MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

Tagungsbericht 1/1970

Gruppen und Geometrie
2.1. bis 6.1.1970

Traditionsgemäß waren die Tagungsleiter P. Dembowski und H. Salzmann bestrebt, die in Europa wirkenden Mathematiker aus dem Baerschen Kreis und deren Schüler zusammenzuführen, um ihnen erneut Gelegenheit zu geben, Erfahrungen auszutauschen, Ergebnisse zu berichten und gemeinsam interessierende Probleme zu diskutieren. Es sind auch Gäste gekommen, die dem Baerschen Kreise nahestehen und deren Arbeiten insbesondere auf die Wechselwirkungen zwischen Geometrie, Gruppentheorie und Topologie abzielen.

In den Vorträgen wurden im einzelnen Fragen aus der Gruppentheorie, Ringtheorie, Topologie, Geometrie und topologischer Geometrie behandelt. Es zeigte sich dabei, daß vielfach Anregungen früherer Tagungen bei vielen Vortragenden zu schönen Ergebnissen ausreiften. Auch die mathematische Verwandtschaft der Teilnehmer wurde in den Vorträgen manifest; so gingen etwa die Untersuchungen der Herren Fleischer und Timmesfeld von Ergebnissen von B. Fischer aus und Herr Betten ging auf Fragen ein, die vom Herrn Breitsprecher aufgeworfen worden sind. Die nach den Vorträgen einsetzenden, lebhaften Diskussionen wurden in kleinerem Kreise auch außerhalb der Vortragszeiten fortgesetzt.

Ein weiterer Zweck der Tagung war es, besonders begabten Diplomanden Gelegenheit zu geben, über ihre ersten Ergebnisse vor einem größeren Publikum zu sprechen und erfahrene Mathematiker zu kontaktieren.

Durch den Vortrag von Herrn Felgner wurden auch grundlagentheoretische Aspekte ins Blickfeld gerückt.

Gefördert durch
DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Teilnehmer:

Bedürftig, Th.,	Tübingen
Baer, R.,	Zürich (Schweiz)
Bender, H.,	Mainz
Betten, A.,	Tübingen
Betten, D.,	Tübingen
Birkenstock, H.-J.,	Tübingen
Bitsch, G.,	Kiebingen
Blödner, R.,	Neu Isenburg
Breitsprecher, S.,	Gießen
Buchanen, Th.,	Tübingen
Dembowski, P.,	Tübingen
Erbach , D.W.,	Tübingen
Felgner, U.,	Utrecht (Niederlande)
Fischer, B.,	Warwick (England)
Fleischer, K.-J.,	Frabkfurt
Hahn, S.,	Tübingen
Heineken, H.,	Erlangen
Held, D.,	Wiesbaden
Koch, H.,	Tübingen
Kurzweil, H.,	Tübingen
Lemmens, P.W.H.,	Oxford (England)
Lüneburg, H.,	Mainz
Maetzke, J.,	Konstanz
Mayer, H.-M.,	Lüdenscheid
Pfrommer, F.,	Tübingen
Pieper, I.,	Hamburg
Polley, C.,	Tübingen
Prieß, S.,	Tübingen
Prohaska, O.,	Tübingen
Reiner, S.,	Tübingen
Rinderspacher, J.,	Pfrondorf
Ringel, C.M.,	Tübingen
Schleiermacher, A.,	Tübingen
Schmidt, R.,	Kiel
Schulz, R.-H.,	Tübingen
Seib, M.,	Tübingen
Strambach, K.,	Tübingen
Timmesfeld, F,G.,	Coventry (England)
Walter, H.,	Frankfurt
Weise, G.,	Tübingen

Vortragsauszüge:

Thomas BEDÜRFTIG: Hilbertscher Basissatz für Gruppenringe und ein Analogon zum Hilbertschen Nullstellensatz für Gruppenringe

Satz 1: Der Gruppenring einer polyzyklischen Gruppe über einem rechtsnoetherschen Ring ist rechtsnoethersch.
Der Beweis wird nur angedeutet. Er besteht im Wesentlichen in einer "Übersetzung" des Beweises des Hilbertschen Basissatzes und Induktion.

