MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 22/1969

Spezielle Fragen aus den Grundlagen der Geometrie

6.7. bis 12.7.1969

Unter der Leitung von Professor A.Barlotti (Perugia) und Professor E.Sperner (Hamburg) fand in diesem Jahr erstmals eine Tagung über spezielle Fragen aus den Grundlagen der Geometrie im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach statt. Der kleine Kreis der Teilnehmer (23 mit 17 Vorträgen) erlaubte eingehende Diskussionen und einen fruchtbaren Gedankenaustausch. Die Tagung hatte internationalen Charakter, da die Hälfte der Teilnehmer aus dem Ausland angereist war.

Themen der Vorträge waren Fragen der affinen und projektiven Geometrie sowie deren Verallgemeinerungen (insbesondere den von Sperner eingeführten schwach affinen Räume) sowie Probleme aus dem Grenzgebiet von Algebra, Geometrie und Topologie.

<u>Teilnehmer</u>

H.-J.Arnold (Bochum)
A.Barlotti (Perugia)
W.Benz (Bochum)
D.Biallas (Hamburg)
Judita Cofman (London)
A.Conte (Torino)
F.Conti (Perugia)
P.Dembowski (Tübingen)
G.Dühl (Hamburg)
V.Havel (Brno)
J.Joussen (Hamburg)
K.-R.Kannenberg (Stellenbosch)
W.Leißner (Bochum)
G.Menichetti (Florenz)
J.Misfeld (Hamburg)
Irene Pieper (Hamburg)
P.Quattrocchi (Modena)
L.A.Rosati (Firenze)
W.Seier (Hamburg)
E.Sperner (Hamburg)
G.Tallini (Rom)
Maria Tallini-Scafati (Rom)
J.Timm (Hamburg)

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

D.BIALLAS: An Application of Generalized Cross-Ratios

Using the concept of generalized cross-ratios angles of inclination can be defined for subspaces of a finite dimensional orthogonal (unitary) vectorspace V over $\underline{R}$ (resp. $\underline{C}$). These angles form together with the dimension for two subspaces a complete system of invariants with respect to the orthogonal (unitary) transformations. Moreover it can be shown that in some other metric vector spaces the generalized cross-ratios lead to a complete system of invariants for orthogonal quadrupels of subspaces. For details see Abh.Mathem. Sem.Univ. Hamburg 33, 1969.

JUDITA COFMAN: Baer involutions in finite projective planes

Sei π eine endliche projective Ebene, in der jedes Viereck von genau einer Baer-Involution (Eckenweise) festgelassen wird. Sei G die Gruppe von π, die von allen Baer-Involutionen von π erzeugt wird.- Dann enthält G die kleine projektive Gruppe von π und π ist desarguesch.

V.HAVEL: Ein Einbettungssatz bezüglich der Homomorphismen von Moufang-Ebenen

Sei $A=(M,0,1,+,\cdot)$ ein Alternativkörper. Mit $M\times M$ als Punktmenge und $\{\{(x,y) \mid x=a\} \mid a\in M\} \cup \{\{(x,y) \mid y=xu+v\} \mid u,v\in M\}$ als Geradenmenge erhält man eine affine Moufang-Ebene über A. Durch Adjunktion der uneigentlichen Punkte $(\infty),(u)\ \forall u\in M$ und uneigentlichen Geraden $[\infty]$ entsteht die projektive Moufang-Ebene P_A über A. Dabei bezeichnet man üblicherweise $[a] := \{(x,y) \mid x=a\}\cup\{(\infty)\}(a\in M)$, $[u,v] := \{(x,y) \mid y=xu+v\}\cup\{(u)\}$ $(u,v\in M)$ und $[\infty]:= \{(u) \mid u\in M\} \cup \{(\infty)\}$. Ist A' ein weiterer Alternativkörper, so werden entsprechende, mit einem Strich versehene Bezeichnungen verwendet.

