Math. Forschungsinstitut
Oberwolfach
E 20 /01176

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 18|1969

Integralgeometrie und Geometrische Wahrscheinlichkeit

15.6. bis 21.6.1969

Die zu diesem Thema erste Tagung in Oberwolfach wurde von Herrn D.G. Kendall (Cambridge) und Herrn K. Krickeberg (Heidelberg) geleitet. Sie sollte weniger der Präsentation einer großen Anzahl kurzer und sehr spezieller Referate dienen, sondern vielmehr dazu, durch Gespräche in kleinem Kreis (auf Wanderungen etwa), einen Zusammenhang zwischen den oft sehr disparaten Teilen dieses Gebietes herzustellen. Frau R. Trandafir (Bukarest) und Herrn M.J. Stoka (Bukarest) war es leider nicht möglich zu kommen; sie schickten jedoch Vortragsauszüge, die in diesen Bericht aufgenommen sind. Die Teilnehmerzahl betrug 15, davon 10 Teilnehmer aus dem Ausland. Die Tagung wurde eröffnet mit einem Überblicksreferat von Herrn Santaló. Thematische Schwerpunkte der Tagung waren:

a) Stochastische Prozesse, deren Wertebereich aus geometrischen Objekten besteht (Geraden, Ebenen, konvexe Körper)
(Bingham, Davidson, Giger, Krickeberg, Miles, Ziezold)

b) Differentialgeometrie und geometrische Wahrscheinlichkeit
(Horneffer, Santaló, Stoka, Trandafir)

c) Anwendung integralgeometrischer Methoden in den empirischen Wissenschaften (Kendall).

Es zeigte sich, daß hier, hervorgegangen aus Fragestellungen der Geometrie, Differentialgeometrie und Wahrscheinlichkeitstheorie eine eigenständige Disziplin entsteht, für die auch der Name "Stochastische Geometrie" bzw. "Random Geometry" (Krickeberg und Miles) vorgeschlagen wurde.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Teilnehmer

N.H. Bingham, Cambridge (England)
R. Davidson, Cambridge (England)
N. Dinculeanu, Bukarest (Rumänien)
H. Giger, Bern (Schweiz)
H.R. Gnägi, Bern (Schweiz)
K. Horneffer, Göttingen
D.G. Kendall, Cambridge (England)
U. Krause, Heidelberg
K. Krickeberg, Heidelberg
H. Kulle, Göttingen
R.E. Miles, Canberra (Australien)
L.A. Santaló, Buenos Aires (Argentinien)
M.J. Stoka, Bukarest (Rumänien)
R. Trandafir, Bukarest (Rumänien)
H. Ziezold, Heidelberg

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

Vortragsauszüge

N.H. BINGHAM: A class of limit theorems for stochastic processes

The problems considered are generalizations of the problem on occupation-times for Markov processes considered by Darling and Kac (TAMS 1957). Let $\{X(t,\omega):t\geq 0\}$ be a Markov process with stationary transition probabilities, and let Φ be a non-negative measurable function such that (X,Φ) satisfy the Darling-Kac Condition (A). Consider the processes $H(t,\omega) = \int_0^t \Phi(X(u,\omega))du$, $T(r,\omega) = \sup\{t: H(t,\omega)\leq r\}$.

We formulate and solve the problem of norming the H- and T-processes and passing to the limit to obtain non-degenerate limit stochastic processes, the convergence being weak with respect to the Skorokhod topology.

R. DAVIDSON: Definition of Line Processes

We discuss the question of whether there exist random processes of lines in the plane which

(1) are locally square-summable and possess second-order product-moment densities

(2) are strictly stationary under the rigid motions of the plane

(3) are NOT doubly-stochastic Poisson.

H. GIGER: Ein Poissonprozess über zufälligen Eikörperfeldern

Ein Wahrscheinlichkeitsraum, dessen Elemente Systeme von abzählbar unendlich vielen, kongruenten konvexen Körpern des k-dimensionalen euklidischen Raumes mit existierender Anzahldichte sind, wird wie folgt als stationärer Poissonprozess charakterisiert.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein konvexer Stichprobenkörper U genau n Treffer aufweist, existiere für alle nicht negativen n . Sie sei bei gegebenem Erwartungswert p der

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Trefferzahl normierbar, stetig und bewegungsinvariant in U und die Treffer in U seien (in präzisierbarer Weise) voneinander unabhängig und relativ zu U gleichverteilt.

