Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

Tagungsbericht 19/1969

Konvexe Körper; geometrische Ordnungen

22. bis 28. 6. 1969

Unter Leitung der Herren G. Ewald (Bochum), O. Haupt (Erlangen) und R. Schneider (Bochum) fand vom 22.6. - 28.6.1969 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach eine Tagung über "Konvexe Körper; Geometrische Ordnungen" statt.

Wie schon während der 1967 zum ersten Mal durchgeführten Tagung mit den gleichen Themen ergab sich auch diesmal der Eindruck, daß es eine recht glückliche Idee war, die beiden Gebiete der Konvexen Körper und der Geometrischen Ordnungen zum Gegenstand einer gemeinsamen Tagung zu machen. Die beiden Arbeitsbereiche sind nahe verwandt durch ihren geometrischen Ausgangspunkt und durch die Natürlichkeit und Anschaulichkeit ihrer Fragestellung. Die Vorträge, in denen die verschiedenartigsten Probleme aus beiden Gebieten zur Sprache kamen, gaben durchweg Anlaß zu lebhaften Diskussionen und längerern persönlichen Aussprachen, die auf viele der Teilnehmer sehr anregend gewirkt haben dürften. Eine ähnliche Tagung im nächsten Jahr scheint erwünscht.

Teilnehmer:

G. Aumann	München
Chr. Berg	Kopenhagen
H. Bieri	Bern
U. Brechtken-Manderscheid	Bochum
D. Clark	Durham (England)
A. Duma	Bukarest
K. El Hädi	Durham (England)
H. Engmann	Frankfurt
G. Ewald	Bochum
P. Gruber	Wien
O. Haupt	Erlangen
B. Kind	Bochum
M. Kömhoff	Frankfurt
H. Künneth	Erlangen
J. Lehn	Karlsruhe
Z. Nadenik	Bochum
W. F. Pohl	Amsterdam
G. Rahn	Bochum
H. Rost	Frankfurt
K.-A. Schmitt	Bochum
R. Schneider	Bochum
N. Stephanidis	Berlin
G. Valette	Brüssel
W. Weil	Frankfurt
T. Zamfirescu	Bukarest

Vortragsauszüge:

G. AUMANN: Ordnungseigenschaften holomorpher Funktionen

Abbildungen $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^M$ durch holomorphe Funktionen können mittels verschiedener Ordnungstypen untersucht werden, Von den angegebenen Typen - alle darauf beruhend, daß die Zusammenhangskomponenten der Schnitte von gewissen linearen Teilräumen L des $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ mit dem Graphen (F) von F gezählt werden - wird für die "reell-lineare Ordnaung" bei einer Funktion einer Veränderlichen (I), und für die "komplex-lineare Ordnung" bei einer Funktion mehrerer Veränderlicher (II) gezeigt, daß die zugehörigen lokalen Ordnungswerte in jedem Holomorphiepunkt endlich sind. Bei (I) führen reell-differentialgeometrische Betrachtungen, bei (II) ideal-theoretische Methoden im Ring der konvergenten Potenzreihen zum Ziel. (Näheres in Manuscripta Mathematica 1969).

Chr. BERG: Potentialtheoretische Methoden in der Theorie der konvexen Körper

Für einen konvexen Körper $K \subset R^q$ mit der Stützfunktion h_k, definiert auf der Einheitssphäre Ω_q in R^q, gelten die Formeln

(1) $h_k(\xi) = \int_{\Omega_q} g_q(\xi \cdot \eta)\, d\mu_1(K)(\eta) + S(K) \cdot \xi \,, \quad \xi \in \Omega_q$

(2) $\{\Delta_q^* + (q-1)\} h_k = (q-1) \cdot \mu_1(K)$ (als Distributionen auf Ω_q),

wo S(K) der Steinersche Krümmungsschwerpunkt und $\mu_1(K)$ die erste Oberflächenfunktion (ein Radonsches Maß) für K sind. Weiter ist Δ_q^* der Laplace-Beltramische Operator für Ω_q, und g_q die

Greensche Funktion des Operators $\Delta_q^* + (q-1)$.
Die Formeln (1) und (2) entsprechen genau dem Repräsentationssatz von Riesz in einer Potentialtheorie auf der Einheitssphäre. (Erscheint demnächst in Kgl. danske Videnskabernes Selskab, Mat.-Fys. Medd. 37,6 (1969)).