Es wurde der folgende Satz hergeleitet:

Sind P_A, $P_{A'}$ projektive Ebenen über Alternativkörpern A, A' und ist $\varkappa$ eine Abbildung der Menge $Q = [0,0] \cup [0] \cup [\infty] \cup \{(1,1)\}$ auf die Menge $Q' = [0',0'] \cup [0'] \cup [\infty] \cup \{(1',1')\}$ mit $(0,0)^{\varkappa} = (0',0')$, $(0)^{\varkappa} = (0')$, $(\infty)^{\varkappa} = (\infty')$, $(1,1)^{\varkappa} = (1',1')$ und $A^{\varkappa}, B^{\varkappa}, C^{\varkappa}$ ist kollinear für kollineare $A,B,C \in Q$, dann gibt es einen Homomorphismus $\overline{\varkappa}$ von P_A auf $P_{A'}$ mit $\overline{\varkappa}|_Q = \varkappa$.

G.TALLINI: On the notion of distance in hyperbolic geometry over a Galois plane

If θ is a primitive element of a Galois field GF(q), we define: $\forall x \in GF(q)-\{0\}$, $\log_\theta x = \{n\} \in Z_{q-1}$, where $x = \theta^n$.

If q is odd and $Z^+_{q-1} = [\{0\},\{1\},\ldots,\{\frac{q-1}{2}\}]$, $Z^-_{q-1} = Z_{q-1} - Z^+_{q-1}$, we put

$$|\{n\}| = \begin{cases} \{n\} \text{ , iff } \{n\} \in Z^+_{q-1} \\ \{q-1-n\}, \text{ if } \{n\} \in Z^-_{q-1} \end{cases}$$

. We have $|\{n\}| = |-\{n\}|$.

We consider in a Galois plane $S_{2,q}$ (q odd) a non degenerated conic Ω and we define the distance of two distinct points A and B $(A,B \notin \Omega)$ on a line intersecting Ω in two distinct points U,V with coordinates in GF(q), the element of Z^+_{q-1} given by $d(A,B) = |\log_\theta(ABUV)|$.

Such a distance is an invariant of the hyperbolic geometry with respect to Ω. It enjoys the additive property for triplets of collinear points. By means of the distance we introduce the notion of the segment AB, given by the set of points C of the line AB such that $d(A,B)=d(A,C)+d(C,B)$. We determine the number of such points by means of the distance d(A,B).

Dually we define the angle of two lines and we can develope the whole hyperbolic geometry.

MARIA TALLINI SCAFATI: On $\{k,n\}$-caps of a Galois space $S_{r,q}$ $(r \geq 3)$

We call a $\{k,n\}$-cap K of $S_{r,q}$ $(r \geq 3)$ a proper non empty set of k points such that n will be the greater number of its collinear points $(2 \leq n \leq q+1)$.

A cap is said to be of kind $(m_1,\ldots,m_{l-1},n)$, where $m_1 < \ldots < m_{l-1} < n$, if K admits effectively only m_1-secant,..,m_{l-1}-secant, n-secant lines. Clearly every subset of $S_{r,q}$ is a cap of suitable kind. The study of the subsets of $S_{r,q}$ is so reduced to that of caps and this study can be

orderly treated considering the caps by raising of the number of the integers m_i. The results obtained are the following:

Caps of kind (m,n) in $S_{r,q}$ $(r \geq 3)$, briefly (m,n)-caps:

$(0,n)$-caps do not exist for $n < q$, $n=q+1$,

$(0,q)$-caps $\Leftrightarrow$ complementary sets of hyperplanes,

$(1,n)$-caps do not exist for $n \leq q$; for $n=q+1$ $\Leftrightarrow$ hyperplanes,

$(m,q+1)$-caps and (m,q)-caps do not exist for m 2.

(m,n)-caps for $2 < m < n \leq q-1$: if such a cap exists, it must be: q an odd square, $m=(1+q-2\varepsilon\sqrt{q})/2$, $n=[1+q-2(\varepsilon-1)\sqrt{q}]/2$, $\varepsilon=0,1$ and $k=\{1+Q_{r-1}[q-\sqrt{q}(2\varepsilon-1)] \pm (\sqrt{q})^r\}/2$.

