnisse in der Familie der Exponentialsummen untersucht.und die Komponenten durch die Vorzeichen (der Faktoren α_n) charakterisiert. Als Konsequenz für die Aufstellung von Iterationsverfahren ergibt sich, daß man bekannte Verfahren wie etwa Remez-Algorithmen nicht formal übertragen kann.

Bei der Iteration sind (zusätzlich) noch die Vorzeichen zu kontrollieren.

Helmut Werner: Bemerkungen zur Tschebyscheff-Approximation mit Exponentialsummen.

Für verallgemeinerte Exponentialsummen $E_n := \{y \mid y \in C^n[a,b];$ Zu y existieren reelle $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ mit $\prod(D-\lambda_j)y = 0^*\}$ gilt, wie aus früher vorgetragenen Ueberlegungen und einer Idee von E. Schmidt folgt, die Aussage:

Zu $I = [a,b]$ und beliebigem $I_1 = [a_1,b_1] \subset (a,b)$ gibt es Zahlen $K_\nu(I,I_1)$ $\nu = 1,2,\ldots$ so daß für jede Funktion $y \in E_n$ gilt

$$\|D^\nu y\|_{I_1} \leq K_\nu(I,I_1) \cdot \|y\|_I .$$

* $D = \frac{d}{dx}$

Daraus folgen sofort Kompaktheitsaussagen für beschränkte Mengen in E_n. Die T-Approximation von $f(x) \in C[I]$ kann man als $y \in E_n$ klassifizieren, für das

$$\eta\,[f,\lambda_1,\dots,\lambda_n] = \inf_{c_j} \| f(x) - \Sigma\, c_j\, e^{\lambda_j x} \| \quad \text{minimal ist bzg.} \lambda_1,\dots\lambda_n$$

auf $\vartheta_\lambda := \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Da man verschiedene lokale Minima haben kann, so muß man global suchen. Es ist deshalb für die numerische Behandlung von Bedeutung, daß $\eta\,[f,\lambda_1,\dots,\lambda_n]$ stetig ist und einem Grenzwert zustrebt, wenn eines oder mehrere λ_j gegen unendlich gehen. Dies ermöglicht eine Kompaktifizierung von ϑ_λ.

R.S.Varga: Theorie und Anwendungen der Spline Funktionen

Wir werden die Resultate von Anselone und Laurent für Spline Funktionen anwenden. Zuerst betrachten wir singuläre nicht-~~singuläre~~ lineare Randwertaufgaben, und dann nicht-lineare Randwertaufgaben für zwei dimensionale Gebiete.

K.Ritter: Zwei-dimensionale Spline-Funktionen und beste Approximation von linearen Funktionalen.

Für eine gewisse Klasse von Ω linearen Funktionalen werden Näherungsformeln der Gestalt

$$(*) \quad \sum_{v=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{q} \sum_{(i,j)\in I(v,\mu)} c_{v\mu}^{ij} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} g(x_v, y_\mu)$$

betrachtet, wobei $I(v,\mu)$ eine beliebige Teilmenge von $\{(i,j) \mid i=0,\dots,m-1, j=0,\dots,n-1\}$ ist. Die Näherung soll exakt sein für alle $g(x,y) = \Sigma_{i=0}^{m-1} \Sigma_{j=0}^{n-1} \; p_{ij}\; x^i\, y^j$.

Es wird gezeigt, daß man für ein beliebiges $\ell \in \Omega$, die Koeffizienten $c_{v\mu}^{ij}$, für welche $(*)$ eine im Sinne von SARD beste Approximation von $\ell(g)$ liefert, erhält, indem man ℓ auf eine geeignete Spline-Interpolationsformel anwendet.

H. Krisch (Hamburg)