MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 24/1969

Arbeitstagung Professor B A E R

20. bis 26. Juli 1969

Die über die Welt verstreuten Schüler Baer's, die hier zusammengekommen waren, berichteten über die im Laufe des letzten Jahres von ihnen gewonnenen Ergebnisse. Dabei wurden naturgemäß Fragen der Geometrie, Gruppentheorie, Logik, Ringtheorie und Verbandstheorie behandelt.

Diskussionen und Gespräche konnten manche Anregung vermitteln. Wie befruchtend gerade die Vielfalt der Thematik sich auswirken kann, mag man daran ablesen, daß die Herren MICHLER und WILLE im Anschluß an den Vortrag von Wille einen Satz von Varietäten von Ringen beweisen konnten, indem sie einerseits (die von Wille beigesteuerten) Methoden der universellen Algebra, andererseits (die von Michler gelieferte) ringtheoretische Methodik verwendeten.

An der Tagung nahmen 38 Mathematiker aus Canada, England, Holland, USA und Deutschland teil.

Teilnehmer :

B.Amberg, Austin/Texas (USA)

R.Baer, Oberwolfach

E.A.Behrens, Hamilton/Ont. (Canada)

H. Bender, Mainz

D. Betten, Tübingen

H.-J. Birkenstock, Tübingen

H.H. Brungs, Edmonton(Canada)

J. Cofman, London (England)

K. Faltings, Austin/Texas(USA)

U. Felgner, Utrecht (Holland)

W. Felscher, Freiburg

B. Fischer, Frankfurt

H.J. Groh, Manhattan/Kansas (USA)

J. Hausen, Houston/Texas (USA)

H. Heineken, Erlangen

D. Held, Mainz

Ch. Hering, Chicago (USA)

L.-Ch. Kappe, Binghamton/N.Y. (USA)

W. Kappe, Binghamton(USA)

O. Kegel, London (England)

G. Krause, Winnipeg (Canada)

H.H. Kurzweil, Tübingen

H. Lüneburg, Chicago (USA)

H. Mäurer, Darmstadt

G. Michler, Tübingen

U. Müller, University Park/Pa./USA

M. Newell, London (England)

P. Plaumann, Tübingen

C. Polley, Tübingen

C.M. Ringel, Tübingen

H. Salzmann, Tübingen

A. Schleiermacher, Tübingen

A. Schlette, Pullman/Wash.(USA)

R. Schmidt, Kiel

U. Schoenwaelder, St.Louis/Mo.(USA)

K. Strambach, Tübingen

O. Tamaschke, Tübingen

R. Wille, Bonn

- 3 -

Vortragsauszüge

BENDER, Helmut : Zur Auflösbarkeit ungerader Gruppen

Es wird folgendes Teilergebnis aus dem Beweis der Auflösbarkeit von Gruppen ungerader Ordnung (Feit und Thopson) diskutiert :

Sei G eine minimal einfache Gruppe von ungerader Ordnung. Ist E eine elementar-abelsche Untergruppe der Ordnung p^3 aus G, so ist E nur in einer einzigen maximalen Untergruppe von G enthalten.

BETTEN, Dieter : Differenzierbare projektive Ebenen

Eine differenzierbare projektive Ebene der Klasse C^r ist eine topologische projektive Ebene bei der Punkt- und Geradenmannigfaltigkeit mit je einer C^r - Struktur versehen sind, so daß Verbinden und Schneiden C^r -Abbildungen und Punktreihen und Geradenbüschel C^r -Teilmannigfaltigkeiten sind.
Zu jedem r ($1 \leq r \leq \infty$ oder r = reell analytisch) gibt es genau eine desarguessche Ebene der Klasse C^r .
Die Moultonebenen, die hyperbolischen projektiven Ebenen und die Ebenen mit genau zwei Fixpunkten und zwei Fixgeraden sind nicht differenzierbar. Die

- 4 -

Ebenen mit genau einer Fixfahne, die durch Verschieben der Schiefparabel $P_{c,d}$ $(0 < c \leq 1 < d)$ entstehen, sind für $d > 2$ nicht differenzierbar, für $d = 2$ desarguessch und für $1 < d < 2$ höchstens (vermutlich genau) einmal differenzierbar.