Caps of kind $(0,n,q+1)$ in $S_{r,q}$ $(r \geq 3)$ do not exist for $2 \leq n \leq q-1$, $r \geq 4$; for $n=1$ $\Leftrightarrow$ S_d ; for $n=q$ $\Leftrightarrow$ complementary set of a S_d $(1 \leq d \leq r-2)$.

Caps of kind $(1,n,q+1)$ in $S_{r,q}$ $(r \geq 3, q > 4)$: for $3 \leq n \leq q-1$ $\Leftrightarrow$ hermitian forms and four exeptional cases given by suitable cones with vertices S_{r-3}; for $n=2$ $\Leftrightarrow$ a hyperplane and a S_d, $S_d \not\subset S_{r-1}$; for $n=q$ $\Leftrightarrow$ complementary set of a S_t and a $S_{t-1} \subset S_t$ $(1 \leq t \leq r-1)$.

The results about graphic characterization fo hermitian forms have been published in M.Tallini, Rend.Mat.26 (1967), 273-303, Univ.of Rome.

G.MENICHETTI: Procedimenti geometrici per la determinazione di quasi-corpi destri di ordine q^2.

Attraverso lo studio di certe trasformazioni quadratiche in un piano proiettivo sopra GF(q) si e dato un procedimento geometrico per la determinzione di quasicorpi destri di ordine q^2.

E.SPERNER: Zur Konstruktion von Quasimaduln

Ausgangspunkt der dargestellten Konstruktion ist ein S-System, d.i. eine binäre Struktur $S(+,.)$ mit zwei Operationen, "Addition" und "Multiplikation", welche den folgenden Axiomen genügt:

I. S bildet bezüglich der Addition eine (i.a.nicht kommutative) Gruppe (mit 0 als neutralem Element).

II. Die Multiplikation in S besitzt die Eigenschaften:

1) $0\alpha = \alpha 0 = 0 \quad \forall \alpha \in S$

2) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \forall \alpha,\beta,\gamma \in S$

3) $\exists 1 \neq 0$, $1 \in S$ mit $\alpha 1 = 1\alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in S$

4) $\forall \beta,\gamma \in S$, $\beta \neq 0 \Rightarrow \exists_1 \alpha \in S$ mit $\alpha\beta = \gamma$.

Es wird dargetan, wie aus der Menge $\hat{V} = \{a \mid a = \{\alpha_i\}_{i \in I}\}$, d.h. der Menge aller "Vektoren" über S zur Indexmenge I durch geeignete Auswahl eine Teilmenge V gewonnen wird, die einen Quasimodul bildet und daher auch einen (zugehörigen) schwach affinen Raum erzeugt.

W.SEIER: Quasimoduln über S-Systemen und angeordnete schwach affine Räume

Ein Quasimodul mit assoziativer Addition heißt Vektorgruppe. n Vektoren $a_1,\dots,a_n$ einer Vektorgruppe VS heißen eine kommutative Basis von VS, falls VS $= \sum_{i=1}^{n} a_i S$ das direkte Produkt der Untergruppen $a_i S$ ist. Elemente $a\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i$, $b\beta = \sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i$ heißen komplementär, falls für jedes i $\alpha_i=0$ oder $\beta_i=0$. Ist $I=\{1,2,\dots,n\}$, so definieren wir für jedes $J\subset I$, $J\neq\emptyset$ die Abbildung $\phi_J : \sum_{i\in I} a_i\alpha_i \longrightarrow \sum_{i\in J} a_i\alpha_i$. Quasimoduln über S-Systemen sind dann durch die folgenden Eigenschaften gekennzeichnet:

Satz: Sei $n\geqslant 2$. Eine Vektorgruppe VS ist genau dann isomorph zu einem Quasimodul über einem S-System bezüglich der Indexmenge $I=\{1,\dots,n\}$, wenn es eine kommutative Basis $a_1,\dots,a_n$ von VS und ein $e\in V$ ($\phi_J(e\alpha)\neq 0$ $\forall J\subset I$ $\alpha\neq 0$) gibt, derart daß $\forall J\subset I$ gilt $a\alpha+\phi_J(e\beta) = c\gamma \Rightarrow c\delta\subset\{a\delta+\phi_J(e\delta)\}$ falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) $\phi_J(e\beta)=\sum_{i\in I} a_i\beta_i$ ist komplementär zu $a\alpha=\sum_{i\in J} a_i\alpha_i$ oder zu $c\gamma$ und $\mathrm{Min}(\{ i\in I \mid \alpha_i\neq 0\}) < \mathrm{Min}(J)$

