MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT OBERWOLFACH

T a g u n g s b e r i c h t 2/1970

Große Kardinalzahlen

11.1. bis 17.1.70

Ziel des Seminars war es, die Anwendungen des Ramseyschen Satzes in der Mengenlehre und Modelltheorie im Detail durchzuarbeiten und Beweisvarianten zu betrachten.- Für die gemeinsame Arbeit während der Seminartagung, die unter der Leitung von G.H. Müller (Heidelberg) stand, war die Atmosphäre des Oberwolfacher Instituts eine ideale - und notwendige - Voraussetzung.

Teilnehmer

K. Bayer, Heidelberg

K. Gloede, Heidelberg

G. Klaas, Heidelberg

J. Maier, Heidelberg

G.H. Müller, Heidelberg

D. Niefnecker, Heidelberg

G. Rutsch, Heidelberg

D. Siefkes, Heidelberg

V. Weispfenning, München

Gefördert durch DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft

Vortragsauszüge

D. NIEFNECKER: Der Satz von Ramsey

Im folgenden wird das Axiomensystem der Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel (ZF) in einer der üblichen Formulierungen vorausgesetzt. Ordinalzahlen werden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet.

$\varkappa, \lambda, \mu$ und ν stehen für Kardinalzahlen, wobei $\varkappa, \lambda$ und μ stets unendlich sind. n,m sind natürliche Zahlen.

$[X]^n \underset{def}{=} \{x \subseteq X \mid \bar{\bar{x}} = n\}$ Menge der n-stelligen,

$[X]^{<\omega} \underset{def}{=} \{x \subseteq X \mid \bar{\bar{x}} < \omega\}$ Menge der endlichen Teilmengen von X.

Ist $f : [X]^n \to m$ eine Zerlegung von $[X]^n$ in m disjunkte Mengen, so heißt $Y \subseteq X$ homogen für f genau dann, wenn $f''[Y]^n$ (das Bild von $[Y]^n$ unter f) genau ein Element enthält; entsprechend heißt im Falle einer Zerlegung $f : [X]^{<\omega} \to \nu$ $Y \subseteq X$ homogen für f genau dann, wenn Y homogen ist für alle $f_n = f_n = f \restriction [X]^n$, $n < \omega$.

$\varkappa \to (\alpha)^n_m$ (bzw. $\varkappa \to (\alpha)^{<\omega}_\nu$) genau dann, wenn für jedes $f : [\varkappa]^n \to m$ (bzw. $f : [\varkappa]^{<\omega} \to \nu$) ein $X \subseteq \varkappa$ existiert, das homogen für f und vom Ordnungstypus α ist.

In dieser Schreibweise besagt der Satz von Ramsey:

$$\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_m .$$

Der Beweis (vgl. Ramsey : On a Problem of Formal Logic, Proc. London Math. Soc. 30 (1929-30)) erfolgt durch Induktion nach n und m, wobei im Fall $m = n = 2$ die Beweismethode aufgezeigt wird.

Anwendung: Satz von Ehrenfeucht - Mostowski

T sei eine Theorie in der Sprache des Prädikatenkalküls erster Stufe, T habe ein unendliches Modell. $\langle X, < \rangle$ sei eine (linear) geordnete Menge. Dann existiert ein Modell $\mathfrak{A}$ von T, für das

$\langle X,<\rangle$ homogen ist, d.h. ist φ eine Formel der Sprache von T mit n freien Variablen $x_1<\ldots<x_n$, $x_n'<\ldots<x_n'$, wobei $x_i, x_i' \in X$, dann gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi\,[x_1,\ldots,x_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi\,[x_1',\ldots,x_n'].$$

Der Beweis erfolgt mittels Kompaktheitssatz; die dabei betrachteten endlichen Formeln führen zu einer Zerlegung von $[A]^n$, wobei A der Individuenbereich eines unendlichen Modells von T ist, in endlich viele Äquivalenzklassen, was die Anwendung des Ramseyschen Satzes ermöglicht.

J MAIER: Erdös'sche Zahlen

Untersucht werden Zahlen $\varkappa,\lambda$, auf die sich der Ramsey'sche Satz übertragen läßt.