H. BIERI: Ungleichungen für konvexe Rotationshalbkörper und ihre Auswertung im R_3

Informationen über konvexe Rotationshalbkörper in Form von Ungleichungen erhält man:

a) Aus der von H. Hadwiger angegebenen Integraldarstellung der Minkowskischen Quermaßintegrale
b) Aus zwei sehr allgemeinen, k-dimensionalen Ungleichungen für drei Minkowskische Quermaßintegrale (die Eulersche Charakteristik inbegriffen)
c) Aus den Extremaleigenschaften der eingliedrigen Körper (Zylinder und Kegel)

Mit Hilfe des Formparameters $\lambda = 4\pi a/M$ gelingt eine Abgrenzung des Existenzgebietes im Blaschkediagramm nach oben und die Auffindung der zugehörigen Extremalkörper.

U. BRECHTKEN-MANDERSCHEID: Existenz von Tangentialebenen an Extremalflächen

Das Variationsproblem lautet

$$I_F(x,B^{n-1}) := \inf_{\substack{x^i_m \in C^1 \\ x^i_m \xrightarrow[\text{gleichm.}]{} x^i}} \liminf_{m\to\infty} \int_{B^{n-1}} F\left(x^i_m, \frac{\partial x^i_m}{\partial t^\alpha}\right) dt^\alpha = \min , \qquad \begin{array}{l} i = 1,\dots,n \\ \alpha = 1,\dots,n-1 , \end{array}$$

wobei x, x_m Parameterdarstellungen von Fréchet-Flächen vom Typ der (n-1)-dim. Kugel B^{n-1} sind und $x|_{\partial T}$ Parameterdarstellung einer Fréchet-Fläche vom Typ der (n-2)-Sphäre ist, $x|_{\partial T}$ injektiv. Für F gelte: 0) $F : G \times \bigtimes^{n-1} R^n \longrightarrow R$, G eine konvexe kompakte Menge in R^n, 1) $F(x,X_\alpha) \geq 0$, wobei " = " $\Leftrightarrow$ $|X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1}| = 0$, 2) $F(x,\lambda^\rho_\alpha X_\rho) = \det(\lambda^\rho_\alpha)\cdot F(x,X_\alpha)$ für $\det(\lambda^\rho_\alpha) > 0$, 3) die Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x^i}$, $\frac{\partial F}{\partial X^i_\alpha}$ sind stetig für $x, X_\alpha, |X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}| \neq 0$, 4) F ist bei festem x stark konvex. Der Beweis zu folgendem Satz wird skizziert:

E sei eine Extremale dieses Variationsproblems mit der Parameterdarstellung x und $I_F(x, B^{n-1}) < \infty$. M sei die Menge der Punkte $P \in B^{n-1}$, für die die Extremale E in x(P) keine Tangentialebene besitzt. Dann ist $I_F(x, M) = 0$.

A. DUMA: Sur le noyau d'une famille de corps convexes

On considère le problème suivant: étant donné m corps convexes $\{M_1, \ldots, M_m\}$, est il possible de trouver quelques translations convenables $t_1, \ldots, t_m$, telles que le noyau de $\bigcup_{i=1}^{m} t_i(M_i)$ soit $\bigcap_{i=1}^{m} t_i(M_i)$? Si on n'impose aucune restriction, le problème n'est pas solvable. Pour traiter le cas qu'on l'impose quelques restrictions sur la dimension de $\bigcap_{i=1}^{m} t_i(M_i)$, il est util de remarquer la formule pour $M = \bigcup_{i=1}^{m} M_i$

$$\text{noyau } M = \bigcap_{i=1}^{m} \bigcap_{a \in \partial(\partial M \setminus M_i)} P(a,i)$$

où P(a,i) est le cone engendré de M_i en point a.

