MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 20/1969

Graphentheorie
29. Juni bis 5. Juli 1969

Unter der Leitung von Prof.Dr. G. Ringel (Berlin) und Prof.Dr.K. Wagner (Köln) fand in der Zeit vom 29. Juni bis 5. Juli 1969 die zweite Tagung über Graphentheorie in Oberwolfach statt (die erste war im Sommer 1967). Von den 33 Teilnehmern kamen 9 aus dem europäischen Ausland, während 6 aus Kanada bzw. den U.S.A. anreisten.

In 26 Vorträgen und einer Diskussionsstunde über offene Probleme wurden die verschiedensten Themenkreise aus der Graphentheorie angeschnitten, wobei vor allem die topologische Graphentheorie einen breiten Raum einnahm (Beweis der Heawoodschen Vermutung, Eigenschaften der Klasse der minimalen, nicht in eine gegebene zweidimensionale Mannigfaltigkeit einbettbaren Graphen).

Unter dem Eindruck des Erfolgs der Tagung haben die Tagungsleiter angeregt, mindestens jedes zweite Jahr eine Graphentheorie-Tagung in Oberwolfach zu veranstalten.

<u>Teilnehmer</u>

G. Baron, Wien (Österr.)
W. Brown, Montreal (Kanada)
H.J. Burscheid, Wuppertal
P. Dembowski, Frankfurt/M.
J. Dénes, Budapest
P. Erdös, Budapest
M. Fiedler, Prag

H. Fleischner, Wien (Österr.)
R. Guy, Calgary (Kanada)
R. Halin, Köln
G. Hammer, Karlsruhe
H. Harborth, Braunschweig
R. Henn, Karlsruhe
H. Izbicki, Wien
E.C. Johnsen, Tübingen
R. Kaerkes, Aachen
M. Kleinert, Berlin
W. Klotz, Clausthal
E. Köhler, Bliesheim
A. Kotzig, Bratislava (CSSR)
L. Lucht, Braunschweig
W. Mader, Berlin
J. Mayer, Montpellier (Frankr.)
J.W. Moon, Edmonton (Kanada)
J. Moravek, Mannheim
H. Noltemeyer, Karlsruhe
W. Oberschelp, Hannover
G. Ringel, Berlin
J. Schaer, Calgary (Kanada)
W. Vollmershaus, Calgary (Kanada)
K. Wagner, Köln
J.W.T. Youngs, Santa Cruz (Calif.)
B. Zelinka, Liborec (CSSR).

Vortragsauszüge

J.W.T. Youngs: A tribute to Heffter

The work of Heffter (1891) on case 7 of the Heawood conjecture was examined in the language of current graphs with rotation. Using this technique, the difficulties encountered by Heffter become clear. Two complete solutions were given in his style.

J.W.T. Youngs and Prof.Dr.G.Ringel: Map-coloring Problems

The paper deals with attacks on various map-coloring problems, including the four-color problem. In particular, it provides a summary of results leading up to the recent successful solution of the Heawood map-coloring problem by Ringel and Youngs.

K. Wagner: Über die nicht in die projektive Ebene einbettbaren minimalen Graphen

Es werden einige minimale Graphen mit bestimmten Eigenschaften charakterisiert.

W. Vollmerhaus: Verallgemeinerung des Satzes von Kuratowski auf beliebige zweidimensionale abgeschlossene Mannigfaltigkeiten

In Verallgemeinerung des Satzes von Kuratowski gilt der

Satz: Für jede ganze Zahl n gibt es nur endlich viele minimale Graphen, die die Eigenschaft haben, daß sie nicht in die abgeschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit der Eulerschen Charakteristik n (oder auch mit dem orientierbaren oder nicht orientierbaren Geschlecht n, wenn man sich nur auf die orientierbaren oder nicht orientierbaren Mannigfaltigkeiten beschränkt) einbettbar sind.

Mein Beweis für diesen Satz wird in diesem Vortrag für den Fall der projektiven Ebene $(n = 1)$ dargestellt. Dies ist nach der Kugel der nächsteinfache Fall. Der Grund hierfür ist die Tatsache, daß bei jeder Einbettung von K_5 oder $K_{3,3}$ in die projektive Ebene eine Zerlegung der projektiven Ebene in abgeschlossene 2-Zellen entsteht. Im allgemeinen kann man jedoch nur von einer Zerlegung der Mannigfaltigkeit in offene 2-Zellen ausgehen, wodurch der Beweis wesentlich komplizierter wird.