Jeder Zerlegung von $[X]^2$ in ν disjunkte Teilmengen wird ein ν-stelliger Baum - d.h. eine teilweise geordnete Menge $(P,<)$ von Folgen mit Werten in ν; diese Menge hat ein 1. Element und ihre Anfangssegmente sind wohlgeordnet, - zugeordnet.

Damit beweist man den Satz:

Seien ν,λ gegeben und $\nu<\mathrm{cf}\lambda$.- Falls jeder ν - stellige Baum der Mächtigkeit $\varkappa$ eine linear geordnete Teilmenge der Mächtigkeit λ enthält, so folgt

$$\varkappa \rightarrow (\lambda)^2_\nu$$

Ist λ regulär und $\nu = 2$, so gilt die Umkehrung des obigen Satzes, insbesondere erhält man das negative Ergebnis

$$2^\varkappa \not\longrightarrow (\varkappa^+)^2_2$$

Ferner wird gezeigt, daß jedes $\varkappa > \aleph_0$ mit der Eigenschaft

$\varkappa \longrightarrow (\varkappa)^2_2$ stark unerreichbar ist.

G. RUTSCH: Strukturen mit Mengen von "nichtunterscheidbaren" Elementen.

(Vgl. J. silver "Some Applications of Model Theory in Set Theory" (Thesis))

Für Bezeichnungsweisen vergleiche auch die vorstehenden Vortragsauszüge).

Für das Folgende können wir uns (nach Skolem) auf Formelmengen und auf Strukturen beschränken, in denen Existenzaussagen auch nennbare Beipsiele besitzen.

$\mathfrak{A} = \langle A, R_{i\in I}\rangle$ sei eine Struktur der Sprache $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$; $\phi^{\mathfrak{A}}$, $(t^{\mathfrak{A}})$ seien die Belegungen von Formeln ϕ (Termen t) aus $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ in $\mathfrak{A}$. Für $X \subseteq A$ sei $H_{\mathfrak{A}}(X) = \{t^{\mathfrak{A}}[x_1,\dots,x_n] \mid t\in\mathfrak{L}(\mathfrak{A}); x_1,\dots,x_n \in X\}$ und $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}(X)$ die zu $H_{\mathfrak{A}}(X)$ als Individuenbereich gehörige (elementare) Substruktur von $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{X} = \langle X, <\rangle$ sei eine geordnete Struktur; mit $\vec{x}^{(n)}$ werde ein aufsteigendes n-Tupel von X bezeichnet.

$\mathfrak{X}$ heißt homogen (bzw. Menge von nichtunterscheidbaren Elementen) für $\mathfrak{A}$, wenn für alle Formeln $\phi\in\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ gilt: $\models_{\mathfrak{A}} \phi\,[\vec{x}^{(n)}] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} \phi\,[\vec{x}'^{(n)}]$. Sei $\mathfrak{X}$ homogen für $\mathfrak{A}$; dann sei $F_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}) = \{\phi \mid \phi\in\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ und für alle $\vec{x}^{(n)} \models_{\mathfrak{A}} \phi\,[\vec{x}^{(n)}]\}$. $\varkappa(\Sigma,\mathfrak{X},\mathfrak{A})$ besage (i) $\mathfrak{X}$ homogen für $\mathfrak{A}$, (ii) $F_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}) = \Sigma$,
(iii) $\mathfrak{H}_{\mathfrak{A}}(X) = \mathfrak{A}$.

Es werden die folgenden Sätze I,II nach Silver und das Lemma und Satz III nach R. Jensen "Große Kardinalzahlen", Ausarbeitung der Vorträge in Oberwolfach 27.3/3.4.67, bewiesen:

I. Seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ Ordnungen, f ein Monomorphismus von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{X}'$ und gelte $\varkappa(\Sigma,\mathfrak{X},\mathfrak{A})$, $\varkappa(\Sigma,\mathfrak{X}',\mathfrak{A}')$, dann läßt sich f eindeutig zu einem elementaren Monomorphismus von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}'$ fortsetzen.