COFMAN, Judita : Eine Bemerkung über Baer'sche Involutionen

Sei π eine endliche projektive Ebene der Ordnung n. Wenn jedes Viereck von π von genau einer Baer'schen Involution festgelassen wird, so ist π desarguessch, und die Kollineationsgruppe von π, die von den sämtlichen Baer'schen Involutionen erzeugt wird, enthält die kleine projektive Gruppe π.

FALTINGS, K. : Stabilitätsgruppen direkter Summanden

Sei A eine abelsche Gruppe, U eine Untergruppe von A. Die Stabilitätsgruppe von U in A ist die Menge aller Automorphismen von A, die auf U und auf A/U den Einsautomorphismus induzieren.

SATZ: Sei A eine reduzierte abelsche p-Gruppe mit $p > 3$. Dann gilt: Die Untergruppe Δ der Automorphismengruppe Γ von A ist Stabilitätsgruppe eines direkten Summanden von A dann und nur dann, wenn sie der folgenden Bedingung genügt :

Es existiert eine Involution $\alpha \in \Gamma$, derart, daß

(1) jedes Element aus Δ von α invertiert wird,

(2) Δ vom Zentralisator von α normalisiert wird,

(3) die Abbildung $\delta \mapsto \delta^2$ ein Automorphismus von Δ ist,

(4) Δ bezüglich der Eigenschaften (1) - (3) maximal ist, und

(5) Δ kein nicht-triviales direktes Produkt vom Zentralisator von α normalisierter Untergruppen ist.

FELGNER, Ulrich : Generische Modell-Erweiterungen

Obwohl die NBG-Mengenlehre reicher an Ausdrucksmöglichkeiten als die ZF-Mengenlehre ist, können bekanntlich aus den NBG-Axiomen nicht mehr Aussagen, welche keine Klassenvariable enthalten, abgeleitet werden als aus den ZF-Axiomen ableitbar sind. A. Lévy stellte das Problem, ob dies auch für die Theorien " NBG + sein Auswahlaxiom " und " ZF + sein Auswahlaxiom " gültig ist. Dabei ist die globale Form (E) das Auswahlaxiom von NBG und die lokale Form (AC) dasjenige von ZF. Das Problem wurde im positiven Sinne gelöst:

SATZ: Sei L_{ZF} die Sprache der ZF-Mengenlehre und $\Phi \in L_{ZF}$; dann gilt :

$$ZF + (AC) \vdash \Phi \longleftrightarrow NBG + (E) \vdash \Phi \quad .$$

Das System NBG besteht dabei aus den Axiomen der Gruppen A, B, C, D von Gödel's Monographie (Princeton 1940). Der Beweis verwendet P. Cohen's Methode der generischen Modell-Erweiterung.
Zur Beschreibung der Erweiterung wurde jedoch eine unverzweigte Sprache verwendet. - Als Korollar ergibt sich ein ähnlicher Sachverhalt für gewisse weitere und globale Formen von Aussagen.

FELSCHER, Walter : Über den Herbrand'schen Satz

Satz: Eine pränexe Formel a einer prädikatenlog. Sprache L ist (im üblichen Hilbert-typ Kalkül) beweisbar genau dann, wenn in einer Konstanten-erweiterung L_{∞} von L eine Disjunktion von geeigneten Spezialisierungen der Matrix von a aussagenlogisch beweisbar ist.

Für diesen Satz wird ein neuer Beweis gegeben, der (i) auf der Henkin'schen Transformation pränexer L-Formeln in quantorenfreie L_{∞} - Formeln und (ii) auf einem dem 1.Hilbert'schen ε - Theorem analogen Satze beruht.

- 7 -

FISCHER, B. : Symplektische Gruppen über GF(2)

Sei G eine endliche Gruppe, die von einer Klasse D konjugierter 3-Transpositionen erzeugt wird; es gelte $\mathbb{Z}(G) = 1$ und G' sei einfach. Sei $d \in D$ und $\mathbb{C}_G(d)$ operiere 2-fach transitiv auf den Paaren $\{x, x^d \neq x\}$ für $x \in D$. Dann ist G eine symmetrische Gruppe oder eine syplektische Gruppe über GF(2) oder eine orthogonale Gruppe über GF(2).