Dann ist der Parameter p der Poissonverteilung proportional zum Integralmittelwert der Trefferzahl über die Bewegungen von U in einer Realisierung des Prozesses.

K. HORNEFFER: Eine Croftonformel und der Satz von Stokes

Es sei N eine k-dimensionale orientierte kompakte differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ (mit oder ohne Rand), ω eine Differentialform k-ten Grades auf $\mathbb{R}^n$. $G(n,1)$ $(0\leq 1\leq n)$ bezeichne die Mannigfaltigkeit der 1-dimensionalen orientierten affinen Teilräume des $\mathbb{R}^n$. Für $g\in G(n,1)$ bezeichne $V(g)$ das konstante (n-1)-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$, das durch den normierten zum Vektorraum von g komplementären (n-1)-Vektor definiert ist. T sei das positive normierte k-Tangentialfeld von N. Für $p\in N$, $g\in G(n,n-k)$ sei dann $s(p,g):=\operatorname{sgn}(V(g)|T)_p$ gesetzt, wobei $(\,|\,)$ die natürliche Metrik des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Weiter sei μ ein invariantes Maß auf dem homogenen Raum

$G(n,n-k)\cong \dfrac{iSO(n)}{iSO(n-k)\times SO(k)}$. Dann gilt die folgende Verallgemeinerung der klassischen Cauchy-Crofton-Formel

$$\int_{G(n,n-k)} \sum_{p\in g\cap N} s(p,g)\langle V(g),\omega\rangle_p \,(dg)=c_{n,k}\int_N \omega$$

mit einer universellen Konstanten $c_{n,k}$.

Mit Hilfe dieser Formel wird ein integralgeometrischer Beweis des Satzes von Stokes für differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des R^n gegeben.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

D.G. KENDALL: A Geometric/Probabilistic Method in Archaeology

1. Call a rectangular matrix of 0's and 1's a PETRIE matrix, where, in each column, the 1's are bunched. Given any matrix of 0's and 1's, A say, we ask (I) can the rows be rearranged to give it the PETRIE form, II (if so) which row-permutations do this? FULKERSON and GROSS proved that (I) can be answered if we know only A^TA. I prove (Pac. J. Math. 28, no. 3, 1969) that (II) can be answered if we know only AA^T. Let $\Sigma = AA^T$.
2. Suppose A is the record of an excavation: $a_{ij}=1/0$ means "objects of type j were/were not found in grave i". Then Σ is a similarity-matrix for graves in the sense of chronology.
3. So I use the MDSCAL procedure (J.B. KRUSKAL, Psychometrica) initiated by Σ, in 2 dimensions, to recover the (unknown) chronology of the graves. This works. (D.G. KENDALL, World Archaeology 1, no. 1, 1969; also forthcoming paper in Proc. Roy. Soc. (A)).

K. KRICKEBERG: Invariante Zerlegungen von Kovarianzmaßen

Es sei Y ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis, $\mathcal{L}$ eine in Y stetig und eigentlich von links wirkende lokalkompakte Gruppe mit abzählbarer Basis, $\sim$ die durch $\mathcal{L}$ in Y definierte Äquivalenzrelation und Γ irgendein lokalkompakter Darstellungsraum für $Y/\sim$, d.h. es gebe eine (im folgenden festgehaltene) stetige Abbildung r von Y auf Γ, so daß $r(x)=r(y)$ gleichwertig ist mit $x \sim y$. Zu jedem $\gamma \in \Gamma$ existiere ein, und bis auf einen positiven Faktor nur ein, auf der Faser $Y_\gamma = r^{-1}\{\gamma\}$ konzentriertes gegen $\mathcal{L}$ invariantes (positives Radonsches) Maß τ_γ in Y. Unter diesen Voraussetzungen ist ein Maß ν in Y dann und nur dann invariant gegenüber $\mathcal{L}$, wenn es sich in der Form

$$\nu = \int_\Gamma \tau_\gamma \, \kappa(d\gamma)$$

darstellen läßt mit einem Maß κ, für das dieses Integral existiert (z.B. im Sinne von N. Bourbaki, Intégration des mesures). Als Beispiel dieses Zerlegungsprinzips wird der Fall des Kovarianzmaßes $\nu(A \times B)=E(Z(A)Z(B))$ eines von 2. Ordnung stationären zufälligen positiven Maßes Z im Raum $X=R \times S_1$ aller orien-