P. GRUBER: Zerlegung konvexer Körper in direkte Summen und direkte Summen von Simplices

Eine Teilmenge $A \subset R^n$ heißt die direkte Summe von Teilmengen $A_i \subset R^n$, $i = 1, \ldots, r$, wenn A die Vektorsumme der A_i ist und die A_i in Unterräumen des R^n liegen, so daß der R^n die direkte Summe dieser Unterräume im üblichen Sinne ist. A heißt direkt unzerlegbar, wenn jede Darstellung von A als direkte Summe mit mehr als einem Summanden trivial ist. Eine Teilmenge $A \subset R^n$, deren konvexe Hülle keine Geraden enthält und die Dimension n hat, läßt sich dann bis auf die Reihenfolge der Summanden auf eindeutige Weise als direkte Summe mit direkt unzerlegbaren Summanden darstellen. Dieses Ergebnis erlaubt es, für verschiedene Klassen konvexer Polyeder die Anzahl der Teilklassen affin-äquivalenter Körper zu bestimmen und Eindeutigkeitsaussagen zu machen.

O. HAUPT: Verallgemeinerung eines Satzes von R.C. Bose

In M.Z. 35(1932), 16–24, hat R.C. Bose bewiesen: Es sei C ein (ebenes) und stetig gekrümmtes Oval mit nur endlich vielen Scheiteln; I(C) sei das Innere von C. Die Anzahl derjenigen Scheitel von C, deren zugehörige Schmiegkreise bis auf den Scheitel ganz in I(C) liegen, sei s. Weiter seien K_μ, $\mu = 1,\dots,m$ diejenigen in $\overline{I(C)}$ gelegenen Kreise, von welchen C in $t_\mu \geq 3$ Punkten gestützt wird. Dann gilt $s = 2 + \sum_{\mu=1}^{m}(t_\mu - 2)$. Dieser Satz gilt allgemein für den Fall, daß das System der Kreise ersetzt wird durch ein System $\underline{k}$ von Ordnungscharakteristiken K, wobei jedes K durch irgend 3 seiner Punkte eindeutig bestimmt wird und stetig von ihnen abhängt. An Stelle des Ovals tritt dann eine (einfache) Kurve; und an Stelle der Forderung, daß C stetig gekrümmt sei, treten "Differenzierbarkeitsbedingungen" bezüglich $\underline{k}$, denen die Kurve genügen soll. (Erscheint im Journal für d.r.u. angew. Math.)

B. KIND: Maße für zyklische Symmetrien ebener konvexer Körper

K: zentralsymmetrischer konvexer Körper im R^2, $\dim K \geq 1$,
H(K,u): Stützfunktion von K in Richtung $u \in R^2$, $\|u\| = 1$,
$\mathfrak{D}_k$: Symmetriegruppe des regulären k-Ecks im R^2, $k \geq 3$,
$\mathfrak{Z}_k$: Gruppe der eigentlichen Bewegungen der Gruppe $\mathfrak{D}_k$, $k \geq 3$.
Für $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_k$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_k$ ist

$$F_{\mathfrak{G}}(K) = \max_{p \in K} \frac{1}{2}\left(\max_{\|u\|=1} q(K,p,u) + \min_{\|u\|=1} q(K,p,u)\right)$$

ein "$\mathfrak{G}$-Symmetriemaß", wo

$$q(k,p,u) = \frac{\min_{\sigma \in \mathfrak{G}} H(K-p,u^\sigma)}{\max_{\sigma \in \mathfrak{G}} H(K-p,u^\sigma)} .$$

Es gilt der Satz: Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_k$ oder $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_k$, $k \geq 3$. Dann folgt:
1) $0 < c_k \leq F_{\mathfrak{G}}(K) \leq 1$; 2) $F_{\mathfrak{G}}(K) = 1 \leftrightarrow$ K $\mathfrak{G}$-symmetrisch;
3) $F_{\mathfrak{G}}(K) = c_k \leftrightarrow$ K ist Strecke. Die c_k lassen sich explizit angeben.