Satz 2: Sei S ein kommutativer Jacobsring, $R = S\Gamma$ der Gruppenring der polyzyklischen Gruppe Γ über S. Ist dann J/P bzw. L/P das Jacobson - bzw. das Primradikal von R/P, Z das Zentrum von R, so ist

$$J \cap Z = L \cap Z$$

für jedes Ideal P von R.
Zu diesem Satz führt eine Einteilung der Moduln über einem nullteilerfreien Hauptidealring in Unterklassen. Ein Ergebnis dieser Unterteilung ist das zentrale
Lemma 9 : Ist M ein endlich erzeugter Modul über dem Gruppenring einer polyzyklischen Gruppe Γ über einem halbeinfachen, nullteilerfreien Hauptidealring J, so ist kein J-Untermodul von M J-isomorph dem Quotientenkörper von J.

H. BENDER: Allgemeine Klassifikationsprobleme

Es wurden gewisse maximale Untergruppen H einer endlichen einfachen Gruppe G im Zusammenhang mit einer Eigenschaft (✻) von Involutionen einer endlichen Gruppe X diskutiert:

$H \geq C_G(Z)$, für eine Involution t in G, und außerdem ist die Anzahl der Primzahlen p mit $[Z, O_p(H)] \neq 1$ maximal.

Die Involution Z der endlichen Gruppe X genügt der Bedingung

(*), falls $[U,Z] \subseteq O(X)$ für jede $C_G(t)$ - invariante Untergruppe ungerader Ordnung U von X gilt.

D. BETTEN: Geometrien und Faserungen

Einige Bemerkungen zu folgender Frage: Wie läßt sich der Isomorphietyp einer topologischen projektiven Ebene bündeltheoretisch charakterisieren?

S. BREITSPRECHER: Topologische Struktur 2-dimensionaler Ebenen

Zusammenfassung:

Eine projektive Ebene heißt eine topologische Ebene, wenn sowohl ihre Punktmenge X als auch ihre Geradenmenge Y Topologien tragen und die geometrischen Operationen des Verbindens zweier Punkte sowie des Schneidens zweier Geraden stetige Abbildungen sind; sie heißt eine zweidimensionale projektive Ebene, wenn X ein kompakter Raum der induktiven Dimension 2 ist. Der Raum der Fahnen, d.h. der inzidenten Punkt-Geraden-Paare der reellen projektiven Ebene P sei mit F bezeichnet, F(x) sei das Büschel der mit dem Punkt x inzidenten Geraden.

Es wurde gezeigt, daß man jede zweidimensionale projektive Ebene E durch die folgende "Deformation" der klassischen reellen Ebene P gewinnen kann: Als Punkt- und Geradenraum von E nimmt man den Punkt- und den Geradenraum von P und als Inzidenz eine Relation von der Form $(x,f(x)y) \in F$, wobei f eine stetige Abbildung des Punktraums X von P in die mit der "kompakt-offenen" Topologie versehene Autohomöomorphismengruppe H(X) von X. Damit eine Abbildung $f: X \longrightarrow H(X)$ auf diese Weise eine projektive Ebene definiert, ist es notwendig und hinreichend, daß für je zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in X$ der Durchschnitt $[f)x_1)^{-1}(F(x_1))] \cap [f(x_2))]$ nur ein Element enthält.

Ulrich FELGNER: Die Unabhängigkeit eines Satzes von Birkhoff-Tarski-Iwasawa vom Ordnungstheorem

G. Birkhoff, A. Tarski und Iwasawa haben etwa 1947 den folgenden Satz bewiesen:

(FO) "Jede freie Gruppe hat eine zulässige Totalordnung"

Wir haben uns die Frage gestellt, ob dieser Satz (der ja aus dem Booleschen Primideal-Theorem folgt) aus dem Ordnungstheorem

(O) "Jede Menge kann totalgeordnet werden"

ableitbar ist. Es wurde mittels der Cohenschen Forcing-Methode gezeigt, daß in der ZF-Mengenlehre (FO) nicht aus (O) folgt:

Satz: Jedes abzählbare Standard-Modell von ZF + V =L kann zu einem abzählbaren Standard-Modell von ZF + (O) + $\neg$(FO) erweitert werden.