GROH, Hansjoachim : Ebene projektive Ebenen mit 2-dimensionaler Automorphismengruppe

In Fortsetzung der Klassifikation der ebenen projektiven Ebenen (P,L) mit $\geqslant 3$-dimensionaler Automorphismengruppe (H. Salzmann, 1962-65) wurden die ebenen projektiven Ebenen mit $\geqslant 2$-dimensionaler Automorphismengruppe klassifiziert. Die benutzten Methoden sind von den bisherigen verschieden. Es zeigt sich, daß diese Ebenen in engem Zusammenhang stehen mit stetigen reellwertigen Funktionen $f: R \to R$, die differenzierbar sind und eine streng monotone Ableitungsfunktion haben. Entsprechend der Fixelementkonfiguration ergeben sich ein Typ für die Gruppe $S_1 x R$, 3 Typen für R^2, und 6 Typen für

$$L_2 = \{x \longmapsto ax + b \mid a \in R^+, \ b \in R\}.$$

HAUSEN, Jutta : Über die Residualitätsstufe der Automorphismengruppe einer abelschen p-Gruppe

Für eine Gruppe X bezeichne $\underline{R}X$ den Durchschnitt aller Untergruppen von X von endlichem Index. Ist $\underline{R}_\mu X$ erklärt für die Ordinalzahl μ, so sei $\underline{R}_{\mu+1} X = \underline{RR}_\mu X$ und $\underline{R}_\lambda X = \bigcap_{\mu<\lambda} \underline{R}_\mu X$, falls λ eine Limeszahl ist.

SATZ: Sei G eine reduzierte abelsche p-Gruppe vom Ulmtyp $\tau = \omega^\alpha \cdot n_\alpha + \beta$ mit $\beta < \omega^\alpha$, $1 \leq n_\alpha < 2^m$. Dann ist $\underline{R}_{\omega\cdot\alpha+m}\Gamma(G) = 1$, wobei $\Gamma(G)$ die Menge aller in $G/p^\omega G$ die Identität induzierenden Automorphismen von G ist. Falls $\beta = 0$, und $1 \leq n \leq 2^{m-1}$, so gilt bereits $\underline{R}_{\omega\cdot\alpha+m-1}\Gamma(G) = 1$.

HEINEKEN, Hermann : Gruppen mit zwei speziellen Antiautomorphismen

In einer Arbeit hat C. Ayoub die Frage gestellt: Welche Gruppen besitzen zwei von der Identität verschiedene Antiautomorphismen der Eigenschaft, daß die Gruppe mengentheoretische Vereinigung der beiden Fixmengen ist ? Diese Frage wird beantwortet; es handelt sich um die nichtabelschen Gruppen, die eine abelsche Untergruppe vom Index zwei besitzen.

HELD, D. : Die Fusion der Evolutionen in der einfachen Gruppe der Ordnung $2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$

Methoden für die Bestimmung der Klassen konjugierter Involutionen in der zusammen mit M_{24} und PSL(5,2) auftretenden einfachen Gruppe der Ordnung 4.030.387.200 wurden erläutert.

HERING, Christoph : Über Automorphismengruppen von endlichen affinen Ebenen

Der folgende Satz wird bewiesen: Sei $\underline{A}$ eine Translationsebene mit dem Kern $\underline{K}$ und der endlichen Ordnung $n = |\underline{K}|^m$ so daß $n \equiv m \equiv 1 \pmod 2$. Ist dann G eine Gruppe von Automorphismen von $\underline{A}$ und C ein Kompositionsfaktor von G, so ist entweder $|C| = 2$ oder $|C| \equiv 1 \pmod 2$ oder G und C haben die folgenden drei Eigenschaften :

a) Ist S eine Sylow-2-Gruppe von C , so ist S eine Diedergruppe und $|S| \mid \frac{1}{2} \cdot (n^2-1)$.

b) G läßt keinen Punkt der unendlich fernen Geraden von $\underline{A}$ fest.

c) C ist der einzige Kompositionsfaktor von G , dessen 2-Sylow-Gruppen nicht zyklisch sind.