M. KÖMHOFF: Ein isoperimetrisches Problem für konvexe Polyeder

Eine Menge Z von endlich vielen Polygonen heißt simplizialer polyedrischer Zellkomplex, wenn folgendes gilt:

$E_1(Z)$: Sind P_1 und P_2 zwei Polygone aus Z, so ist entweder $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ oder $P_1 \cap P_2 = \sigma$, wobei σ eine gemeinsame Kante oder ein gemeinsamer Eckpunkt von P_1 und P_2 ist.

$E_2(Z)$: Sind σ_1 und σ_2 zwei verschiedene Kanten eines beliebigen Polygons $P_j \in Z$, so gibt es stets genau zwei von P_j verschiedene Polygone P_{j_1} und P_{j_2} in Z mit den Eigenschaften: $P_{j_1} \cap P_j = \sigma_1$, $P_{j_2} \cap P_j = \sigma_2$, $P_{j_1} \neq P_{j_2}$.

$E_3(Z)$: Kein Polygon in Z hat mehr als 3 Kanten.

(Die Polygone in Z brauchen nicht notwendig konvex zu sein. Polygone der Fläche Null, deren Umfang aus 2 oder 3 Kanten besteht, die alle in gerader Linie liegen, sind ebenfalls zugelassen.)

Bezeichnet dann $L^*(Z)$ die Summe der Umfänge der Polygone aus Z, $A^*(Z)$ die von diesen Polygonen eingeschlossene Gesamtfläche, so gilt stets $L^*(Z)^2 / 4\,A^*(Z) \geq 12\sqrt{3}$ mit Gleichheit dann und nur dann, wenn Z aus 4 kongruenten regulären Dreiecken besteht.

Folgerung: Sei P_T ein simpliziales 3-Polytop mit Kantenlängensumme L_T Und Oberfläche A_T. Dann ist $L_T^2 / A_T \geq 12\sqrt{3}$ mit Gleichheit dann und nur dann, wenn P_T ein reguläres Tetraeder ist.

H. KÜNNETH: Über Kontinua vom schw. POW n+1 im P_n

Es sei C ein Kontinuum im P_n vom Rang n, schw. POW n+1 und mit m Verzweigungspunkten (VP). Ist $m > n+1$, so liegen alle VP in einer Hyperebene. Es sei nun $m = n+1$ und die n+1 VP seien linear unabhängig, ferner seien v_i und v_k VP von C und G die durch v_i und v_k bestimmte Gerade, derart daß es keine v_i enthaltende Strecke in $C \cap G$ gibt (solche v_i, v_k gibt es immer, wenn $n > 3$). Es gibt dann 2 oder 3 Komponenten C_1, C_2, (C_3) von $C - \{v_i, v_k\}$, in denen alle VP von C (außer v_i, v_k) enthalten sind, und zwar ist $v_i, v_k \in \overline{C}_1$ und bei 3 Komponenten enthält $\overline{C}_2$ nur v_i, $\overline{C}_3$ nur v_k. Die Komponenten von $C-V$ sind Strecken, wobei V die Menge der VP von C ist. - Ist $n=3$, so hat C höchstens 5 VP, enthält C 4 lin. unabh. VP, so besteht C entweder aus den Kanten eines Tetraeders (oder ist ein Teilkontinuum davon) oder jeder VP ist Schnittpunkt von Teilstrecken oder Zentrum eines ebenen Dreibeins von Teilstrecken aus C. - Liegen alle VP von C auf einer Geraden, so ist die obere genaue Schranke für die Anzahl der VP von C gleich $2n-2$ für $n \geq 3$.