In der Erweiterung gilt ferner nicht, daß jede Menge in die Potenzmenge einer Ordinalzahl eingebettet werden kann. Damit wurde ein Problem von W. Kinna - K. Wagner (Fund. Math.) und A. Mostowski (Coll.Math.) gelöst.

B. FISCHER: T- Untergruppen

Sei G eine endliche Gruppe, die von einer Klasse D konjugierter Elemente erzeugt wird; sei G' einfach, $Z(G) = 1$, sei $o(xy) \leq 3$ für x,y D. Sei $T = \{xy=yx \neq 1 / x,y \in T\}$. Sei U eine T-Untergruppe von G, d.h. $U = \langle U \cap T \rangle$. Sei

$$\sqrt{U} = \langle x \in D / \text{ es gibt } y \in D \quad xy \in U \cap T \rangle .$$

Ist $U \simeq A_6$, so ist $\sqrt{U}/N \simeq \Sigma_6$ für einen auflösbaren Normalteiler N von $\sqrt{U}$ oder $\sqrt{U} \simeq O^-(6,3)$.

K.J.FLEISCHER: 3,5 -Transpositionen

Desinition. Sei 6 eine Gruppe; N eine endliche Menge natürlicher Zahlen ≥ 3. Sei $D \subseteq G$ eine Menge von Involutionen. Dann heißt

D eine Menge von $\{N$-Transpositonen von 6, wenn gilt

(i) $\langle D\rangle = G$; $D^6 = D$

(ii) Sind $d,e \in D$, so gilt $d\,e = e\cdot d$ oder $o(d e) \in N$.

<u>Satz:</u> Die Transvektionen aus $O^{\pm}(2n, 2^m)$ oder $sp(n,2^{2m})$ oder $su(n,2^{2m})$ sind eine Menge von N-Transpositionen von diesen Gruppen, ausgenommen $O^+(4,2)$ und $SU(3,2^2)$. Dabei besteht N aus den Teilern $\neq 1$ von $2^m \pm 1$.

Die Gruppen $O^{\pm}(2n,4)$; $Sp(2n,4)$ und $SU(n,4^2)$ werden demnach von $\{3,5\}$ -Transpositionen erzeugt. Es gilt folgende Charakterisierung:

<u>Satz:</u> Es ist $G \simeq Sp(2n,4)$, wenn

(i) $G = \langle D\rangle$, wobei eine Konjugiertenklasse von $\{3,5\}$-Transpositionen ist, $\mathcal{Z}(G)=1$.

(ii) Sind $c,d,x \in D$ mit $cd=dc$ und $o(cx)=o(dx)=5$, so ist $o(x^c \cdot x^d) \neq 5$.

(iii) Sei $d \in D$ und $c = \langle \mathfrak{C}_D(d)\rangle$. Dann ist $|\mathcal{Z}(c)| = 4$ und $|\mathcal{Z}(c) \cap D| = 3$.

(iv) Sei $M_d = \mathbb{O}_2(c)$. Dann ist C das semidirekte Produkt von M_d mit M_d, wobei $M_d \simeq Sp(2n-2,4)$ und $H_d \cap D$ die Menge der Transvektionen aus H_d ist.

(v) Sei $e \in H_d \cap D$. Dann ist $|e^{M_d}| = 4$.

H.HEINEKEN: <u>Gruppen, deren sämtliche zyklische Untergruppen subnormal vom Defekt zwei sind.</u>

Die im Titel angegebene Klasse von Gruppen enthält die Klasse der zweiengelschen Gruppen und ist enthalten in der Klasse der dreiengelschen Gruppen. Es gilt genauer der folgende Satz: Sind alle zyklischen Untergruppen der Gruppe G subnormal vom Defekt zwei, so gilt $x \circ (y^{(2)} \circ z) = 1$ für alle x,y,z von G, und daher ist $G_5 = 1$ und $(G_4)^3 = 1$.

Besitzt G ausserdem Elemente unendlicher Ordnung, so ist G sogar zweiengelsch (und $G_4 = 1$ und $(G_3)^3 = 1$).