W. Vollmerhaus: Kritische Graphen für zweidimensionale abgeschlossene Mannigfaltigkeiten

Aus der Verallgemeinerung des Satzes von Kuratowski in meinem ersten Vortrag folgert man leicht:

<u>Satz 1:</u> Für jede ganze Zahl n gibt es nur endlich viele Graphen mit der Eigenschaft, daß sie sich in eine abgeschlossene zweidimensionale Mannigfaltigkeit der Eulerschen Charakteristik n, aber nicht in eine Mannigfaltigkeit mit der Charakteristik $n+1$ einbetten lassen.

Diese minimalen Graphen werden charakterisiert durch

<u>Satz 2:</u> Jeder minimale Graph mit der Charakteristik n läßt sich durch $2-n$ der beiden Kuratowski-Graphen K_5 und $K_{3,3}$ überdecken.

Beschränkt man sich auf orientierbare (nicht orientierbare) Flächen, so gilt:

<u>Satz 3:</u> Jeder minimale Graph mit dem orientierbaren (nicht orientierbaren) Geschlecht n läßt sich durch höchstens $2n-1$ (n) Kuratowski-Graphen überdecken.

Analoge Sätze mit $3-n$, $2n+1$, $n+1$ anstelle von $2-n$, $2n-1$, n usw. lassen sich für minimale <u>nicht</u> einbettbare Graphen herleiten. Diese Sätze implizieren natürlich den Satz meines ersten Vortrags. Aus einer genaueren Beschreibung, wie die überdeckenden Kuratowski-Graphen miteinander verbunden zu sein haben, erhält man ein Konstruktionsverfahren für die kritischen Graphen.

<u>J. Mayer:</u> 1.) <u>Nouvelles applications de la méthode des graphes quotients à l'inscription des graphes complets sur les surfaces closes orientables.</u>

2.) <u>L'épaisseur du graphe complet K_{46}</u>.

Zu 1.) On connaît à présent le genre de tous les graphes complets, la conjecture de Heawood ayant été entièrement vérifiée (Ringel et Youngs, 1968). On envisage ici l'inscription, sur une surface close orientable, d'un graphe complet $K_{(m+n+1)}$, mis sous la forme $1 * K_m * K_n * 1$ (les deux sommets extrêmes étant ensuite identifiés); le graphe quotient utilisé est un "vortex graph" d'index 2.

Exemples donnés: K_9, K_{13}, K_{25}, K_{49} .

Zu 2.) Un graphe étant considéré comme la somme de n graphes planaires, la valeur minimale de n est l'épaisseur du graphe. On connaît l'épaisseur de tous les graphes complets $K_p (p \neq 6m + 4)$ ainsi que celle de K_{28} et K_{22} .
On donne ici, à partir de la décomposition de K_{45} en huit graphes planaires, une construction montrant que l'épaisseur de K_{46} est également 8 . (La même méthode a été appliquée avec succès à K_{34} et à K_{40}).

H. Harborth: Über die Schnittpunktanzahl vollständiger n-geteilter Graphen

Unter einem vollständigen n-geteilten Graphen $G(x_1,x_2,...,x_n)$ sei ein Graph mit der chromatischen Zahl n verstanden, in dem zwei Knoten dann und nur dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie verschiedene Farbe haben;
x_i , $i = 1,2,...,n$ bezeichne dabei die Anzahl der i-gefärbten Knoten. Es wird die Frage nach ~~nach~~ der minimalen Anzahl von Schnittpunkten der Kanten aller Darstellungen eines solchen Graphen in der Ebene gestellt (crossing number); dabei sollen drei Kanten sich nicht in einem Punkt schneiden. Für vollständig paare Graphen $(n=2)$ wurde die Schnittpunktanzahl von K. Zarankiewicz und für vollständige Graphen $(x_1=x_2=x_3= ... = x_n=1)$ von R.K.Guy nach oben abgeschätzt. Hier wird aus einer Klasse von Darstellungen eine allgemeine obere Schranke bestimmt. Die Gültigkeit des Gleichheitszeichens wird vermutet.

M. Fiedler: Abstandsgraphen

Vor genau zwei Jahren hat der Vortragende in Oberwolfach den Begriff des Vorzeichenabstandsgraphen eingeführt als Graphen $G_d(S)$, der einem endlichen System $S = \{p_1,...,p_n\}$ von Punkten p_i eines metrischen Raumes R und einer positiven Zahl d auf folgende Weise entspricht: $G_d(S)$ hat n Knotenpunkte $1,...,n$, wobei für $i \neq k$ i und k durch eine positive bzw. negative Kante dann und nur dann verbunden sind, falls für den Abstand $\rho(p_i,p_k) < d$ bzw. $\rho(p_i,p_k) > d$ gilt. Falls C eine

gegebene Klasse von Systemen S ist, bezeichne man
$\Gamma(C) = \{G_d(S) \mid S \in C\}$.
Im Vortrag wird u.a. $\Gamma(C)$ gefunden, falls R eine offene Strecke der Länge ℓ ist, $d = \frac{1}{2}\ell$ und C aus allen Systemen von n voneinander verschiedenen Punkte von R besteht. Für den Fall, daß bei derselben Definition von C R die Gerade ist, wird eine Menge Γ' von Graphen gefunden, die dieses neue $\Gamma(C)$ enthält.

H. Fleischner: Beitrag zur Theorie der endlichen, ebenen Eulerschen und paaren, kubischen Graphen

Liegt endlicher, ebener, kubischer Graph vor, so ist er paarer Graph genau dann, wenn er einen PLQF besitzt (= quadratischer Faktor, dessen Elemente paare Ländergrenzen sind) (Satz 2). Daraus folgt die Äquivalenz des Zwei-Farben-Theorems und des Drei-Farben-Theorems (Satz 3). Satz 3 wird bewiesen mit Hilfe der PLQF-Kontraktion und PLQF-Extension (PLQF-Kontraktion: Die Elemente des PLQF werden zu Knotenpunkten "zusammengezogen", die zyklischer Anordnung der Kanten in den Knotenpunkten des so erhaltenen Eulerschen Graphen ist gegeben durch die zyklische Inzidenzbeziehung der Kanten des restlichen Linearfaktors des vorgegebenen zusammenhängenden paaren kubischen Graphen in den Elementen des PLQF. PLQF-Extension ist die zur PLQF-Kontraktion inverse Operation).- Einführung des Begriffes des Ordnungsisomorphismus (zyklische Kantenordnung in den Knotenpunkten bleibt erhalten).
Satz 4: Sind zwei Graphen ordnungsisomorph, so sind die nach einer LQF-Extension erhaltenen kubischen Graphen isomorph (Vor.: Graphen zus. h.).

P. Erdös: Extremalprobleme der Graphentheorie

Es sei $G(k,l)$ ein Graph mit k Knotenpunkten und l Kanten. $f(n; G(k,l))$ sei die kleinste Zahl, so daß jedes $G(n; f(n; G(k,l)))$ ein $G(k,l)$ als Teilgraphen enthält. Simonovits und ich zeigten, daß, wenn $K(G)$ die chromatische Zahl von $G(k,l)$ ist, $f(n; G(k,l)) = (1 + o(1))\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{K(G) - 1}\right)$ ist. Wenn $G(k,l)$ ein paarer Graph ist, gibt es aber sehr viel ungelöste Probleme; z.B., wenn $G(k,l)$ die Knotenpunkte z; $x_1, \ldots, x_t$; $y_1, \ldots, y_{\binom{t}{2}}$ hat, z mit x_i, $1 \leqq i \leqq t$ verbunden ist und jedes y mit 2 der Punkte x_i verbunden ist. $f(n; G(k,l))$ ist hier vielleicht $< c_t n^{3/2}$. Ich kann dies aber nur für $t = 3$ beweisen.

Ich will noch ein Problem von Mrs. Turán und mir erwähnen. Existiert ein Graph mit n Knotenpunkten, cn^2 Kanten, so daß der Graph kein vollständiges Viereck enthält und die maximale Anzahl der unabhängigen Knotenpunkte $o(n)$ ist?