II. Wenn es ein $\mathfrak{A}$ mit einem unendlichen $\mathfrak{X}$ homogen für $\mathfrak{A}$ gibt, dann gibt es für jede unendliche Ordnung $\mathfrak{X}'$ eine Struktur $\mathfrak{B}$

mit $\varkappa(F_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{X}'),\mathfrak{X}',\mathfrak{B})$ und $F_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{X}') = F_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X})$.

<u>Lemma</u>: Sei α Limeszahl, $\lambda<\varkappa$, und $\varkappa$ minimal mit $\varkappa \to (\alpha)_2^{<\omega}$, dann $\varkappa \to (\alpha)_{2^\lambda}^{<\omega}$.

III. Sei $\mathfrak{A} = \langle A, R_{\xi \leq \lambda < \varkappa}\rangle$ eine Struktur, $C \subseteq A$, $\bar{\bar{C}} = \varkappa$, C wohlgeordnet durch $\varkappa$; wenn $\varkappa \to (\alpha)_{2^\lambda}^{<\omega}$, dann gibt es $X \subseteq C$, vom Ordnungstypus α, so daß $\mathfrak{X}$ homogen für $\mathfrak{A}$. (Vgl. Prämisse von Satz II).

G. KLAAS: <u>Strukturen mit hyperhomogenen Mengen</u>

(Für Bezeichnungen vgl. auch die vorstehenden Vortragsauszüge)

Sei $\mathfrak{X} = \langle X,<\rangle$ homogen für $\mathfrak{A}$. $F_{\mathfrak{A}}(X)$ (und auch $\mathfrak{X}$ für $\mathfrak{A}$) heiße hyperhomogen, wenn $\varkappa(F_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}),\mathfrak{X},\mathfrak{A})$, ein Satz, der ausdrückt, daß $<$ eine lineare Ordnung ist, zu $F_{\mathfrak{A}}(X)$ gehört, und für alle Terme $t \in \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ die folgenden Formeln zu $F_{\mathfrak{A}}(X)$ gehören:

(1) $\neg\, v_n \leq t\,(v_o,\dots,v_{n-1})$

(2) $t(v_o,\dots,v_{n-1},v_n,v_{n+1},\dots,v_m) \leq v_n \to$

(3) $t(v_o,\dots,v_{n-1},v_n,v_{n+1},\dots,v_n) = t(v_o,\dots,v_{n-1},v_n,v_{m+1},\dots,v_{2m-n})$
$t(v_o,\dots,v_{n-1},v_{n+1},\dots,v_m) > v_n \to t(v_o,\dots,v_{n-1},v_{n+1},\dots,v_n) \geq v_{n+1}$

(4) $v_o < v_1$

(wobei für Einsetzungen in die Variablen nur aufsteigende Folgen von Elementen aus X zugelassen seien.)

Semantisch besagen (1) und (2) zusammen: Für X' echtes Anfangssegment ohne Maximum von X ist $H_{\mathfrak{A}}(X')$ Anfangssegment von $H_{\mathfrak{A}}(X)$; insbesondere liegt X cofinal in $H_{\mathfrak{A}}(X)$.

(3) besagt für $C \subseteq X$: sup C(in $\mathfrak{X}$) = sup C(in $\mathfrak{A}$).

Im folgenden heiße $\mathfrak{A} = \langle A,<\dots\rangle$ zum Teil wohlgeordnet durch α, wenn ein Teil von A durch α wohlgeordnet ist.

In Analogie zu Satz I (vgl. vorst. Referat) gilt:

1. Seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ Ordnungen ohne Maximum, f ein Monomorphismus von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{X}'$, wobei f, beschränkt auf X, Anfangssegment von X sei, und gelte $\varkappa(\Sigma,\mathfrak{X},\mathfrak{A}),\varkappa(\Sigma,\mathfrak{X}',\mathfrak{A}')$, $F_{\mathfrak{A}}(X)$ hyperhomogen, dann läßt sich f eindeutig zu einem elmentaren Monomorphismus g von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}'$ fortsetzen, wobei g, beschränkt auf A, Anfangssegment von A' ist.
2. (vgl. auch II und III des vorstehenden Referates).
   Sei $\mathfrak{A} = \langle A, R_\xi, \xi \leq \lambda < \varkappa \rangle$ zum Teil wohlgeordnet durch $\varkappa$, $\alpha > \omega$ eine Limeszahl, $\varkappa$ minimal mit $\varkappa \to (\alpha)^{<\omega}_{2^\lambda}$, dann existiert ein für $\mathfrak{A}$ hyperhomogenes $\mathfrak{X}$.
3. Sei $\mathfrak{X}=\langle x,<\rangle$ (ohne Maximum) hyperhomogen für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ zum Teil wohlgeordnet, $\lambda \geq \omega_1 \cup \overline{\overline{\mathfrak{L}(\mathfrak{A})}}$, dann ist das λ-te Element von X das λ-te Element des wohlgeordneten Teils von $\mathfrak{A}$.
4. Sei $\mathfrak{A}$ wie in der Prämisse von 2, $\alpha \geq \omega_1$ Limeszahl, $\varkappa$ minimal mit $\varkappa \to (\alpha)^{<\omega}_{2^\lambda}, \lambda < \mu_0$, dann existiert eine Folge $\mathfrak{A}_\mu$, $\mu \geq \mu_0$ von Strukturen elementar äquivalent zu $\mathfrak{A}$, mit folgenden Eigenschaften:
   a) für $\mu_0 \leq \mu < \mu'$ ist $\mathfrak{A}_\mu$ elementares Subsystem von $\mathfrak{A}_{\mu'}$,
   b) der wohlgeordnete Teil von $\mathfrak{A}_\mu$ hat den Ordnungstyp μ,
   c) für $\mu_0 \leq \mu < \mu'$ ist $\mathfrak{A}_\mu$ Anfangssegement von $\mathfrak{A}_{\mu'}$,
   d) Sei $\lambda' \leq \overline{\overline{\alpha}}$; jeder universelle Satz der unendlichen Sprache $\mathfrak{L}_{\lambda'}(\mathfrak{A})$, der in $\mathfrak{A}$ gilt, gilt in jedem $\mathfrak{A}_\mu\gamma$.

D. NIEFNECKER: <u>Anwendung auf die konstruktible Hierarchie</u>

Vorausgesetzt sei die Existenz eines $\varkappa$, so daß $\varkappa \to (\aleph_1)^{<\omega}$.
Als Anwendung der Theorie, die in den vorhergegangenen Vorträgen entwickelt worden ist, wird die Existenz einer hyperhomogenen Klasse für die Gödelsche Klasse L der konstruktiblen Mengen gezeigt.

Als Folgerungen ergeben sich die Aussagen:

(I) $\langle L_\lambda, \in\rangle \prec \langle L_{\lambda'}, \in\rangle$ für $\aleph_0 < \lambda \leq \lambda'$

(II) In der ZF-Sprache läßt sich eine Wahrheitsdefinition für $\langle L, \in\rangle$ definieren, d.h. es gibt eine $\in$-Formel θ, so daß unter der Definition

$$\langle L, \in\rangle \models \varphi[x] \longleftrightarrow \theta\ (\varphi, x)$$

(wobei $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i \in L$, φ(Gödelnummer einer) Formel der ZF-Sprache) die üblichen rekursiven Erfüllbarkeitsbedingungen nachweisbar sind.

(III) Es gibt eine abgeschlossene und in On (Klasse der Ordinalzahlen) konfinale Teilklasse $C \subseteq$ On, die für L homogen ist und L erzeugt, d.h. ist $z \in L$, so gibt es eine $\in$-Formel φ und $x_1, \ldots, x_n \in C$, so daß z das einzige z' ist mit

$$\theta(\varphi, \langle z', x_1, \ldots, x_n\rangle).$$

Ferner gilt : Ist $\lambda > \aleph_0$, so ist λ das λ-te Element von C.

Der Beweis wird zunächt unter der stärkeren Voraussetzung

(i) es existiert ein $\lambda > \aleph_0$ und ein $X \subseteq \lambda$, so daß $\overline{\overline{X}}=\lambda$ und X homogen für $\langle L_\lambda, \in\rangle$ ist,

erbracht. Falls $\varkappa \longrightarrow (\aleph_1)^{<\omega}$, so existiert ein λ, so daß

(ii) ein $X \subseteq \lambda$ existiert mit $\overline{\overline{X}} = \aleph_1$ und X ist homogen für $\langle L_\lambda, \in\rangle$.