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Dieter HELD: Kennzeichnungen endlicher einfacher Gruppen

Unter anderem wurde ein Beweis des folgenden Satzes diskutiert: Es sei G eine endliche, einfache, nichtabelsche Gruppe, und es sei t eine Involution aus dem Zentrum einer S_2-Untergruppe von G. Ist C(t) eine Erweiterung einer extra-speziellen Gruppe der Ordnung 2^7 durch $L_2(7)$, so ist G isomorph zu M_{24}, $L_5(2)$ oder HHMKT, wobei HHMKT die einfache Gruppe der Ordnung 4030387200 bezeichnet.

Hartmut KOCH: $C(X) \subseteq \mathbb{R}^X$

Mit Hilfe einer kanonischen eineindeutigen und umkehrbaren Beziehung zwischen den abgeschlossenen Teilmengen eines vollständig regulären ($T_{3 1/2}$-)Raumes und den abgeschlossenen Idealen in C(x), versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, $C(x) \subseteq \mathbb{R}^X$, läßt sich in einfacher Weise eine Dualitätstheorie für $T_{3\frac{1}{2}}$-Räume herleiten; der Funktor C, der jedem $T_{3 1/2}$ - Raum einen Funktionenring in der Topologie der punktweisen Konvergenz jedem Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ einen induzierten stetigen Ringhomomorphismus zuordnet, ist kontravariant treu bezüglich der Objekte un der Morphismen, darüber hinaus ist die Kategorie der Funktionenringe eine volle Unterkategorie der kommutativen topologischen Ringe mit 1. Eine Charakterisierung dieser Funktionenringe gelingt mit $\gamma(c(X)) = \mathbb{R}^X$, der Vervollständigung von C(X).

P.W.H. LEMMENS: Eine Bemerkung über den Join von Faserungen

Let $f_i : E_i \longrightarrow B$ $(i = 0, 1)$ be two (continuous) maps. Then one can construct the join

$$f_o * f_1 : E_o * E_1 \longrightarrow B$$

as follows. Let E_oE_1 denote the fibered product of f_o and f_1, with natural projections $p_i : E_0E_1 \longrightarrow E_i$. Then $E_0 * E_1$ (as a set) is formed from the union of E_0, E_1 and $E_0E_1 \times I$ $(I = [0,1])$ by identifying (y,i) with $p_i(y)$ $(y \in E_0E_1,\ i = 0, 1)$. And $f_0 * f_1$

is defined by $f_0 * f_1 \ (y,t) = f_0(y) = f_1(y)$ if $y \in E_0 E_1$ and $t \in (o,1)$ and $f_0 * f_1 . (e_i) = f_i \ (e_i)$ if $e_i \in E_i$. Now the question arises whether the join of two fibrations is again a fibration. This turns out to be true if we give $E_0 * E_1$ the strong topology of (2) instead of the more usual identification topology. In fact, I proved:

a. The join of two Hurewicz fibrations is a Hurewicz fibration.

b The join of two fiber bundles is a fiber bundle.

References: (1) I.M. James, Annals of Math., 89 (1969), pp 359 -390.
(2) J. Milnor, Annals of Math., 63 (1956), pp. 430 -436.

Heinz LÜNEBURG: Eine Kennzeichnung der Papposschen projektiven Räume.

Es sei V ein Vektorraum über K und U und W seien zwei Unterräume von V mit $V = U \oplus W$. Ferner sei G (U,W) die Gruppe aller Kollineationen des Unterraumverbandes L(V) von V, die U und W punktweise festlassen. Sind die Ränge von U und W beide mindestens gleich 2, so ist G (U,W) zur multiplikativen Gruppe des Zentrums von K isomorph. Ist $\mathrm{Rg}\ V \geq 4$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) L(V) ist papposch. (b) Sind U und W Unterräume von V mit $V = U \oplus W$ und $\mathrm{Rg}\ U \geq 2 \leq \mathrm{Rg}\ W$, sind ferner P und Q Punkte mit $P \subseteq U$ und $Q \subseteq W$, so ist G(U,W) auf der Menge der von P und Q verschiedenen Punkte von $P + Q$ transitiv. (c) Es gibt zwei Unterräume U und W von V mit $V = U \oplus W$ und $\mathrm{Rg} \geqq U \geqq 2 \leqq \mathrm{Rg}\ W$, sowie zwei Punkte P und Q mit $P \subseteq U$ und $Q \subseteq W$, so daß G(U,W) auf der Menge der von P und Q verschiedenen Punkte von $P + Q$ transitiv ist.