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft
©

tierten Geraden der Ebene behandelt, wobei $Y=X^2$ und $\mathcal{L}$ die durch die Bewegungen der Ebene induzierte Gruppe ist. Aus der durch Bedingungen über $\mathcal{K}$ ausgedrückten Invarianz von ν gegenüber der Abbildung $(w,w') \longrightarrow (w',w)$ ergibt sich auf diese Weise die Invarianz von $\mathcal{K}$ gegenüber Reflexionen in der Ebene, wenn die Paare antiparalleler Geraden das ν-Maß Null haben.

R.E. MILES: Poisson Flats in Euclidean Space

Blaschke (1935) determined the invariant density b of integral geometry in the space S of s-flats in Euclidean d-space $E^d (0 \le s < d)$. The Poisson point process in S with intensity proportional to b induces the Poisson flat process $\mathcal{P}$ in E^d, which is consequently stochastically homogeneous and isotropic. The number of members of $\mathcal{P}$ hitting $X \subset E^d$ has a Poisson $\{\rho\, M_{d-s}(X)\}$ distribution, where $M_{d-s}(X)$ represents mean (d-s)-dim. projection content, and the constant ρ is the intensity of $\mathcal{P}$. A naturally defined ergodic density f_n for $\mathcal{P}_n$, the aggregate of ordered n-subsets of $\mathcal{P}$, is simply related to the product density $\prod_1^n b$. The association of an arbitrary subset of E^d with each member of $\mathcal{P}_n$, subject only to the association being translation invariant, leads to ergodic densities $f_n^{(m)}$ for the sub-aggregate of members of $\mathcal{P}_n$ whose associated sets are hit by exactly m (excluding the "constituent" n) members of $\mathcal{P}$. This procedure often serves to normalize f_n, thus yielding probability distributions of interest. Various generalizations and applications are discussed.

L.A. SANTALÓ: Mean values and curvatures

1. Let K be a convex body in E_4. Let G be the group of isometries of E_4 and let $g\partial K$ denote the image by $g \in G$ of the boundary ∂K. We find the expected value of $\chi(\partial K \cap g\partial K)=$ characteristic of Euler-Poincaré. Conjecture: $\chi \le 2$. The conjecture is true for rectangular parallelepipeds.

2. Let X^n be a compact differentiable manifold of dimension n imbedded in E_{n+N}. Let $T^{(q)}(p)$ be the tangent fiber of order

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

q over $p \in X^n$ (= linear space spanned by the vectors $\partial/\partial x_1, \ldots \partial^q/\partial x_n^q$). Let Γ_r be the set of all linear subspaces of E_{n+N} which are contained or which contain some $T^{(q)}(p)$ and are orthogonal to a $(n+N-r)$-flat through a fixed point O, say $L_{n+N-r}(O)$. The r-th total absolute curvature of order q of X^n is defined as the mean value of the measure of the set $\Gamma_r \cap L_{n+N-r}(O)$. Some particular cases are considered.

M.I. STOKA: Measurable groups and measure of families of manifolds.

Let X^n be a homogeneous space of n dimensions of coordinates $x^1, \ldots, x^n$.

Def. 1. We call measurable Lie group a group which admits a unique integral function, up to a multiplicative constant.