R.K. Guy: A Problem of Zarankiewicz

It is required to find $k_{i,j}(m,n)$, the least number of ones in an $m \times n$ matrix of zeros and ones, which ensures an $i \times j$ submatrix containing only ones, regardless of the arrangement of the elements. There are connexions with most of the branches of combinatorics; with the adjacency matrix, espacially of the bipartite graph; with Turán and Ramsey problems; with incidence matrices; with affine and projective planes; with i-graphs, packing and covering problems; Steiner triples and their generalizations; with Kirkman's problem (recently solved by Ray-Chaudhuri and R.M.Wilson); with tournaments, difference sets, block designs and error-correcting codes.

A variety of combinatorial techniques can be employed, which include Dirichlet's pigeon-hole principle and its generalizations, but there remains a need for new ideas, whether one is interested in special values, general theorems or asymptotic results.

Dr.W.G. Brown: On extremal digraphs

Results of the author (obtained with F. Harary) are discussed which generalize to directed graphs a theorem of P. Turán.

W. Oberschelp: Graphentheoretische Aufzählungsprobleme mit asymptotischem Normalverhalten

Sei $R_C(n)$ die Anzahl der verschiedenen Realtionen, welche einer Bedingung C genügen, $r_C(n)$ die entsprechende Zahl

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

isomorpher Relationen. Für den Fall "elementarer" Bedingungen C wird $R_C(n)$ formelmäßig berechnet und $r_C(n)$ asymptotisch ausgewertet. Für den Fall zweistelliger Relationen fallen unter die elementaren Bedingungen solche, die besagen, daß $R(x,y)$ z.B. ein gewöhnlicher Graph, ein gemischter Graph, ein orientierter Graph, ein Tournament ist etc. Die Formel für $R_C(n)$ läßt sich aus der Bedingung C nach einfachen aussagenlogischen Umformungen direkt ablesen. Für $r_C(n)$ gilt das sog. asymptotische Normalverhalten $r_C(n) = \frac{1}{n!} R_C(n)(1 + o(1))$ (Trivialfälle ausgeschlossen).
Der Beweis erfolgt mit Hilfe der Formel für die Anzahl der Bahnen einer Permutationsgruppe.

J.W. Moon: Cutting Down Random Trees

Let T_n denote a random tree with n (≥ 2) labelled points that is rooted at a given point x. Let $\lambda(T_n)$ denote the number of edges that must be removed from T_n before isolating the root x, where at each stage the edge removed is chosen at random from the edges of the remaining subtree containing x. We derive a formula for the mean $\mu(n)$ and variance $\sigma^2(n)$ of $\lambda(n)$ and show that $\mu(n) \sim \{\frac{1}{2}\pi n\}^{\frac{1}{2}}$ and $\sigma^2(n) \sim (2 - \frac{1}{2}\pi)n$ as n tends to infinity. We also consider the corresponding problem for forests of rooted trees and for trees in which the degree of the root is specified.

G. Baron: Anzahlen spannender Bäume

Sei G_n ein Graph mit n Punkten, so wird $k(G_n)$ als die Anzahl der spannenden Bäume von G_n definiert.
Ist G_n regulär vom Grad t, so soll $G_{n,t}$ geschrieben werden. Es werden nur endliche zusammenhängende Graphen ohneMehrfachkanten und Schlingen betrachtet. Sedlacek definierte folgende Mengen: $A_n = \{x \mid \exists\, G_n (x = k(G_n))\}$, $B_{n,t} = \{x \mid \exists\, G_{n,t}(x = k(G_{n,t}))\}$. Die Kardinalzahlen dieser Menge seien a_n resp. $b_{n,t}$. Es gilt $b_{2n+1,2r-1} = 0$.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Sedlacek erhielt $n = o(a_n)$, $1 = o(b_{2n,3})$. Es gelang eine wesentliche Verschärfung dieser Resultate.

$$g(n) \in \{a_n, b_{2n,2r-1}, b_{n,2r} \mid r \geq 2\} \Rightarrow$$

$$\exists\ z(g)\ \forall\ y < z\ \exp(y\sqrt{n/\log n}) = o(g(n)).$$

M. Kleinert: Über die maximale Anzahl von Endpunkten in Teilbäumen eines vorgegebenen Graphen

Bezeichnet man mit $e(G)$ die Anzahl der Endpunkte eines Baumes B und ist $e(G)$ das Maximum von $e(B)$, wenn B alle Teilbäume des Graphen G durchläuft, so gilt für schlingen- und zweiecklose zusammenhängende kubische Graphen G mit n Knotenpunkten und mindestens einer Brücke: $\frac{n+10}{4} \leq e(G) \leq \frac{n}{2} + 1$ und $e(G) \geq 6$.