KAPPE, Luise-Charlotte : Überdeckung von Gruppen durch Potenzen

Sei G eine Gruppe, n eine natürliche Zahl, $G^n = \langle g^n / g \in G \rangle$ und E eine gruppentheoretische Eigenschaft.
Wir betrachten die Bedingungen:

(I) Aus $G^{n_1}, \ldots, G^{n_r} \in E$, $(n_1, \ldots, n_r) = d$ folgt $G^d \in E$.

(II) Aus $G = \bigcup_{n_i} G^{n_i}$, $G^{n_i} \in E$ folgt $G \in E$.

Für E = zyklisch wurden (I) von V. Dlab (1960), und (II) von F. Szasz (1956) bewiesen. Eigenschaften, die (I) erfüllen, sind z.B. abelsch, Nilpotenz, Nilpotenz fester Klasse, Überauflösbarkeit. Jedoch E = met-abelsch erfüllt (I) nicht. Es gilt: Satz 1. (I) impliziert (II).
Da sich zeigen läßt, daß für endlich oder endlich erzeugte auflösbare Gruppen $G = \bigcup_{n_i} G^{n_i}$ mit echten Untergruppen G^{n_i} nicht erfüllt werden kann, gilt: Satz 2. Sei G endlich oder endlich erzeugt auflösbar, $G = \bigcup_{n_i} G^{n_i}$, $G^{n_i} \in E$, dann folgt $G \in E$. Die Eigenschaft E = endlich und metabelsch erfüllt somit (II) und die Umkehrung von Satz 1 gilt nicht.

KAPPE, Wolfgang : Über die Jacobi-Identität

Sei $A(g,h,x) = [[g,h],x][[h,x],g][[x,g],h]$ und $B(u,v,x) = [[u,x],[v,u]]$. Es wird ein "rechnungsfreier" Beweis für den bekannten Satz (Macdonald-Bachmuth/Lewin) gegeben, daß $A \equiv 1$ in einer Gruppe G gilt genau dann wenn $B \equiv 1$ in G. Bezeichnet L_A die Menge

- 11 -

der $x \in G$ mit $A(g,h,x) = 1$ für alle $g,h \in G$, so folgt ins~~e~~besondere, daß $L_A = L_B$ eine charakteristische Untergruppe von G ist.

KRAUSE, Günter : Ringe, deren injektive direkt unzerlegbare Moduln endlich erzeugbar sind

Ein linksnoetherscher Ring R wird Matlisring genannt, wenn jeder injektive direkt unzerlegbare R-Linksmodul von der Form $E_R(R/P)$ ist, wo P irendein Primideal von R bezeichnet.

Satz A : Ein Ring R ist genau dann ein Matlisring, dessen injektive direkt unzerlegbaren Linksmoduln endlich erzeugbar sind, wenn er ein reduzierter linksartinscher Ring ist und der Modul $E_R(R/J)/R/J$ endliche Dimension im Sinne von Goldie besitzt (J = Jacobsonradikal).

Satz B : Die folgenden Eigenschaften eines Ringes R, der modula dem Quadrat seines Jacobsonradikals kommutativ ist, sind äquivalent:

(1) R ist linksartinsch.

(2) R ist direkte Summe von endlich vielen lokalen linksartinschen Ringen.

(3) R ist linksnoethersch und seine injektiven direkt unzerlegbaren Linksmoduln sind endlich erzeugbar.

KURZWEIL, Hans: <u>Eine Klasse auflösbarer Gruppen</u>

Sei H eine endliche Gruppe mit einem fixpunktfreien Automorphismus α von Primzahlordnung p, und P eine endliche p-Gruppe mit $H\langle\alpha\rangle \subseteq \mathrm{Aut}(P)$. Dann besitzt die Gruppe $G = PH$ einen Automorhismus α von Primzahlordnung p mit folgender Eigenschaft:

(') Für alle x aus G ist $x\alpha$ ein p-Element.