b) $c\gamma = \sum_{i\in I} a_i\gamma_i$ und $\phi_J(e\beta)$ sind komplementär und für $i_0=\mathrm{Min}(\{ i\in I \mid \gamma_i\neq 0\})$ gilt $\phi_J(e\beta) - a_{i_0}\gamma_{i_0} = \phi_{J\cup\{i_0\}}(e\beta)$.

Die geometrische Kennzeichnung der entsprechenden schwach affinen Räume geschieht durch Spezialfälle des kleinen affinen Satzes von Desargues und eines Axioms von Veblen.

A.BARLOTTI: On Derivable S-spaces

Let A be a finite translation S-space of order $n=m^r$, regular with respect to the dimension and of dimension r. Conditions are given under which A is derivable. For each derivable S-space it is possible to obtain another S-space with the same dimension. This process generalizes the result obtained by the author in "Le Matematiche" 21 (1966) 302-12 (Un nuovo procedimento per la costruzione di spazi affini generalizzati di Sperner).

G.DÜHL: Über eine Kennzeichnung der affinen Translationsebenen in der Quasimodul-Algebra

Eine Translation τ einer affinen Ebene A kann in geeignet gewählten zu A gehörigen Quasimoduln als Addition von links mit einem festen Element $c\gamma$ dargestellt werden. Aufgrund dieser Tatsache lassen sich die Translationsebenen dadurch kennzeichnen, daß in geeignet gewählten zugehörigen Quasimoduln das volle Assoziativgesetz der Addition gilt.

K.R.KANNENBERG: Lineare Kongruenzräume

Die Theorie der Vektorräume läßt sich aus dem Begriff der abelschen Gruppe mit Partition ohne Verwendung von Skalaren entwickeln. Hierbei kann man auch von einem Gruppoid V von Vektoren ausgehen, das durch eine geeignete Äquivalenzrelation in Klassen zerlegt wird. An die Stelle der linearen Teilräume eines Vektorraumes treten dann die linearen Untergruppoide, die mit Hilfe der Äquivalenzklassen definiert werden. Der Verband der linearen Untergruppoide wurde untersucht, und mit Hilfe spezieller Endomorphismen (Streckungen) wurden Koordinaten eingeführt. Indem für das Vektorgruppoid V schrittweise zusätzliche Eigenschaften vorausgesetzt wurden, wurde gezeigt, daß so die Theorie der Vektorräume rekonstruiert werden kann.

W.LEISSNER: Die ebene Geometrie von Lie über einem Körper

Jedem kommutativen Körper K läßt sich in kanonischer Weise eine 1-sortige Geometrie $\underline{K}^2(K)$ zuordnen, die bis auf Isomorphie mit der klassisschen ebenen Geometrie von Lie übereinstimmt, falls K der reelle Zahlenkörper ist. Es soll über eine axiomatische Kennzeichnung dieser Klasse von Geometrien berichtet werden.

W.BENZ: Zur Geometrie der Körpererweiterungen

Sei L ein Körper (nicht notwendig kommutativ), sei Γ die durch die Permutation $z\ (\in L') \to az+b,\ z \to \frac{1}{z}$ erzeugte Gruppe von Permutationen der projektiven Geraden $L' \equiv L \cup \{\infty\}$ über L mit $a(\neq 0), b \in L$. Ist K ein echter Unterkörper von L, so werde die Geometrie $\Sigma(K,L)$ definiert: Punkte sind die Elemente von L', Ketten sind die Punktmengen $(K')^{\gamma}, \gamma \in \Gamma$. Ist $\underline{M}$ die durch Γ und $\underline{A}(K,L)$ (Gruppe der Auto- und Antiautomorphismen von L, die K als Ganzes festlassen) erzeugte Gruppe, so kann diese echt in der Gruppe $\underline{W}$ aller Kettenverwandtschaften enthalten sein, aber

Theorem: Ist $|K \cap Z(L)| > 2$, Z(L) das Zentrum von L, so gilt $\underline{W}=\underline{M}$.