Umgekehrt existiert zu jedem geraden $n \geq 10$ und jedem $p \geq 6$ mit $\frac{n+10}{4} \leq p \leq \frac{n}{2} + 1$ ein solcher Graph mit $e(G) = p$.

L. Lucht/W. Klotz: Über die Anzahl der nichtisomorphen Verbände mit genau n Elementen

$V(n)$ bezeichne die Anzahl der nichtisomorphen Verbände mit genau n Elementen.

Satz 1: $$\exp\{\frac{\sqrt{2}\log 2}{4} n^{\frac{3}{2}} + o(n^{\frac{3}{2}})\} \leq V(n) \leq$$
$$\leq \exp\{\frac{\sqrt{2}}{3} n^{\frac{3}{2}} \log n + O(n^{\frac{3}{2}})\}.$$

Zum Beweis führen kombinatorische Überlegungen, die als gemeinsamen Ausgangspunkt die Frage nach der maximalen Anzahl $S(n)$ der im Ordnungsdiagramm eines n-elementigen Verbandes auftretenden Verbindungsstriche haben.

Satz 2: $$\frac{\sqrt{2}}{4} n^{\frac{3}{2}} + o(n^{\frac{3}{2}}) \leq S(n) \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} n^{\frac{3}{2}}.$$

Die unteren Schranken in den Sätzen 1 und 2 ergeben sich durch die Konstruktion spezieller Verbände, die außer Null- und Einselement nur je m Atome und Hyperatome enthalten. Solche Verbände lassen sich durch (m,m)-Inzidenzmatrizen aus Nullen und Einsen beschreiben, welche kein seitenparalleles Rechteck enthalten, dessen Ecken nur mit Einsen besetzt sind. Die maximale Anzahl von Einsen in einer derartigen (m,m)-Matrix sei $Z(m)$.

Satz 3: a) $Z(m) \leqq \frac{m}{2} + m\sqrt{m - \frac{3}{4}}$ für alle $m \geqq 1$;

b) $Z(p^2 + p + 1) = (p + 1)(p^2 + p + 1)$ für alle Primzahlen p;

c) $Z(m) = m^{\frac{3}{2}} + o(m^{\frac{3}{2}})$.

R. Halin: Reduzibilität n-fach zusammenhängender Graphen

Ausgangspunkt ist die Frage, wann sich ein n-fach zusammenhängender Graph G durch gewisse Reduktionsoperationen in einen wiederum n-fach zusammenhängenden Graphen überführen läßt. Zunächst werden nur Kantenstreichungen als Reduktionen betrachtet. Es wird u.a. gezeigt, daß, wenn G nach Streichung jeder beliebigen Kante $(n-1)$-trennbar wird, G mindestens $\frac{1}{2}\sqrt{m}$ Ecken n-ten Grades enthält, wo m der Maximalgrad der Ecken von G ist. Schärfere Resultate ergeben sich, wenn auch Kantenkontraktionen als Reduktionsoperationen zugelassen sind. Hier wird u.a. gezeigt, daß es zu jedem n ein $c_n > 0$ gibt derart, daß jedes n-fach zusammenhängende G, das nach Streichung oder Kontraktion einer beliebigen Kante $(n-1)$-trennbar wird, mindestens $c_n\,\alpha(G)$ Ecken n-ten Grades enthält ($\alpha(G)$ = Eckenzahl von G).

B. Zelinka: Unendliche Systeme knotenfremder Wege in Graphen

Ein wohlbekannter Satz aus der Graphentheorie sagt:

> Zwei verschiedene Knotenpunkte a und b eines Graphen seien durch Wege verknüpft, so daß jeder dieser Wege a und b als seine Endknoten hat und keine zwei Wege davon eine Kante gemeinsam haben. Dann a und b sind durch Wege verknüpft, so daß jeder dieser Wege a und b als seine Endknoten hat, keine zwei Wege davon eine Kante gemeinsam haben und die gemeinsamen Knotenpunkte beliebiger zweier Wege zeigen sich immer in derselben Reihe, wenn wir längst die beiden Wege von a nach b gehen.