Th. 1. The necessary and sufficient condition for the group $G_r \equiv [X_h f = \xi_h^i \partial_i f, \ (i=1,\ldots,n;\ h=1,\ldots,r)]$ to be measurable is that it be transitive and that the following relations be satisfied:

$c_{uv}^{\ell} \xi_{\alpha}^{i} \xi_{\ell}^{j} \bar{\xi}_{j}^{u} \bar{\xi}_{i}^{v} - c_{u\alpha}^{\ell} \xi_{\ell}^{i} \bar{\xi}_{i}^{u} = 0, (i,j,u,v=1,\ldots n;\ \ell=1,\ldots,r;\ \alpha=n+1,\ldots \ldots,r)$ where $c_{k\ell}^{h}$ is the constant of structure of the group, and $\bar{\xi}_{v}^{u}$ is the reciprocal of the element ξ_{u}^{v} from the non-null determinant of the matrix $\|\xi_{h}^{i}\|$.

Let be, in the space X^n, a q-dimensional family $\mathcal{F}_q$ of manifolds $\mathcal{V}_p$ defined by the equations $F^{\lambda}(x^1,\ldots,x^n, \alpha^1,\ldots,\alpha^q)=0, (\lambda=1,\ldots \ldots,n-p)$, where $\alpha^1,\ldots,\alpha^q$ are essential parameters, and T be a continuous transformation which leaves completely invariant the family $\mathcal{F}_q$. The set $\mathcal{G}=\{T\}$ forms a Lie group. Let $S \in \mathcal{G}$ be a transformation having the property $S\mathcal{V}_p = \mathcal{V}_p$ for any $\mathcal{V}_p \in \mathcal{F}_q$. The set $g=\{S\}$ forms an invariant subgroup of $\mathcal{G}$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Def. 2. We call the group $G= \mathcal{G}/g$ the invariance maximum group of $\mathcal{F}_q$. For any invariance group G_r of $\mathcal{F}_q$ we attached in the space X^q, of the parameters of $\mathcal{F}_q$, a family of transformations $H_r(\alpha)$.

Th. 2. The family $H_r(\alpha)$ forms an isomorphous group with G_r.

Def. 3. Supposing that the group H_r is measurable and admits the integral invariant function $I(\alpha)$, we call measure of a set $\mathfrak{A} \subset \mathcal{F}_q$, with respect to the group G_r: $\mu_{G_r}(\mathfrak{A})= \int_{\mathfrak{A}_\alpha} |I(\alpha)| d\alpha$.

R. TRANDAFIR: Problems of integral geometry of lattices in a homogeneous space.

Let X^n be a homogeneous space of n dimensions of coordinates $x^1, x^2, \ldots, x^n$, and G_r the maximum group of motions (transitive) of this space.

Definition. By a lattice of fundamental domains in a homogeneous space we mean a sequence of domains $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, which satisfies the following conditions:

1) each point of the space belongs to a single domain α_i,
2) each domain α_i can be superposed over α_0 by a motion T_i of the space which superposes each domain α_h over a domain α_k, i.e. by a motion of the space that leaves the lattice invariant.

Let K_0 be a fixed figure contained in the fundamental cell α_0 and K a mobile figure in X^n. We then have

$$\int_{\{K_0 \cap K \neq \phi\}} f(K_0 \cap K)\, d_{G_r} K = \int_{\alpha_0} \Big[\sum_i f(T_i K_0 \cap K)\Big] d_{G_r} K,$$

where f is an integrable function of the figure $K_0 \cap K$, and $d_{G_r}K$ is a kinematic elementary measure of the group G_r.

By means of this formula one can deduce some theorems relative to these lattices.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

H. ZIEZOLD: Über die Eckenzahl zufälliger konvexer Polygone

Es wird ein Dualitätssatz vorgestellt, der besagt, daß der Erwartungswert der Eckenzahl der konvexen Hülle von n nach einer (bezüglich des Lebesgue-Maßes totalstetigen) Wahrscheinlichkeit P im R^2 verteilten Punkten gleich ist dem Erwartungswert der Eckenzahl gewisser Polygone, die von n nach $P\delta^{-1}$ verteilten Geraden erzeugt werden, wobei δ eine geeignete Dualität ist.

Ferner wird für zwei Klassen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen im R^2 das asymptotische Verhalten der Erwartungswerte der Eckenzahl für $n \longrightarrow \infty$ angegeben.

U. Krause (Heidelberg)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft ©

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft