MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 21/1969

Arbeitsgemeinschaft Heidelberg-Göttingen
5.7. bis 7.7.1969

Die Arbeitsgemeinschaft Heidelberg-Göttingen tagte im Juli 1969 in Oberwolfach wieder unter der Leitung von Professor Dr.P.Roquette. Das Thema der diesmaligen Tagung der Arbeitsgemeinschaft bildeten die neueren Resultate von J.P.Serre und J.Tate über Reduktion abelscher Mannigfaltigkeiten nach einer Primstelle des Grundkörpers, sowie die Anwendungen dieser Resultate. Es folgt hier eine Liste der Teilnehmer und eine Zusammenstellung der Vortragsauszüge. Die Reihenfolge der Vortragsauszüge entspricht der zeitlichen Reihenfolge der Vorträge.

Teilnehmer:

Arason, Göttingen
Frey, Heidelberg
Geyer, Heidelberg
Göhner, H.,Heidelberg
Göhner, U.,Tübingen
Hahnel, Bonn
Herrmann, Heidelberg
Kneser, Göttingen
Lange, Göttingen
Leicht, Heidelberg
Lipman, Purdue (USA)
Lorenz, Konstanz
Maus, Göttingen
Pfeuffer, Göttingen
Popp, Heidelberg
Radbruch, Tübingen
Reiter, Göttingen
Ritter, Heidelberg
Roquette, Heidelberg
Tamme, Göttingen

Vortragsauszüge

POPP: Das Kriterium von Néron-Ogg-Šafarevič

Es sei K ein Körper, v eine diskrete Bewertung von K. Ferner sei A eine abelsche Varietät über K, für jedes $m \in \mathbb{N}$, $m \neq \operatorname{char} K$, sei A_m der $\operatorname{Gal}(K_s/K)$-Modul der m-Teilungspunkte von A, für jede Primzahl l sei $T_l(A) := \varprojlim_n A_{l^n}$ der Tate-Modul und $V_l(A) := \mathbb{Q}_l \otimes T_l(A)$

Sei $\bar{v}$ eine Fortsetzung von v auf K_s, $I(\bar{v})$ die zu $\bar{v}$ gehörende Trägheitsgruppe. Sei T eine Menge, auf der $\operatorname{Gal}(K_s/K)$ operiert.
Def.: T heißt unverzweigt bzgl. v, wenn $I(\bar{v})$ trivial auf T operiert. Es wurde der folgende Satz bewiesen:
Satz: Sei der Restklassenkörper k von K bzgl. v vollkommen.
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) A hat gute Reduktion in v, d.h. das Néronmodell von A über dem Bewertungsring O_v ist ein abelsches Gruppenschema.
2) A_m ist unverzweigt in v für alle m prim zu $\operatorname{char}(k)$.
2') A_m ist unverzweigt in v für unendlich viele m prim zu $\operatorname{char}(k)$.
3) $T_l(A)$ ist unverzweigt in v für ein l, l eine Primzahl, l prim zu $\operatorname{char}(k)$.

Die Aussage (3) des Satzes wird das Kriterium von Néron-Ogg-Šafarevič genannt.

GEYER: Satz von Šafarevič, Irreduzibilitätssatz

Sei K ein algebraischer Zahlkörper, E eine elliptische Kurve (mit einem K-rationalen Punkt) über K. Dann wird mit Hilfe des Kriteriums von Néron-Ogg-Safarevic bewiesen:
Satz: Bis auf Isomorphie gibt es nur endlich viele zu E über K isogene Kurven.
Daraus wurde der folgende Satz hergeleitet:
Satz: Es habe E über K keine komplexe Multiplikation, das heißt $\operatorname{End}_K(E) = \mathbb{Z}$
Dann gilt:

1) $V_l(E)$ ist irreduzibel für alle Primzahlen l.
2) E_l ist irreduzibel für fast alle Primzahlen l.

Dabei heißt "irreduzibel" irreduzibel als $\operatorname{Gal}(K_s/K)$-Modul.

GÖHNER, H.: Endomorphismen einer abelschen Varietät

Sei A eine abelsche Varietät der Dimension d über den Körper K,

$End_K(A)$ der Ring der K-Endomorphismen von A, $T_l(A)$ der Tate-Modul von A in bezug auf die Primzahl $l \neq char(K)$. Aus dem "Theorem of the square" werden folgende Resultate abgeleitet:

1) Sei $\lambda \in End_K(A)$, $\lambda_T : T_l(A) \to T_l(A)$ der durch λ induzierte $\mathbb{Z}_l$-Endomorphismus von $T_l(A)$. Dann gilt

$\nu(\lambda - n.1_A) = \det(\lambda_T - n.id)$ ist Polynom in n mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$, dabei bedeutet $\nu(\lambda - n.1_A)$ den Grad des Endomorphismen $\lambda - n.1_A$.