C.-M. RINGEL: Reflexive Unterkategorien

Ist K eine Kategorie mit Pushouts, so entsprechen die reflexiven Unterkategorien bijektiv den Abbildungsklassen $\mathcal{E}$ in K, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) $\mathfrak{C}$ ist Codiagonalisierungsklasse, d.h., es gibt eine Abbildungsklasse $\mathfrak{X}$, so daß $\mathfrak{C}$ genau die Klasse derjenigen Abbildungen $c \in K$ ist, für die es zu jeder Gleichung $cb = ax$, $x \in \mathfrak{X}$, ein $d \in K$ mit $cd = a$, $dx = b$ gibt.

(b) Es gibt genügend $\mathfrak{C}$-injektive Objekte, d.h., zu jedem Objekt X gibt es eine Abbildung $x : X \longrightarrow \bar{X}$ in C, derart, daß $\bar{X}$ $\mathfrak{C}$-injektiv ist, also zu zwei Abbildungen $c : C \longrightarrow D$ in $\mathfrak{C}$ und $a : C \longrightarrow \bar{X}$ in K ein d existiert mit $cd = a$.

(c) Liegen zwei der Abbildungen von $c = c_1 c_2$ in $\mathfrak{C}$, so auch die dritte.

Dabei wird die Abbildungsklasse $\mathfrak{C}$ die volle Unterkategorie der $\mathfrak{C}$-injektiven Objekte zugeordnet.

R. SCHMIDT: <u>Über die Ordnung einer auflösbaren Permutationsgruppe</u>

<u>Satz.</u> Ist G eine auflösbare Permutationsgruppe vom Grade r, so ist $|G| \leq a^{r-1}$ mit $a = \sqrt[3]{24}$.

Der angegebene Satz verbessert Abschätzungen von P. Neumann und G. Dickenson. Die angegebene Schranke wird für $r = 4^i$ $(i=1,2,\ldots)$ angenommen wie das Beispiel des i-fachen Kranzproduktes der S_4 mit sich zeigt.

K. STRAMBACH: <u>Rechtsdistributive Quasisgruppen auf 1-Mannigfaltigkeiten</u>

Eine Quasisgruppe D heißt rechtsdistributiv, wenn für beliebige Elemente $a, b, c \in D$ die Beziehung $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ (b \circ c)$ gilt. Trägt die Quasisgruppe D eine Topologie, so nennen wir sie eine semitopologische Quasisgruppe. Es wurden alle semitopologischen rechtsdistributiven Quasisgruppen bestimmt, die zu einer 1-Mannigfaltigkeit homöomorph sind; sie sind alle zweiseitig distributiv und homöomorph zu $\mathbb{R}$.

F.G. TIMMESFELD: $\{3,4\}$-Transpositionen in endlichen Gruppen

Eine Konjugiertenklasse D von Involutionen der endlichen Gruppe G, heißt Konjugiertenklasse von $\{3,4\}$ -Transpositionen, falls für alle $d,\ e \in D$ folgt $o(de) \in \{1,2,3,4\}$. Nach Fischer kann man annehmen, daß 4 als Ordnung eines solchen Produktes vorkommt. Sei Außerdem $(de)^2 \in D$, falls $o(de) = 4$ ist. Nach Thompson haben alle Chevalley und Steinberggruppen über $GF(2)$ diese Eigenschaften. Wir beweisen im Folgenden unter diesen Vorraussetzungen:

Satz. Ist $C_G(d)$ keine maximale Untergruppe und $O_2(G) = 1$, so ist $G/Z(G)$ isomorph zu $GL(n,2)$, $n \geq 3$.

Satz. Ist $ed \in D$, falls $o(de) = 2$ ist, so ist $G/Z(G)$ isomorph zu $GL(3,2)$ $U_3(3)$ oder ${}^3D_4(2)$.

K.Strambach (Tübingen)