Folgender Satz charakterisiert teilweise obige Gruppen:

SATZ: Sei G eine endliche Gruppe mit einem Automorphismus α von Primzahlordnung p, so daß für G, α die Voraussetzung (') erfüllt ist. Dann ist die p-Sylowgruppe G_p von G normal in G und G/G_p ist nilpotent, wenn zusätzlich eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) G ist p-auflösbar

(2) $p = 2$

(3) G_p ist abelsch und die Gruppe S_4 ist nicht "involved" in G.

In den Fällen (2) und (3) zerfällt die Gruppe $G\langle\alpha\rangle$ über G_p.

LOONSTRA, F. (Den Haag): <u>Über Teilbarkeit und Injektivität</u>

Für teilbare abelsche Gruppen gibt es einige wichtige Sätze, die teilweise die Teilbarkeit von (abelschen)Gruppen charakterisieren. Injektivität und Teilbarkeit sind in dieser Hinsicht äquivalent. Man kann den Begriff der Teilbarkeit zuerst für Gruppen verallgemeinern und die Frage beantworten,wie man Injektivität definieren soll, damit eine Analogie mit den erstgenannten Sätzen besteht. Analoge Fragen für R-Moduln.

LÜNEBURG, Heinz : Über einige Schliessungssätze

Es wurden neue Beweise für einige Sätze von Klingenberg und Pickert angegeben.

MÄURER, Helmut : Spiegelungen an Ovoiden

Eine nichtleere Punktmenge $\mathfrak{P}$ in einem mindestens 3-dimensionalen projektiven Raum $\mathfrak{R}$ nennen wir ein "Halbovoid" , falls für jeden Punkt $P \in \mathfrak{P}$ die Geraden g mit $g \cap \mathfrak{P} = \{P\}$ in einer Hyperebene liegen und diese überdecken. Sei $\mathfrak{P}$ ein Halbovoid mit der folgenden Eigenschaft: Ist P ein Punkt $\notin \mathfrak{P}$, so existiert genau eine involutorische Perspektivität τ mit P als Zentrum und $\mathfrak{P}\tau = \mathfrak{P}$. Unter diesen Voraussetzungen gilt:

Ist die Charakteristik des Koordinatenkörpers K von $\mathfrak{R}$ von 2 verschieden, so ist $\mathfrak{P}$ die Menge der isotropen Punkte bzgl. einer hermiteschen Form vom Index 1 .

Ist char K = 2 und $\mathfrak{P}$ ein Ovoid, so ist $\mathfrak{P}$ die Menge der isotropen Punkte bzgl.einer quadratischen Form vom Index 1 .

MICHLER, Gerhard : Eine Umkehrung eines Satzes von Jans und Nakayama

Satz: Ist R ein erblicher, halblokaler, noetherscher Ring so, daß jedes echte epimorphe Bild von R endliche globale Dimension besitzt, dann ist R artinsch.

NEWELL, Martin L. : On Normal Coverings

Let G be a group and g be any element of G . A pair of normal subgroups (M,N) of G such that $M \geqslant N$ and g belongs to M - N , is called a normal covering of g . We say "a group is covered by cycles" , if every non trivial element g of G has a normal covering (M,N) such that M/N is a cyclic group.

We prove:

G is a supersoluble group satisfying the minimal condition on subgroups if and only if G satisfies the minimal condition on normal subgroups and every finitely generated subgroup of G is covered by cycles.

PLAUMANN,P.(+ STRAMBACH,K.) : Zusammenhängende Quasikörper mit Zentrum

Es wurden alle topologisch zweidimensionalen lokal kompakten Quasikörper bestimmt, die die reellen Zahlen im Zentrum enthalten.

RINGEL, Claus Michael : <u>Bemerkungen zu einem Satz von Walker und Walker</u>

Ist $\underline{K}$ eine C_3-Kategorie mit Generator U und ist $\underline{M}_R$ die Modulkategorie über dem Ring $R = \underline{K}(U,U)$, so besitzt der Funktor $T = \underline{K}(U, \ )$ einen linksadjungierten Funktor S, der exakt ist. Walker und Walker haben bewiesen, daß R selbstinjektiver Ring ist, falls U injektiv ist.