Es läßt sich zeigen, daß das kleinste λ mit der Eigenschaft (ii) gerade $\aleph_1$ ist, woraus sich (i) ergibt.

K. GLOEDE: Weitere Folgerungen aus der Existenz eines $\varkappa$ mit der Eigenschaft $\varkappa \to (\aleph_1)^{<\omega}$.

Aus der Existenz einer derartigen Kardinalzahl lassen sich überraschende Schlüsse auf die konstruktible Hierarchie ziehen. - Vorausgesetzt seien die Aussagen (I)-(III) des vorstehenden Referates. Dann gilt:

(1) Es gibt eine (in der ZF-Sprache formalisierbare) Wahrheitsdefinition für die Stuktur $\langle L,\epsilon\rangle$. Somit ist $V \neq L$ nach einem Satz von TARSKI; insbesondere ist die Menge der Gödelnummern der in $\langle L,\epsilon\rangle$ wahren Sätze eine nicht-konstruktible Teilmenge von ω. Da $\langle L_{\omega_1}, \epsilon\rangle$ eine elementare Teilstruktur von $\langle L,\epsilon\rangle$ ist, so gilt;

(2) Ist α definierbar in $\langle L,\epsilon\rangle$ (d.h. ohne Parameter aus L), so ist α abzählbar, insbesondere ist $\aleph_1^L,\ldots,\aleph_\omega^L,\ldots,\ \theta_0 < \aleph_1$, wobei θ_0 die kleinste in L unerreichbare Kardinalzahl ist.

(3) Die Elemente von C, d.h. insbesondere die überabzählbaren (wirklichen) Kardinalzahlen sind stark unerreichbar in L. Dann sind ν_i überabzählbare Kardinalzahlen, die in L die Eigenschaft ϕ_i besitzen (i=0,1), wobei $\phi_0(\alpha)$ besagt, daß α regulär ist, und $\phi_1(\alpha) \longleftrightarrow \forall\xi(\xi=\bar{\bar{\xi}}<\alpha \to 2^{\xi}<\alpha)$, so trifft die Eigenschaft $\phi_0 \wedge \phi_1$ in L auf sämtliche Elemente von C zu.

Diese Folgerungen (wie auch (I)-(III) des vorstehenden Referates) lassen sich auf die Hierarchie der relativ (von a) konstruktiblen Mengen L(a) übertragen, falls $a \subseteq \omega$. Im allgemeinen Fall einer beliebigen Menge a sind die Aussagen geeignet abzuändern.

K. BAYER:

(I) Eigenschaften von $\varkappa(\alpha) \underset{\text{Def.}}{=} \cap\{\nu : \nu \to (\alpha)_2^{<\omega}\}$

(1) $\varkappa(\alpha)$ ist stark unerreichbar, wenn α Limeszahl ist.

(2) Wenn β Limeszahl ist und $\alpha < \beta$, dann gilt $\varkappa(\alpha) < \varkappa(\beta)$.

Beides folgt durch Widerspruchsbeweis mit Hilfe des Lemmas und des Satzes III aus dem Vortrag von Herrn Rutsch. Für (1) wird außerdem $2^{\lambda} \not\to (\alpha)_{\lambda}^{<\omega}$ benutzt.

(II) Verträglichkeit mit V = L

Existiert $\varkappa$, so daß $\varkappa \to (\alpha)^{<\omega}$, dann gilt $\varkappa \to (\alpha)^{<\omega}$ in jedem transitiven ZF-Modell $\mathfrak{M}$, falls α abzählbar in $\mathfrak{M}$ ist und $\varkappa$ aus $\mathfrak{M}$.

Die Äquivalenz der Existenz einer homogenen Menge vom Ordnungstyp α für eine Funktion f mit der Nichtfundiertheit einer gewissen Relation ergibt den Beweis dieser Behauptung. Auf Grund des Ergebnisses des vorhergehenden Vortrages kann man sagen, daß die Existenz eines $\varkappa$, so daß $\varkappa \to (\alpha)^{<\omega}$ gilt, mit V = L genau dann verträglich ist, wenn $\alpha < \omega_1^L$.

K. Gloede (Heidelberg)