2) Die Abbildung $\lambda \to \lambda_T$ von $End_K(A)$ in $End(T_l(A))$ ist injektiv. $End_K(A)$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang $\leq (2d)^2$.

3) Die Algebra $\mathbb{Q} \otimes End_K(A)$ der Endomorphismen ist halbeinfach.

4) Aus 3) folgt noch: das Polynom $\nu(\lambda - n1_A) = \det(\lambda_T - n\,id)$ hat sogar ganze Koeffizienten.

FREY: Potentiell gute Reduktion abelscher Varietäten

Die Bezeichnungen seien wie oben. Wir sagen dann, daß die abelsche Varietät A in v potentiell gute Reduktion habe, wenn es eine endliche Erweiterung K' von K und eine Fortsetzung v' von v auf K' gibt, sodaß $A \times_K K'$ gute Reduktion in v' hat.
Sei l eine Primzahl ungleich char (k) und $\rho_l : Gal(K_s/K) \to Aut(T_l(A))$ die zu dem Tate-Modul $T_l(A)$ zugehörige l-adische Darstellung.
Sei $\bar{v}$ eine Fortsetzung von v auf K_s, $D(\bar{v})$ und $I(\bar{v})$ die Zerlegungsgruppe bzw. Trägheitsgruppe von $\bar{v}$. Dann gilt der

Satz: 1) A hat potentiell gute Reduktion in v dann und nur dann wenn $\rho_l(I(\bar{v}))$ endlich ist.

2) Hat A potentiell gute Reduktion in v , so ist die Einschränkung von ρ_l auf $I(\bar{v})$ unabhängig von l im folgenden Sinne: Der Kern von $\rho_l/I(\bar{v})$ ist derselbe für alle l und der Charakter von $\rho_l/I(\bar{v})$ hat Werte in $\mathbb{Z}$ unabhängig von l.

3) Ist außerdem k endlich und $\sigma \in D(\bar{v})$ so, daß das Bild von σ in $Gal(\bar{k}/k)$ der Frobeniusautomorphismus ist, so hat das charakteristische Polynom von $\rho_l(\sigma)$ ganze Koeffizienten, die von l unabhängig sind und der Absolutbetrag seiner Wurzeln ist gleich $\sqrt{card(k)}$.

Korollare: 1) Sei k endlich, $l \neq char(k)$. Es sei $\rho_l(Gal(K_s/K))$ in $Aut(T_l)$ abelsch. Dann hat A potentiell gute Reduktion in v.

2) A habe potentiell gute Reduktion in v. Sei $m \geq 3$, prim zu char(k), $K(A_m)$ der kleinste Unterkörper von K_s, so daß die Elemente von A_m rational sind.

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Dann: 1.) Die Trägheitsgruppe (bzgl. $\bar{v}$) von $K(A_m)/K$ ist unabhängig von m.

2.) $K(A_m)/K$ ist unverzweigt genau dann, wenn A in v gute Reduktion hat.

3.) $K(A_m)/K$ ist zahm verzweigt, wenn $p > 2d + 1$ ist.

RITTER: Der Führer einer abelschen Varietät

Für endliche galoissche Erweiterungen eines vollständigen diskret bewerteten Körpers wird der Artin-Charakter definiert und einige Aussagen über ihn bewiesen. Sei K ein vollständiger diskret bewerteter Körper mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper. Sei A eine abelsche Varietät über K und L/K eine endliche galoissche Erweiterung derart, daß $A \times_K L$ gute Reduktion hat. Sei G die Galoisgruppe, a_G der Artin-Charakter und b_G der Swan-Charakter ($b_G = a_G - r_G + 1$) von G, ferner φ_A der Charakter der l-adischen Darstellung $\rho_l: G \to \mathrm{Aut}(T_l(A))$. Sei schließlich P der endlich erzeugte projektive $\mathbb{Z}_l[G]$-Modul mit dem Charakter b_G und $\delta_l = \dim_{\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_G(P, A_l)$. Dann gilt

$$\delta_l = (b_G, \varphi_A) \;;$$

insbesondere ist δ_l unabhängig von l. Ist ferner $\varepsilon = \dim_{\mathbb{Q}_l} V_l(A)/V_l(A)^G$, so heißt $\delta + \varepsilon$ der v-Beitrag zum Führer von A/K. Es wird gezeigt