Die Zahl in diesem Satz ist als endlich betrachtet. Auf dem Symposium über die Graphentheorie in Smolenice hat

G.A.Dirac das Problem ausgesprochen, daß der Satz auch für unendliche Kardinalzahlen gilt. In diesem Vortrag forscht man nach verschiedenen Typen von Kardinalzahlen und sucht, für welche der Satz gilt und für welche nicht.

A. Kotzig: Zerlegungen des vollständigen Graphen in isomorphe quadratische Faktoren(Teillösung des Oberwolfacher von G.Ringel formulierten Problems).

Es wird über Ergebnisse bei der Lösung des Ringel's Oberwolfacher Problems referiert: vor allem über die Zerlegungen im Falle, wenn jeder Faktor drei Komponente mit gleicher Anzahl Knotenpunkte enthält und auch über die sogenannten regulären und drehbaren Zerlegungen mit der Charakteristik (c_1, c_2), von denen schon definitive Ergebnisse erreicht wurden.

J. Dénes: Recent results on the graph representation of transformation semigroups

In some of the author's papers / Actes des Journées International d'étude sur la théorie de graphs, Rome, Julliet 1966, 298-303, Theory of graphs. Proc.Colloq.Graph Theory held at Tihany 1966, Akadémiai Kiadó 1968, 65-75, Publicationes Mathematicae 15./1968/283-285, Journal of Comb. Theory 6./1969/333-344/ new notions of transformation semigroups / main permutation, quasiinverse, commutator subsemigroup / were introduced and investigated by means of transformation graphs. Recent results on this subject will be exhibited, espacially the charakterization of transformation graphs corresponding to the elements of an inverse semigroup.

H. Izbicki: Die Entropie transformierter Graphen

Für einen beliebigen gerichteten Graphen X und $v \in V(X)$ werden die Mengen $W^k(v,X)$ und die Entropie

$$H(v,X) = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln \operatorname{card} W^k(v,X)}{k}$$

definiert. Sodann werden Graphentransformationen η_n, η^m und

$\xi_{r,s}$ eingeführt und Entropien für verschiedene transformierte Graphen berechnet.

J. Morávek: Optimale Zuordnungen in ungerichteten bewerteten Graphen

Man betrachtet einen endlichen, ungerichteten und vollständigen Graph $G = (X,U,w)$ mit bewerteten Kanten (jeder Kante $u \in U$ wird ein Gewicht $w(u)$ zugeordnet) und mit der geraden Anzahl $2k$ der Knoten. Eine Zuordnung in dem Graph G ist jede solche Menge Z von k verschiedenen Kanten, daß keine zwei verschiedenen Kanten aus Z inzident sind. Jeder Zuordnung Z ist das Gewicht

$$w(Z) = \sum_{u \in Z} w(u)$$

zugeordnet.
Das Problem lautet: Es ist eine Zuordnung Z_o so zu bestimmen, daß $w(Z_o) \geqq w(Z)$ für sämtliche Zuordnungen Z gilt. (Z_o heißt optimale Zuordnung). In dem Vortrag wird ein Kriterium für die Optimalität einer Zuordnung formuliert und ein Algorithmus für die Bestimmung der optimalen Zuordnung beschrieben. Ferner werden Beziehungen mit den Ergebnissen von Tutte, Berge, Edmonds u.a. diskutiert.

W. Mader: Über wohlquasigeordnete Klassen von Graphen

$G' \leqq G$ bedeute, daß G eine Unterteilung von G' enthält, und $G' < G$, daß sich G auf G' zusammenziehen läßt. Es wird gezeigt, daß $\leqq$ eine Wohlquasiordnung für die Klasse aller endlichen Graphen mit höchstens n eckendisjunkten Kreisen ist und daß die Klasse aller endlichen Graphen, die sich nicht auf den V_5^- (den vollständigen Graphen mit 5 Ecken minus einer Kante) zusammenziehen lassen, durch $<$ wohlquasigeordnet wird.

W. Mader (Berlin)