J. LEHN: Eine Eigenschaft der Bewegungsgruppe eines Minkowski-Raumes

Ist Γ die Faktorgruppe der Bewegungsgruppe eines Minkowski-Raumes nach dem Normalteiler der Translationen, so gilt: Ist Γ unendlich, dann existiert eine 2-dimensionale Ebene, in der die volle euklidische Drehgruppe induziert wird. (Für die Dimensionen 2 und 3 vergl. K. Leichtweiss: Selbstadjungierte Banach-Räume, Math. Zeitschr. 71, 335-360 (1959), Satz 15).
Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich alle möglichen Bewegungsgruppen der 2- und 3-dimensionalen Minkowski-Räume angeben. Weitere Folgerungen sind: (1) Eine Minkowski-Ebene ist genau dann eine euklidische Ebene, wenn Γ unendlich ist.
(2) Ein 3-dimensionaler Minkowski-Raum ist genau dann ein euklidischer Raum, wenn Γ unendlich ist und es keine Gerade gibt, die durch jede Bewegung in eine Parallele überführt wird.

W.F. POHL: The "two-vertex" theorem for space curves

Theorem (E.S. Jones, my student): Consider a simple closed curve in ordinary space which is differentiable of class C^4, which has nowhere vanishing curvature, which has no tangent line which meets the curve in a point other than the point of tangency, and which has a point lying on the boundary of the convex hull of the whole curve through which there passes no line which meets the curve in more than one other point,

then the torsion must change sign.
To prove this we consider the curve as a mapping of an abstract circle $X : C \longrightarrow E^3$. Define curves D and N in $C \times C$ by $D = \{(t_1,t_2) \in C\times C,\ t_1 \neq t_2 \mid X(t_2)-X(t_1), X'(t_1), X'(t_2)$ are coplanar $\}$

$N = \{(t_1,t_2) \in C\times C,\ t_1 \neq t_2 \mid X(t_2)-X(t_1), X'(t_2), X''(t_2)$ are coplanar $\}$.

The assumptions on the original curve X imply geometric conditions on the curves D and N in $C \times C$ which in turn imply that D and N cross the diagonal of $C \times C$. Such crossings correspond to sign changes of the torsion of the original curve.

H. ROST u. H. ENGMANN: Eine Ordnung im Kegel der positiven Maße im R^n

Man betrachtet positive Linearformen auf den positiv-homogenen stetigen Funktionen im R^n, sog. "konische Maße", und führt in ihnen die Ordnung ein: $\mu < \nu$ genau dann, wenn $\mu(f) \leq \nu(f)$ für f positiv-homogen, konvex und positiv. Eine geometrische Charakterisierung dieser Ordnung wird gegeben, sowie der Zusammenhang zwischen der Ordnung und positiven Kontraktionen in einem $L^1(\Omega, \mathcal{F}, m)$ hergestellt. Die Lösbarkeit des Zerlegungsproblems: "Gegeben $\nu > \mu_1 + \mu_2$; finde ν_1, ν_2 mit $\nu = \nu_1 + \nu_2$ und $\nu_i > \mu_i$ für $i = 1,2$" wird gezeigt.

R. SCHNEIDER: Eine Verallgemeinerung des Differenzenkörpers

Zu einem konvexen Körper $K \subset R^n$ werde die "p-te Durchschnitts-Indikatrix" D_pK definiert durch

$D_pK = \{(x_1,\dots,x_p) \in R^n \times \cdots \times R^n \mid K \cap (K+x_1) \cap \cdots \cap (K+x_p) \neq \emptyset\}$,

$p = 1,2,\dots$ D_pK ist somit ein pn-dimensionaler konvexer Körper; D_1K ist der gewöhnliche Differenzenkörper (oder Vektorenbereich) von K. Ist $v(K)$ das Volumen von K und $V(D_pK)$ das pn-dimensionale Volumen von D_pK, wo wird durch

$$\delta_p(K) = V(D_pK) / v(K)^p$$

ein affininvariantes Funktional auf der Menge der konvexen Körper erklärt. Wir interessieren uns für Abschätzungen dieses