$$\varepsilon + \delta_l = (a_G, \varphi_A).$$

PFEUFFER: Abelsche Varietäten mit komplexer Multiplikation I

Es sei A eine abelsche Varietät über einem Körper K, F ein algebraischer Zahlkörper vom Grad 2d, wobei $d = \dim A$. A hat komplexe Multiplikation mit F über K, wenn $F \subseteq \mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}_K(A)$. l sei eine Primzahl ungleich char(K), $T_l(A)$ der zugehörige Tate-Modul, $V_l(A) = \mathbb{Q}_l \otimes T_l(A)$ und $\rho_l: \mathrm{Gal}(K_s/K) \to \mathrm{Aut}(T_l) \subseteq \mathrm{Aut}(V_l)$ die zugehörige l-adische Darstellung von K. Ferner sei $R = F \cap \mathrm{End}_K(A)$, $R_l = \mathbb{Z}_l \otimes R$, $F_l = \mathbb{Q}_l \otimes F$. Es wurden unter diesen Voraussetzungen bewiesen:

Satz: 1) Der F_l-Modul $V_l(A)$ ist frei vom Rang 1.

2) Ein Element von F_l führt $T_l(A)$ in sich über genau dann, wenn es zu R_l gehört.

Korollare: 1) Der Zentralisator von R in $End(V_l)$ bzw. $End(T_l)$ bzw. $\mathbb{Q} \otimes End_K(A)$ bzw. $End_K(A)$ ist F_l bzw. R_l bzw. F bzw. R.
2) Das Bild von Gal (K_s/K) unter ρ_l ist in der Gruppe $U_l(R)^*$ der invertierbaren Elemente von R_l enthalten. Insbesondere ist $Im\rho_l$ kommutativ.

TAMME: Abelsche Varietäten mit kompl. Multiplikation II

Die Bezeichnungen seien wie im vorigen Vortrag . Ferner sei für eine diskrete Bewertung v von K p_v die Charakteristik des Restklassenkörpers k_v von v. Sei μ die Gruppe der Einheitswurzeln in F.

Satz: Sei k_v endlich. Dann gilt
1) A hat potentiell gute Reduktion in v.
2) Ist $l \neq p_v$, so ist für eine Fortsetzung $\bar{v}$ von v auf K_s $\rho_l(I(\bar{v})) \subseteq R[p_v^{-1}]$. Der dadurch definierte Homomorphismus $\varphi_v : I(\bar{v}) \to \mu$ ist von l unabhängig.
3) Sei n_v die kleinste natürliche Zahl n, so daß φ_v auf der n-ten Verzweigungsgruppe $I(\bar{v})^{(n)}$ der oberen Zählung trivial ist. Dann ist der v-Beitrag des Führers von A gleich $2dn_v$.
4) A hat genau dann gute Reduktion in v, wenn $\phi_v := \varphi_v(I(\bar{v})) = \{1\}$ ist.

Sei jetzt K ein globaler Körper, S_A die Menge der Bewertungen von K, in denen A keine gute Reduktion hat. Es sei m das kleinste gemeinsame Vielfach der Ordnungen der ϕ_v für $v \in S_A$. Dann gilt:
Satz: Es existiert eine zyklische Erweiterung K' von K vom Grad 2m(wenn S_A nicht exzeptionell (Artin-Tate, Class Field Theory, Chap.10) ist, schon vom Grad m) so daß $A \times_K K'$ überall gute Reduktion hat.

FREY: Abelsche Varietäten mit kompl.Multiplikation III

Die Bezeichnungen des vorigen Vortrags seien beibehalten, insbesondere sei K ein globaler Körper. Es wurde bewiesen:
Satz: Sei S eine endliche Menge von endlichen Bewertungen von K und m das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen von ϕ_v für $v \in S$. R enthalte die 2m-ten (wenn S nicht exzeptionell ist, genügen die m-ten) Einheitswurzeln. Dann existiert eine abelsche Varietät B über K mit

1) B hat gute Reduktion in allen $v \in S$.
2) $B \times_K K_S$ ist isomorph zu $A \times_K K_S$.

MAUS: Komplexe Multiplikation über Zahlkörper

Es wurde zuerst die Zetafunktion einer abelschen Varietät über einen algebraischen Zahlkörper K eingeführt und einige mit dieser Funktion zusammenhängende Probleme in Beziehung mit dem Thema der Tagung gebracht. Dann wurde die Formel von Shimura (Serre-Tate: Good reduction of abelian varieties, Ann. of Math. 1968, Theorem 10) erläutert und verschiedene Folgerungen daraus gezogen. Unter anderem wurde gezeigt, daß der Führer der abelschen Varietät A über K mit komplexer Multiplikation mit F die 2d-te Potenz des Führers eines durch eine Einbettung $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ definierten Größencharakters ist.

J.K.Arason (Göttingen)