Konsquenzen:

1) Klassischer Fall $L=\underline{C}, K=\underline{R}$. Hier erhält man den bekannten Satz (Möbius, Caratheodory u.a.) über die Gruppe der Kreisverwandtschaften in der vollständigen Gauß'schen Zahlenebene.

2) L kommutativ und $(L:K)=2$. Hier erhält man den bekannten Satz (A. J.Hoffmann 1951) über die Gruppe der Kreisverwandtschaften in einer miquelschen Möbius-Ebene (i.e.S.).

3) L Galoisfeld. Das Theorem gibt hier die Gruppe des Steinersystems für $|K|>2$. Diese Steinersysteme $\Sigma(K,L)$ wurden schon von Witt 1938 betrachtet (ohne Angabe ihrer Gruppe). Im Falle $|K|=2$ besteht die Gruppe von $\Sigma(K,L)$ natürlich aus allen Permutationen von L'.

4) L kommutativ und normale Erweiterung (im Sinne von Artin) von K. Nennt man Inversion an einer Kette k jede Kettenverwandtschaft, die k punktweise festläßt, so ist die Galoisgruppe G(K,L) isomorph zur Gruppe aller Inversionen an k. (Veranschaulichung der Galoisgruppen).

H.J.ARNOLD: Ringgeometrie als geometrische Algebra

Es wurden (in verschiedener Weise) projektive Inzidenzstrukturen über Ringen konstruiert und die zu den projektiven Räumen gehörigen Klassen von Ringen bestimmt. Diese Inzidenzstrukturen erscheinen als Fernräume affiner Räume über Ringen. Die affin-geometrische Kennzeichnung gelingt für den unendlich-dimensionalen Fall für alle Ringe, die ein Rechts-einselement besitzen. Bei der Wahl der geometrischen Grundbegriffe wird auf das klassische "Nachbarelement" verzichtet; außer Punkten, Geraden und einem Parallelismus (für Geraden) werden zwei Inzidenzrelationen (oder eine, die nicht notwendig symmetrisch ist) benötigt.

P.QUATTROCCHI: Groups and multiplicative loops of linear ternary rings

The following theorems of Merchiari and myself have been proved:
Theorem 1: If A is any infinite group (whose order is an arbitrary infinite cardinal number), then there exists a linear ternary ring A_0 whose multiplicative loop is isomorphic to A.
Theorem 2: An infinite Abelian group A is isomorphic to the multiplicative loop of a distributive linear ternary ring if and only if A contains at most one element of order 2.
Theorem 3: If A is any infinite Abelian group with at most one element of order 2 there exists a projective plane of Lenz-Barlotti type I_4, coordinatized by a ternary ring whose multiplicative loop is isomorphic to A.

J.TIMM: Generalization of grouptheory to n-adic operations

A set G together with an n-ary operation "o" defined in it is called an n-group, iff it satisfies the associative law and for any n elements there is exactly one satisfying $(a_1,..,a_n)_o=a_{n+1}$ with them.
Some theorems were stated, which solve the problem of determining the structure of n-groups in the finitely generated and abelian case, generalizing the well known "basic-theorem" of binary abelian grouptheory.

Examples of n-groups occur in geometry describing structures with certain properties, which enable one to define n-ary operations in the set of the points or some subset.

IRENE PIEPER: Topological Quasimodules and their geometry

The notions of topological quasimodule (tqm) and top.weak-affine space (ts-space) are introduced in a natural manner. Some propositions on seperationproperties of tqm's are considered. Furthermore the conditions are discussed for a tqm to be the topological product of its set of "directions" and its set of "scalars". Every tqm leads to a topological s-space, and this class of s-spaces is characterised. Applying these results to topological affine planes (where joining,intersecting and drawing the parallel line is assumed to be continous) one gets some properties which are also true for affine subplanes of topological projective planes. The topological qms defining topological affine planes are characterized.

J.Timm (Hamburg)