Funktionals. Die bekannte Ungleichung von Rogers und Shephard für das Volumen des Differenzenkörpers läßt sich verallgemeinern zu der Ungleichung $\delta_p(K) \leq \binom{pn+n}{n}$;

das Gleichheitszeichen gilt hier genau dann, wenn K ein Simplex ist. Sein Minimum nimmt δ_p für $n=2$ genau auf der Menge aller zentralsymmetrischen Körper an; für $n \geq 3$, $p \geq 2$ gilt dies jedoch nicht. Für dreidimensionale zentralsymmetrische Körper läßt sich ferner die Ungleichung

$$\delta_p(K) \leq \frac{3}{2} p\,(p+1)^2 + p + 1$$

zeigen.

G. VALETTE: <u>A propos des cages circonscrites à une sphère</u>

Un polyèdre P de l'espace euclidien sera appelé cage pour une sphère de rayon 1 si les arêtes de P entourent une sphère de rayon 1 de façon à empêcher tout déplacement de celle-ci. On dira que P est une cage circonscrite si, de plus, toutes ses arêtes sont tangentes à la sphère. En réponse à un problème de H.S.M. Coxeter, G.C. Shephard a montré qu'il existe des cages circonscrites dont la longueur totale est aussi voisine qu'on veut de $6 + 3\pi$ ($= 15{,}4247\ldots$). Nous améliorons ce résultat:

<u>Théorème:</u> Il existe des cages circonscrites dont la longueur totale est aussi voisine qu'on veut de 15.

D'autre part, la détermination de tous les polyèdres inscriptibles à faces régulières nous permet d'énoncer

<u>Théorème:</u> Parmi les cages circonscrites à faces régulières, c'est le prisme triangulaire qui a la longueur totale la plus petite, à savoir $9\sqrt{3} = 15{,}5884\ldots$

W. WEIL: <u>Über die Projektionen konvexer Körper</u>

Zentralsymmetrische, konvexe Körper K im E^n, $n \geq 2$, werden durch ihre $(n-1)$-Projektionsinhalte $p(K,u)$, $|u| = 1$, bis auf Translation

festgelegt (Aleksandrov 1937). Für spezielle Körper genügt dazu eine Teilmenge von Richtungen. Es wird gezeigt:
"Ist $n \geqslant 3$ ungerade, haben K und $\bar{K}$ in Richtung z', $|z'| = 1$, eine Eckstützebene und gilt $p(K,u) = p(\bar{K},u)$ für alle $u \in Z$, $Z = \{ v \mid |v| = 1, |\langle v,z'\rangle| \leq \varepsilon \}$, so sind K und $\bar{K}$ translationsgleich (unabhängig von $\varepsilon > 0$)."
Es werden Beispiele dafür angegeben, daß der Satz falsch ist, wenn n gerade ist oder nur einer der beiden Körper eine Eckstützebene bestitzt.
Ist K genügend glatt, so gibt es zu jeder symmetrischen, abgeschlossenen Menge A, die noch nicht alle Richtungen enthält, einen zu K nicht translationsgleichen Körper $\hat{K}$ mit $p(K,u) = p(\hat{K},u)$ für alle $u \in A$.
(Gemeinsam mit R. Schneider)

T. ZAMFIRESCU: Reducibility of neighborhoods of convex sets

There is a notion in the affine geometry of convex bodies, called reducibility. The idea to introduce it belonged to P.C. Hammer. If K is a reducible convex body, then $K + rB$ $(B = \{x \mid \|x\| = 1\})$ is reducible for every r. If K is just convex and $K + rB$ is reducible for some r, then $K + rB$ is reducible for every $r > 0$. A geometric condition on the shape of K implying the reducibility of all $K + rB$ (r 0) is given.

B. Kind, Bochum