Wir erhalten diesen Satz aus dem folgenden:

Ist $\underline{X}$ eine Abbildungsklasse in der Kategorie $\underline{K}$, so sei $d_r\underline{X}$ die Klasse derjenigen Abbildungen y, für die zu jeder Gleichung $xb = ay$ mit $x \in \underline{X}$ ein d existiert mit $xd = a$, $dy = b$. Dann gilt:

SATZ: Besitzt $T : \underline{K} \to \underline{L}$ einen linksadjungierten Funktor S, und ist $\underline{X}$ eine Abbildungsklasse in $\underline{L}$, so ist $d_r(\underline{X}^S) = T^{-1}d_r\underline{X}$.

SCHLEIERMACHER, Adolf: <u>Über einen Satz von Lüneburg und Yaqub</u>

In Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Lüneburg und Yaqub läßt sich folgender Satz beweisen:

Sei $\mathfrak{P}$ eine projektive Ebene, G die Gruppe aller Projektivitäten einer Geraden g auf sich und G_P der Stabilisator eines Punktes $P \in g$. Genau dann besitzt G_P einen regulären Normalteiler, wenn $\mathfrak{P}$ Moufangebene ist. Ein ähnlicher Satz liefert im affinen Fall eine Charakterisierung der Translationsebenen.

SCHMIDT, Roland : Endliche Gruppen mit distributivem Zentralisatorverband

Sei G eine endliche Gruppe und $\mathcal{L}(G)$ die Menge aller Zentralisatoren von Untergruppen von G . Da der Durchschnitt zweier Zentralisatoren wieder ein Zentralisator ist, ist $\mathcal{L}(G)$ mit der Inklusion als $\leq$ ein Verband.
Es gilt der folgende

SATZ. $\mathcal{L}(G)$ ist genau dann distributiv, wenn G abelsch (also $\mathcal{L}(G)$ trivial)ist.

TAMASCHKE, Olaf : Eine Verallgemeinerung des Zweiten Isomorphiesatzes

Sei T eine Schur-Halbgruppe über der Gruppe B .
Es seien H und K Untergruppen von G derart, daß $HK = KH$. Ferner seien K und HK beides T-Untergruppen von G (d.h. sie seien Vereinigungen von T-Klassen von G). Dann induziert T eine Schur-Halbgruppe $(T_{HK})_{HK/K}$ über HK, die (bezüglich der Komplexmultiplikation) erzeugt wird von den Mengen $K\tau K$, wobei τ alle diejenigen T-Klassen von G durchläuft, die in HK enthalten sind. Es wird gezeigt, daß die Mengen $K\tau K \cap H$, wobei τ dieselben T-Klassen wie zuvor durchläuft, (bezüglich der Komplexmultiplikation) eine Schur-Halbgruppe Σ über H erzeugt, daß $\varphi : Y \longrightarrow Y \cap H$ $(Y \varepsilon (T_{HK})_{HK/K})$ ein Isomorphismus der Schur-Halbgruppe $(T_{HK})_{HK/K}$ über HK auf die Schurhalbgruppe Σ über H ist, und daß $\gamma : X \to XK$ $(X \varepsilon \Sigma)$

die Umkehrabbildung von φ ist. Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, daß eine Schur-Halbgruppe über einer "großen" Gruppe HK durch eine isomorphe Schur-Halbgruppe über einer "kleineren" und daher häufig auch einfacher gebauten Gruppe H ersetzt werden kann. Für $T = G$ und $K \trianglelefteq G$ geht der Satz in den Zweiten Isomorphiesatz der Gruppentheorie über.

WILLE, Rudolf : Primitive Klassen von Verbänden

Eine endliche Teilmenge P eines Verbandes L heiße primitiv, wenn in L ein Quotient a/b mit $a \neq b$ existiert derart, daß für alle $p,q \in P$ mit $p \not\geq q$ a/b schwach projektiv zu $p \vee q/p$ ist.

SATZ: H sei eine endliche, halbgeordnete Menge. Dann bilden alle Verbände eine primitive Klasse, die keine primitive Teilmenge isomorph zu H besitzen.

ZUSATZ: Jede endliche Teilmenge eines subdirekt irreduziblen Verbandes ist primitiv.

Es wurden Anwendungen des Satzes auf Fragen über primitive Klassen von Verbänden vorgetragen.

C. M. RINGEL (Tübingen)

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft